PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

UMA INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO COMBINATÓRIO NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Alessandro Caldeira Alves

Belo Horizonte
2010

Alessandro Caldeira Alves

UMA INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO COMBINATÓRIO NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Clara Rezende Frota

Belo Horizonte
2010

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

A474u
Alves, Alessandro Caldeira
Uma introdução ao pensamento combinatório no 9º ano do ensino fundamental. / Alessandro Caldeira Alves. Belo Horizonte, 2010.
158f.: il.

Orientadora: Maria Clara Rezende Frota
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Análise combinatória. 2. Distribuição (Teoria da Probabilidade). I. Frota, Maria Clara Rezende. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 519.1

FOLHA DE APROVAÇÃO

AGRADECIMENTOS

À Keila, minha amada esposa, por todo companheirismo, força e amor dedicados a mim sem os quais não seria possível a realização desta pesquisa.

A Profª Drª Maria Clara pela orientação sempre atenta e presente em todos os momentos, também pela amizade, paciência e comprometimento que tornaram possíveis a realização desta pesquisa.

Aos meus familiares em especial meus pais que sempre estiveram presentes me apoiando em minhas decisões.

Aos colegas do mestrado com quem tive a oportunidade de conviver e aprender muito neste tempo e que se tornaram grandes amigos.

Aos professores do Mestrado Eliane, Dimas, João Bosco, Agnela, Lidia e Amauri com os quais tive a oportunidade de aprender;

À direção da escola Leonardo da Vinci que permitiu que eu aplicasse o módulo de ensino, e aos alunos que demonstraram muito comprometimento ao participarem da pesquisa

À Deus que torna tudo possível.

RESUMO

A presente pesquisa explorou, através da metodologia da engenharia didática, a introdução do pensamento combinatório e sua relação com o cálculo probabilístico em uma turma do 9º ano do ensino fundamental. Elaboramos um módulo de ensino composto de quatro sequências de atividades tendo por base os métodos de inquirição. O objetivo foi que os alunos identificassem as formas combinatórias de contagem e sua relação com os estudos de probabilidade utilizando os diferentes registros de representação. Os resultados encontrados evidenciaram que o trabalho com os diferentes registros de representação além de proporcionar aos alunos uma maior facilidade no cálculo das possibilidades, também minimizou a dificuldade de diferenciação dos cálculos necessários em situações distintas como arranjo e combinação. Esses resultados sinalizaram a viabilidade do desenvolvimento dos conceitos básicos de análise combinatória no ensino fundamental, através do módulo de ensino elaborado e aplicado de forma a estimular a participação e envolvimento dos alunos tornando-os participantes no processo de construção do seu conhecimento matemático.

Palavras-chave: Pensamento Combinatório; Cálculo probabilístico; Registros de representação semiótica; Métodos de Inquirição.

ABSTRACT

This research explored the introduction of combinatorial thinking and its relation to the probabilistic calculation in a ninth grade class of the secondary school. We developed a teaching modules consisted of four sets of activities based on the methods of inquiry. The aim was the students identified the forms of combinatorial counting and its relation to studies of probability using different registers of representation. The result showed that working with the different registers of representation, in addition to providing the students a greater ease in calculating the possibilities, also downplayed the difficult of differentiation of the calculations needed in distinct situations such as the arrangement and combination. These results showed the feasibility of developing of the basic concepts of combinatorial analysis in the secondary school, through the teaching modules developed and implemented in order to encourage the participation and involvement of the students by making them participants in the process of construction of their mathematical knowledge.

Keywords: Combinatorial Thinking; Probabilistic Calculation, Registers of Semiotic Representation; Methods of Inquiry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 2003 iniciei minha carreira docente como professor de matemática no ensino fundamental, médio e superior. A partir deste momento, venho observando como se processa a aprendizagem dos alunos em relação aos diversos conteúdos, mas um deles, especificamente, sempre despertou meu interesse: Análise Combinatória.

Ao longo dos três primeiros anos de docência trabalhei no ensino médio e pude constatar uma acentuada dificuldade dos alunos de 2º ano com os problemas que envolvem a Análise Combinatória. O erro mais comum relaciona-se à identificação do uso de arranjo ou combinação nas situações problema propostas. Geralmente, os alunos têm dificuldade em perceber se a ordem dos elementos é ou não importante para a resolução dos problemas.

O fato de nos últimos três anos ter trabalhado com turmas do nono ano do ensino fundamental (antiga 8ª série), levou-me a questionar se a dificuldade apresentada pelos alunos no ensino médio não poderia ser minimizada através de uma abordagem adequada do conteúdo de Análise Combinatória ainda no ensino fundamental. Não obstante esta realidade – em que o conteúdo não é abordado adequadamente -, muitos livros didáticos desta etapa, ao tratarem diferentes conteúdos matemáticos, exploram situações nas quais são necessários cálculos relacionados ao pensamento combinatório.

Uma destas situações aparece, geralmente, em livros do sexto ano do ensino fundamental (antiga 5ª série) quando é apresentado o conteúdo de multiplicação. Percebe-se que uma das idéias multiplicativas trabalhadas é o cálculo do número de possibilidades ou combinações possíveis. A combinação que se apresenta aos alunos neste momento está vinculada à multiplicação de possibilidades, por exemplo; uma pessoa tem duas blusas e três shorts então ela pode combinar estas peças de (2 x 3 = 6) seis formas diferentes.

Assim, embora seja abordado implicitamente desde as séries iniciais, é no nono ano do ensino fundamental que o pensamento combinatório merece destaque, pois os livros didáticos o apresentam como ferramenta útil para o cálculo de possibilidades em uma unidade temática abordando o conteúdo *Noções de Probabilidade.* Desta forma, para o nono ano alguns autores propõem a resolução de problemas de contagem através de diagramas, árvores das possibilidades, tabelas, bem como o uso do princípio de multiplicação das possibilidades.

Uma recomendação dos PCNs é que o desenvolvimento do pensamento probabilístico e do pensamento combinatório deva acompanhar a escolaridade matemática desde os ciclos iniciais do ensino fundamental.

> [...] o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL ,1998,p. 52).

Pensando nestas recomendações e orientações, pude fazer um paralelo com minha experiência profissional, cabendo, pois, o seguinte questionamento: de que forma seria possível abordar os conceitos básicos da Análise Combinatória junto a alunos do ensino fundamental? Que estratégias didáticas poderiam ser usadas para a implementação deste conteúdo no ensino fundamental?

No ano de 2008, como aluno do Mestrado Profissional em Ensino da Pontifícia Universidade Católica, cursei a disciplina Ensino de Matemática na Educação Básica. Nesta disciplina nos foi proposto o desafio de elaborar e desenvolver uma atividade em sala de aula na qual utilizássemos alguns métodos baseados na inquirição (ERNEST, 1991) para o ensino de Matemática. Diante de tal proposta senti-me desafiado a pensar novas formas para introduzir o ensino de alguns tópicos de Análise Combinatória ainda no ensino fundamental, já que este conteúdo normalmente é abordado em profundidade apenas no 2° ano do ensino médio. Assim, desenvolvi uma atividade baseada na resolução de problemas, procurando fazer com que os alunos - ao desenvolverem o pensamento combinatório - tivessem o primeiro contato com alguns conceitos básicos da Análise Combinatória, tais como Arranjo, Combinação e Permutação, mas isto, de uma forma mais intuitiva sem apelar ao uso de fórmulas.

Esta atividade foi desenvolvida como um estudo piloto em uma turma do 9º ano do ensino fundamental composta de 21 alunos. Nesta turma havia acabado de explicar a matéria *Princípio Multiplicativo* e, na seqüência, o livro texto adotado trazia a matéria N*oções de Probabilidade.* A atividade foi proposta e aplicada de forma a abordar alguns conceitos básicos de Análise Combinatória, a fim de que os alunos desenvolvam a percepção da importância ou não da ordem dos termos e, consequentemente, das diversas formas de se calcular as possibilidades.

Essa experiência permitiu compreender que, quando motivados, os alunos conseguem elaborar diferentes estratégias para efetuar os cálculos, como por exemplo, a multiplicação das possibilidades nos exercícios de arranjo e permutação; a divisão como forma de retirar o excesso de possibilidades nos exercícios de combinação; e outras formas de representar resultados como o diagrama, a tabela, a escrita de opções, dentre outros. Estas variadas formas de resolução, bem como a diferença existente nos exercícios em relação à ordem dos termos, foram discutidas e aprofundadas em um momento de socialização, no qual todos puderam participar resolvendo exercícios no quadro, questionando e sendo questionados. Outra observação interessante obtida graças à aplicação do estudo piloto foi que as diferentes formas de se calcular as possibilidades, puderam ser bem compreendidas pelos alunos, que as utilizaram na sequência do conteúdo para o cálculo probabilístico.

O trabalho proporcionou, portanto, uma oportunidade para que eu repensasse minha prática docente, tendo em vista a busca por alternativas que pudessem proporcionar um efetivo aprendizado para meus alunos, fazendo com que se percebessem capazes de expressar suas idéias e essas serem valorizadas. O envolvimento dos alunos, bem como os resultados alcançados, motivaram a elaboração de uma proposta de introdução dos conceitos da análise combinatória e do cálculo das probabilidades no ensino fundamental, aqui apresentada.

1.1 Problematização

A introdução do pensamento combinatório demanda do professor uma atenção especial, já que nem todos se sentem preparados para abordar tal conteúdo. Nesse sentido surge o questionamento: de que tipo de materiais didáticos dispomos para trabalhar o raciocínio combinatório no ensino fundamental?

Além disto, há que se considerar também as dificuldades apresentadas pelos alunos, sendo que uma delas - talvez a principal, conforme me foi possível observar - diz respeito a identificar se os problemas apresentados envolvem o cálculo de arranjo ou combinação. Neste sentido, outros questionamentos podem ser levantados, quais sejam: qual a percepção do aluno do Ensino Fundamental em relação à importância ou não da ordem dos elementos para estabelecer a diferença entre o uso de arranjo e combinação? Essa diferença é clara, ou os alunos resolvem os exercícios por tentativa e erro, sem entender o que é um agrupamento de objetos em que a ordem dos termos é relevante (no caso um arranjo), ou um agrupamento no qual a mudança da ordem dos termos não altera o resultado final (no caso uma combinação)?

E, ainda, no que concerne à elaboração de estratégias para minimizar as dificuldades dos alunos, é viável recorrer a uma abordagem intuitiva para facilitar a compreensão dos conceitos da Análise Combinatória? Ou seja, implementar uma proposta que coloque o aluno diante de situações motivadoras que o conduzam à resolução dos diversos exercícios de contagem utilizando-se da análise, da comparação, da validação, da reformulação, dentre outras características do pensamento combinatório, sem o apelo a fórmulas. Neste sentido, seria interessante verificar se esta abordagem "intuitiva" pode facilitar também a compreensão do conceito de probabilidade.

A problemática suscitada anteriormente orientou esta pesquisa, conduzida a partir da seguinte questão norteadora: **Quais as estratégias de ensino-aprendizagem que podem viabilizar uma introdução dos conceitos básicos de análise combinatória no ensino fundamental?**

Na tentativa de buscar repostas para esta questão buscamos elaborar um módulo de ensino que foi desenvolvido com alunos do nono ano do ensino fundamental. Procuramos entender se o trabalho com as diferentes formas de representação pode facilitar a compreensão e o cálculo das possibilidades em exercícios de contagem. Considerando as dificuldades que os alunos do ensino médio apresentam diante deste conteúdo, foi nosso objetivo observar e analisar as estratégias desenvolvidas por alunos - que cursavam ainda o Ensino Fundamental - frente à diferença entre arranjo e combinação.

Do ponto de vista estrutural, a pesquisa é composta de sete capítulos, sendo que esta breve introdução constitui o primeiro. Procuramos dispor os capítulos de modo a permitir a compreensão do desenvolvimento de todas as etapas do presente trabalho.

Desta forma, no segundo capítulo apresentamos o percurso da pesquisa, destacando a engenharia didática como metodologia que inspirou sua estruturação e a elaboração do módulo de ensino. Neste capítulo, além de explorarmos as fases da engenharia didática, bem como os instrumentos de coleta de dados utilizados neste trabalho, também apresentamos o contexto da pesquisa: a escola e a turma na qual aplicamos o módulo de ensino.

Os referenciais que deram suporte à pesquisa são explorados no terceiro capítulo. A discussão teórica empreendida contemplou questões fundamentais para o tratamento da temática desta dissertação, tais como: o pensamento combinatório; a necessidade de exploração do pensamento combinatório nas séries iniciais; os registros de representação semiótica como instrumentos para favorecer o processo ensino-aprendizagem; e os métodos de inquirição como ferramentas para um ensino de qualidade. Assim, neste capítulo, além de fazer uma análise de trabalhos que contemplam, de algum modo, o tema que pesquisamos, também procuramos promover uma interlocução entre nossa pesquisa e outros trabalhos entre os quais destacamos: Polya (1978), Ernest (1996), Batanero e Godino (1996), Sturm (1999), Esteves (2001), Duval (2003, 2009), Ponte (2003).

O quarto capítulo trata dos aspectos referentes à análise prévia - primeira fase da metodologia de engenharia didática. Nele apresentamos um dos procedimentos desenvolvidos nesta fase preliminar, qual seja a análise de quatro coleções de livros didáticos referentes ao 3º e 4º ciclos do ensino fundamental (6º ao 9º ano). Os livros são analisados quanto à forma de abordagem dos conceitos básicos de análise combinatória, visando perceber como são trabalhados os diferentes registros de representação, no estudo desse tópico.

No quinto capítulo apresentamos um conjunto de quatro sequências de atividades aplicadas a uma turma do nono ano do ensino fundamental. Este conjunto organizado de atividades constitui o módulo de ensino, correspondendo à segunda fase da engenharia didática- da concepção e análise *a priori*. Neste capítulo, portanto, além de apresentar as atividades que compõem o módulo de ensino, também pontuamos seus objetivos, as possíveis soluções e dificuldades que poderiam ser encontradas pelos alunos.

O sexto capítulo consiste na apresentação da implementação do módulo de ensino e na análise *a posteriori*, correspondente às duas últimas etapas da engenharia didática. Procedemos a um estudo quantitativo dos erros e acertos, bem como ao estudo qualitativo, através do qual identificamos e discutimos alguns aspectos relevantes para nossa pesquisa, a saber: a utilização dos diferentes registros no desenvolvimento dos conceitos básicos de análise combinatória, a relação entre pensamento combinatório e o cálculo probabilístico, além da percepção das dificuldades dos alunos na resolução das atividades.

Finalmente nas considerações finais destacamos os resultados dessa pesquisa discutindo as potencialidades e as limitações do trabalho. As estratégias teórico-metodológicas adotadas na implementação do módulo de ensino são analisadas considerando-se a problemática inicialmente levantada. Nesta análise não perdemos de vista o fato de que tal módulo se pautou na valorização do trabalho com os diferentes registros de representação, e fundamentou-se nos métodos de inquirição. Além disto, neste último capítulo, também apontamos novas questões de pesquisa que envolvem alguns aspectos que não puderam ser desenvolvidos nesta dissertação.

2 O PERCURSO DA PESQUISA

A pesquisa aqui relatada objetivou investigar acerca de estratégias de ensino-aprendizagem que podem viabilizar uma introdução dos conceitos básicos de análise combinatória no Ensino Fundamental.

Desenvolvemos um estudo empírico, junto a alunos do 9º ano (antiga 8ª série) de uma escola particular da cidade de Ipatinga, Minas Gerais. Este estudo constituiu-se a partir da elaboração e, posterior, implementação de um módulo de ensino composto de quatro sequências de atividades, na forma de situações problema que abordaram o princípio multiplicativo, idéias sobre permutação simples, arranjo simples e combinação simples, além de explorar conceitos básicos de probabilidade.

2.1 O desenho teórico- metodológico

A metodologia qualitativa de desenvolvimento da pesquisa foi inspirada na engenharia didática, termo empregado na Didática Francesa, conforme destaca Artigue citada por Machado (2002). O nome engenharia didática é associado ao trabalho de um engenheiro no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto.

Segundo Pais:

> [...] quando se faz essa analogia entre a didática e o trabalho do engenheiro, torna-se conveniente destacar que o modelo teórico não é suficiente para suprimir todos os desafios da complexidade do objeto educacional. (Pais, 2008, p. 100).

Assim para Pais (2008) não se trata da execução de um projeto no sentido de automatização ou repetição e, sim, no seu sentido mais pleno; envolve desde o desafio de criar, elaborar no caso o módulo de ensino a ser implementado, sua aplicação, observação e análise.

A metodologia da engenharia didática compreende quatro fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentação, ou condução do módulo de ensino; análise *a posteriori* e avaliação.

A primeira fase, das análises preliminares, diz respeito ao quadro teórico didático sobre o qual se fundamenta a proposta de pesquisa. Nesta fase o pesquisador faz uma análise das principais dimensões relacionadas ao conteúdo em questão, o que envolve, de modo geral, uma análise epistemológica dos conteúdos envolvidos, uma análise pedagógica do ponto de vista adotado no ensino desses conteúdos e seus efeitos, uma análise das concepções, erros e procedimentos dos alunos tendo em vista o ensino habitual. Esta análise preliminar fornece subsídios para a construção da engenharia didática.

A segunda fase é a fase da concepção e análise *a priori* das situações da engenharia didática. De acordo com as análises preliminares o pesquisador escolhe algumas variáveis relacionadas ao ensino do conteúdo em questão, que serão consideradas no desenho da proposta didática. Essas variáveis são de dois tipos: macrodidáticas ou globais, relativas à organização global da engenharia, e variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase.

Elabora-se nessa fase o módulo de ensino, que pode ser entendido como um conjunto organizado de aulas, no sentido colocado por Pais (2008). O módulo de ensino decorre de um planejamento detalhado de aulas, tendo como objetivo propor situações de aprendizagem, que envolvam o aluno no estudo de determinado conteúdo.

A análise *a priori* tem uma parte descritiva e outra de previsão. Nesta fase se descrevem as escolhas e as características destas escolhas relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver além dos desafios que podem ser encontrados no decorrer da experimentação. Alem disto é feita uma previsão, diante das atividades, dos possíveis comportamentos dos alunos.

A terceira fase é a aplicação do módulo de ensino ou experimentação. Nesta fase acontece o contato do professor-pesquisador com os alunos, é a fase em que são explicitados os objetivos da pesquisa, como ela vai acontecer, a aplicação e registro dos instrumentos de pesquisa.

Por fim, após a preparação, a aplicação do módulo de ensino, com registro da condução e observações, torna-se necessária uma análise dos resultados, o que determina a quarta fase da engenharia didática, conhecida como análise *a posterioi*, que consiste na avaliação e validação da experiência. Esta fase se apóia nos dados recolhidos pelos instrumentos de pesquisa: as observações feitas durante cada etapa de desenvolvimento do trabalho em sala de aula; das produções dos alunos feitas em sala ou em casa. Algumas vezes são utilizados outros instrumentos como questionários, entrevistas, gravações, com o objetivo de obter uma maior variedade de dados de pesquisa.

Segundo Machado (2002), uma característica desta metodologia é que a sua validação acontece internamente à medida que as hipóteses levantadas na fase de análise *a priori* são comprovadas ou não na fase de análise *a posteriori*.

Na pesquisa desenvolvida nos inspiramos na metodologia da engenharia didática sendo que a primeira fase compreendeu dois tipos de estudos: estudos teóricos e estudos didáticos.

Os estudos teóricos sobre a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2009), os métodos de inquirição de Ernest (1996), as atividades investigativas de Ponte (2003) e a resolução de problemas segundo Polya (1978) objetivaram fundamentar a elaboração do módulo de ensino abordando o desenvolvimento do pensamento combinatório. Esses estudos e ainda um levantamento de dissertações e pesquisas sobre o tema, integram o capítulo três e tornaram possível delinear o quadro teórico para a elaboração do módulo de ensino, que teve como foco o incentivo ao uso dos diversos registros de representação, na organização de um módulo de ensino que faz uma abordagem intuitiva[1], a partir de situações problema, dos principais conceitos da análise combinatória simples e do cálculo de probabilidades, no 9º ano do ensino Fundamental.

Os estudos didáticos consistiram em uma análise de como o conteúdo é abordado em quatro coleções de livros didáticos do 2º ciclo do Ensino Fundamental. As coleções analisadas foram:

• Tudo é Matemática- 6º a 9° ano – Luiz Roberto Dante – Editora Ática – São Paulo, 2008.

• Matemática Fazendo a diferença –6º a 9° ano – José R. Bonjorno, Regina A. Bonjorno, Ayrton Olivares – FTD – São Paulo, 2006.

• Novo Praticando Matemática - 6º a 9° ano – Álvaro Andrini, Maria J. Vasconcellos – Editora do Brasil, 2006.

• Matemática para todos – 5ª a 8ª série – Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis

---

[1] Por abordagem intuitiva entendemos uma proposta que busca colocar o aluno diante de situações problema que o conduzam à resolução dos exercícios sem o apelo à fórmula, explorando sua capacidade de pensar matematicamente através da análise, comparação, busca de padrões dentre outras características necessárias no pensamento combinatório.

Editora do Brasil – São Paulo, 2007.

Nesta análise observamos quais os recursos didáticos utilizados e o tipo de abordagem dada aos conteúdos de análise combinatória e probabilidade no segundo ciclo do ensino fundamental (6º ao 9º ano). A análise focalizou a forma de apresentação do conteúdo e os tipos de atividades exploradas, procurando perceber o incentivo à utilização de diferentes modos de resolução de exercícios, à medida que os alunos são motivados a investigar, experimentar, analisar dentre outras ações que vão possibilitar uma maior participação na construção de seu próprio conhecimento sobre o assunto.

Tanto na apresentação do conteúdo quanto nas atividades exploradas analisamos a abordagem dos diversos registros de representação. O objetivo foi identificar os tipos de registro mais utilizados, a abordagem das transformações de registros (tratamento e conversão) presentes no trabalho com diferentes representações, além do incentivo à utilização destes registros para a resolução de exercícios. Essas foram as variáveis de comando do sistema de ensino, ou seja, as variáveis que orientaram o trabalho conduzido, na fase de análise *a priori*, inspirado na engenharia didática.

A análise dos livros, apresentada no Capítulo 4, foi importante para a construção das sequências de atividades presentes no módulo de ensino, pois confirmou a necessidade do trabalho conjunto entre análise combinatória e probabilidades, permeado da utilização dos registros de representação além de motivar a abordagem mais aprofundada deste tema.

Estudos teóricos e didáticos constituem parte das análises preliminares da pesquisa. Nessa fase foram também analisadas questões locais, relativas à escola e à organização curricular, e que foram importantes, por exemplo, na definição do número de seqüências de atividades a serem desenvolvidas. Essas análises integram a seção 2.1 desse Capítulo.

O detalhamento do módulo de ensino, segunda fase da pesquisa, é apresentado no Capítulo 5, que sintetiza o produto da pesquisa, requisito do Mestrado Profissional. Os objetivos das atividades que compõem o módulo de ensino são estabelecidos, tendo em vista as variáveis de comando definidas, que decorrem de escolhas teóricas e metodológicas na elaboração e condução do trabalho. O Capítulo reúne duas fases da pesquisa que se inspiram nas fases de análise *a priori* e experimentação, segundo a metodologia da engenharia didática.

A terceira fase da pesquisa compreendeu a análise dos resultados, correspondendo à última fase de análise *a posteriori* e validação, segundo a metodologia de engenharia didática.

A engenharia didática, aqui utilizada, é "[...] uma metodologia, com potencial para servir de base para as pesquisas de sala de aula." (Carneiro, 2005, p.2). Esta metodologia, segundo Carneiro (2005), tem como característica a articulação entre a prática didática e a produção de conhecimento o que justifica a sua escolha para fundamentar a condução desse trabalho.

2.2 O contexto de pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida na escola particular Chapeuzinho Vermelho – Colégio Leonardo da Vinci localizada na cidade de Ipatinga (MG). A escola trabalha com turmas do ensino maternal até o ensino médio. Em média, as turmas do ensino fundamental e médio são formadas por 30 alunos na sua maioria de classe média.

Quanto à disciplina de Matemática especificamente, a escola adota uma estrutura curricular na qual o conteúdo é dividido em duas partes a partir do 9º ano do ensino fundamental - Matemática I e II. Embora haja tal divisão o livro adotado é o mesmo, cabendo ao professor recorrer aos capítulos do livro que contemplem os conteúdos que dizem respeito à Matemática I ou II[2].

No 9º ano ensino fundamental os conteúdos de Matemática I (cinco aulas semanais) e Matemática II, denominada Desenho Geométrico, (duas aulas semanais) são avaliados separadamente pelos seus respectivos professores, constituindo duas matérias distintas. Como a escola adota o modelo trimestral, a distribuição de pontos é definida em 35, 30 e 35 pontos. Esta pontuação é distribuída através de duas provas marcadas pela escola, projetos interdisciplinares e uma parte destinada às atividades realizadas pelo professor em sala de aula.

Nesta escola, nossa experiência de trabalho é com as turmas de 2º e 3° ano do Ensino Médio nas quais ministramos o conteúdo de geometria (Matemática II), e também no 9º ano (antiga 8ª série) do Ensino Fundamental o conteúdo de Desenho Geométrico. Na turma do 9º ano, além dos conteúdos ligados à geometria a disciplina de Desenho Geométrico aborda também o conteúdo "noções de probabilidade".

No ano de 2008 foi aplicado um estudo piloto na turma do 9º ano do ensino fundamental no sentido de sondar a possibilidade de desenvolver um trabalho na linha

[2] A Matemática II envolve os conteúdos ligados à Geometria, enquanto os demais conteúdos são reunidos na Matemática I.

investigativa, perspectiva adotada na proposta de sequência aqui apresentada. Este estudo piloto consistiu na aplicação de uma sequência de exercícios que visavam à ampliação dos conceitos de análise combinatória que eram apresentados pelo livro didático. Os alunos desenvolveram, de maneira informal, a diferença entre arranjo e combinação, objetivando a percepção em relação à importância ou não da ordem dos elementos e a resolução de exercícios sem a utilização de fórmulas.

Neste estudo piloto os alunos foram divididos em duplas resolvendo os exercícios propostos e depois socializando os resultados apresentando algumas resoluções no quadro e posteriormente discutindo as respostas encontradas e propondo novas alternativas.

O trabalho evidenciou que os alunos, utilizaram de diferentes formas de representações e conseguiram desenvolver os cálculos referentes a arranjo e combinação sem utilizarem as fórmulas. Mediante a resolução dos exercícios e a socialização dos resultados os alunos perceberam a utilização da importância ou não da ordem dos termos para a resolução de exercícios sendo necessária em alguns casos (combinação) a retirada das alternativas repetidas. Estes resultados serviram de motivação para que o estudo piloto fosse aprimorado e apresentado na forma de um módulo de ensino como uma alternativa para favorecer o processo ensino/aprendizagem de análise combinatória e probabilidade no 9º ano do ensino fundamental.

Para o desenvolvimento dos estudos sobre combinatória e probabilidade foram planejadas 10 aulas, distribuídas ao longo de 5 semanas, sendo duas aulas semanais, que aconteciam às quintas-feiras no 1º horário de 7:15 às 8:05 e no 4º horário de 10:00 às 10:45. Durante as semanas de aplicação do módulo de ensino também foi utilizado o 5º horário, da quinta-feira, que acontecia de 10:45 às 11:30, possibilitando que tivéssemos um espaço maior de tempo para o momento de socialização das atividades conduzidas em duplas, momento importante em que eram feitas as sistematizações das observações dos alunos e os eventuais redirecionamentos pelo professor.

No total foram doze aulas de aplicação das sequências de atividades, duas aulas para aplicação da prova e uma aula para aplicação do questionário. O Quadro 1 apresenta as sequências de atividade e avaliação, os dias de aplicação, o tempo de duração e seus objetivos.

Seqüência	Objetivo	Tempo
Sequência 1- Sala 05/11/2009	A introdução do princípio multiplicativo e a exploração de diferentes representações para o cálculo de possibilidades.	3h/a
Sequência 1 -Casa	Exercícios para desenvolver os conteúdos trabalhados em sala.	2h/a
Sequência 2 – Sala 12/11/2009	A exploração de exercícios que trabalhem a diferença entre Arranjo e Combinação na análise combinatória.	3h/a
Sequência 2 - Casa	Exercícios para desenvolver os conteúdos trabalhados em sala.	2h/a
Sequência 3 – Sala 19/11/2009	A introdução da probabilidade através da resolução de exercícios	3h/a
Sequência 3 - Casa	Exercícios para desenvolver os conteúdos trabalhados em sala.	2h/a
Seqüência 4 – Sala 26/11/2009	Sistematização dos conceitos estudados nas sequências anteriores.	3h/a
Avaliação 1 – prova 03/12/2009	Verificação da aprendizagem dos alunos referente aos conteúdos trabalhados.	2h/a
Avaliação 2 – Questionário 04/12/2009	Avaliação da experiência pelos alunos envolvidos em relação aos exercícios trabalhados e a forma como os conteúdos foram apresentados.	30 min.

Quadro 1: Seqüência de Atividades

A forma como se desenvolveu a aplicação das atividades em sala de aula baseia-se na proposta investigativa de Ponte, Brocardo e Oliveira:

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, (iii) discussão dos resultados, nos quais os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.13).

Em consonância com a proposta destes autores, desenvolvemos nossa atividade investigativa. E, no primeiro momento, após realizar a apresentação da atividade (1ª fase da aula investigativa), a turma foi dividida em duplas, sendo entregue para cada aluno a folha contendo a sequência de atividades. Os alunos tiveram duas aulas para desenvolverem as atividades (2ª fase da aula investigativa), sendo que cada dupla registrava seus cálculos e respostas. Ao final, apenas uma folha era entregue ao professor e a outra folha ficava com a dupla que a utilizava no momento de socialização e para estudos posteriores. Após a resolução e a entrega das atividades aconteceu a socialização das idéias (3ª fase da aula investigativa), na qual alguns alunos foram convidados ou se dispuseram a resolver os exercícios no quadro.

Na fase de socialização os alunos tinham a liberdade para questionar os resultados apresentados e sugerir outras formas de resolver as questões. O papel do professor e pesquisador foi de organizador, coordenando a participação de todos, fazendo intervenções para esclarecer algumas dúvidas e propondo alternativas para a resolução de exercícios.

Após o momento de socialização das idéias, os alunos recebiam uma ficha de atividades para ser desenvolvida em casa, individualmente, que era entregue na semana seguinte.

O módulo de ensino compreendeu quatro sequências de atividades compostas de atividades em sala, feitas em duplas, e de atividades para casa. Ao término do desenvolvimento da sequência foi aplicada uma prova, que era prevista no calendário escolar como parte do sistema de avaliação, abordando todo o conteúdo desenvolvido no módulo de ensino. Um questionário foi elaborado e possibilitou aos alunos se manifestarem sobre a experiência expressando sua opinião sobre as atividades desenvolvidas.

2.3 Instrumentos de coleta e análise de dados

Os alunos entregaram todos os registros escritos das atividades aplicadas em sala e propostas para casa assim como a prova e o questionário. Estes registros escritos foram sempre complementados por anotações feitas pelo pesquisador durante o desenvolvimento e ao final de cada atividade.

Optamos por conduzir a análise de cada uma das atividades a partir de dois critérios. O primeiro quantitativo contabiliza os erros e acertos de cada atividade, bem como os exercícios que os alunos deixaram em branco ou não conseguiram concluir, apresentando uma resolução incompleta.

O segundo critério é qualitativo e objetivou comparar os resultados da análise a *posteriori* com a análise prévia feita, observando a forma como os alunos resolveram os exercícios, identificando a frequência de utilização dos diferentes registros de representação, as dificuldades encontradas, os erros mais comuns de acordo com as variáveis de observação definidas.

A prova foi um importante instrumento de coleta de dados, pois através dela foi possível avaliar o desempenho dos alunos, tendo como foco a utilização dos diferentes registros e as relações entre eles. A prova foi analisada de forma quantitativa através de gráficos e tabelas que mostram a nota alcançada pela turma de uma forma geral e os resultados encontrados em cada questão. Num segundo momento foi feita uma análise qualitativa priorizando-se a observação do uso dos diferentes registros de representação, as dificuldades apresentadas e os erros mais comuns.

Finalmente o questionário foi analisado de forma a fornecer condições de identificar quais os pontos positivos e negativos destacados pelos alunos, referentes às atividades propostas e a forma como foram desenvolvidas as sequências.

Ao final foi desenvolvida uma análise comparativa na qual foram confrontados os resultados esperados e os resultados obtidos. Esta comparação teve por objetivo avaliar o módulo de ensino proposto na busca de alternativas para melhorá-lo como instrumento de ensino-aprendizagem do conteúdo de análise combinatória.

3 O PENSAMENTO COMBINATÓRIO

Este capítulo apresenta os referenciais teóricos que deram suporte a esta pesquisa, cujo objetivo foi investigar tipos de estratégias de ensino-aprendizagem para a introdução do pensamento combinatório junto a alunos do 9º ano (antiga 8ª série) do ensino fundamental.

Destacamos a importância do pensamento combinatório, tanto no aspecto social – para a formação de cidadãos críticos capazes de execer sua cidadania -, como na formação matemática para o desenvolvimento da flexibilidade de utilizar diversas formas para representar idéias matemáticas e da capacidade de investigar e compreender atribuindo significado ao conteúdo matemático proposto.

Este pensamento combinatório, utilizado nos problemas de contagem, proporciona ao aluno a capacidade de analisar situações, estabelecer padrões, criar estratégias, identificar possibilidades além de desenvolver a capacidade argumentativa e o espírito crítico. Estudos, como os realizados na Psicologia por Piaget e Inhelder (s/d), destacam a importância atribuída ao pensamento combinatório para o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos, designadamente pela influência que exerce no desenvolvimento do pensamento formal.

3.1 O pensamento combinatório e a formação para a cidadania

De modo geral a Matemática é apresentada aos alunos de forma acabada, sem que esses possam levantar conjecturas ou fazer sugestões. Essa forma de lidar com a matemática pode estar relacionada a uma concepção de matemática como infalível e exata, levando a questionamentos dos alunos sobre os motivos de se considerá-la dessa forma.

Esta visão da matemática sempre tão exata e precisa tem feito da matemática o que Borba (2001) chama de *"uma linguagem de poder"* que atribui à matemática o argumento definitivo nas mais diversas situações. Esta visão está amparada naquilo que Borba (2001) denomina *"Ideologia da Certeza"*.

Esta matemática, segundo Borba (2001), à medida que dá poder àqueles que a dominam também inferioriza quem, de certa forma, não tem acesso a ela, fazendo com que se crie um cenário propício para a sua imposição. Os alunos costumam se sentir inquietos não com o fato dos resultados matemáticos serem eficientes, mas sim com a dificuldade de questioná-los, uma vez que para isso seria necessário entender mais de matemática. Assim compreende-se a dimensão apresentada por Skovsmose (2001, p. 128) onde "aqueles que não aprendem matemática estão em desvantagem já que não serão capazes de lidar com a complexidade da sociedade atual".

Esta matemática, sempre tão imponente e definitiva, é reflexo, na maioria das vezes, de uma matemática apresentada nas escolas de forma autoritária e impositiva, em que o professor, dono da verdade, está num patamar superior, de forma que não pode ser questionado ou desafiado pelos alunos. Mas culpar o professor por esta "*ideologia da certeza*" não é coerente, pois como afirma Borba (2001) o professor faz parte de um ciclo que contribui para a difusão e manutenção desta ideologia, sendo necessária uma mudança de atitude.

Esta mudança de atitude está relacionada ao que Oliveira e Serrazina (2002) chamam de "*prática reflexiva*" que leva o professor a fazer uma autocrítica sobre a sua prática educativa. Esse ato de refletir tem a perspectiva colocada por Saviani:

> Refletir é o ato de retomar, reconsiderar os dados disponíveis, revisar, vasculhar numa busca constante de significados. É examinar detidamente, prestar atenção, analisar com cuidado. (SAVIANI, 1980, p.23).

Esta reflexão pode abrir novos caminhos e assim melhorar sua prática. A partir dessa reflexão torna-se possível transformar a matemática ensinada nas instituições de ensino, objetivando que ela seja apresentada de forma mais interessante e próxima dos alunos. Assim eles já não a vêem como um conteúdo disciplinar imposto e inalcançável.

O professor reflexivo está sempre à procura de oportunidades para motivar seus alunos e valorizar o processo ensino-aprendizagem.

Como é destacado no documento dos PCNs :

> [...] existem professores que, individualmente ou em pequenos grupos, têm iniciativa para buscar novos conhecimentos e assumem uma atitude de constante reflexão, o que os leva a desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes para ensinar Matemática. De modo semelhante, universidades, secretarias de educação e outras instituições têm produzido materiais de apoio para a prática do professor. (BRASIL, 1998, p.21).

Estes materiais podem fornecer idéias para que o professor conduza aulas mais participativas, em que os conteúdos matemáticos trabalhados passam a ter sentido para os alunos.

No entanto, essas iniciativas ainda não são necessariamente adotadas pelos professores, pois quando se fala em “reflexão” isto nos remete à idéia de “transformação” o que nem sempre é visto com bons olhos. Nós, professores, nem sempre estamos preparados para lidar com o novo. Propor uma atividade diferente daquela a que estamos habituados gera uma insegurança, a qual só pode ser transposta a partir do desejo da melhora. Sem reflexão o professor torna sua prática mecânica, ensinando de forma repetitiva, reproduzindo o que já está pronto e o que é mais acessível, fácil ou simples.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) é apontada a necessidade não apenas de conhecimentos matemáticos por parte dos professores, mas de uma mudança da própria concepção de matemática:

> Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. (BRASIL,1998, p.36).

Perceber a Matemática como ciência dinâmica, aberta à incorporação de novos conhecimentos requer disposição para romper com o tradicionalismo. Numa abordagem tradicional o conteúdo é apresentado oralmente pelo professor, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, pressupondo, muitas vezes, que o aluno aprenda por reprodução. Assim, considera-se que a capacidade de repetir ou reproduzir algoritmos de forma correta, seria evidência de que ocorreu a aprendizagem.

Essa prática tradicional de ensino, tem se mostrado ineficaz, pois os alunos têm desenvolvido a capacidade de reproduzir procedimentos mecanicamente, mas não aprendem o conteúdo e não sabem utilizá-lo em outros contextos (BRASI, 1998).

Assim, é necessário utilizar o dinamismo da matemática para proporcionar ao aluno a oportunidade de produzir significado e, com isso, ser agente da construção do seu conhecimento valorizando sua bagagem cognitiva. Mas à medida que se redefine o papel do aluno no processo ensino/aprendizagem, é preciso redimensionar também o papel do professor.

O professor deve ser o *organizador* da aprendizagem, pois além de conhecer o seu aluno ele tem que escolher situações que possibilitem a construção de conceitos. Ele também deve ser o *facilitador* porque não é mais responsável pela exposição de todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, as quais o aluno não tem condições de obter sozinho. Outras qualidades são atribuídas ao professor como *mediador,* à medida que valoriza as propostas dos alunos e promove debates sobre resultados e métodos. Como um *incentivador* da aprendizagem, o professor é visto com a função de estimular a cooperação entre os alunos, trabalhando, pois, o lado argumentativo dos mesmos através das mais variadas formas (escrita e verbal). (BRASIL, 1998).

Seja como organizador, facilitador ou mediador o professor é um importante personagem dentro do processo ensino-aprendizagem auxiliando os alunos, nos diferentes níveis, na busca pelo domínio dos conhecimentos necessários para se tornarem cidadãos respeitados e conscientes de seu papel na sociedade.

A formação de cidadãos críticos é dos objetivos gerais do ensino:

> - Compreender a cidadania como participação social e política, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
> - Posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas. (BRASIL ,1998, p 6).

Segundo Kessler (1998), um grande desafio no processo educativo é promover uma educação includente através das competências exigidas pelo mercado e ao mesmo tempo capacitar o indivíduo para o exercício de uma cidadania ativa sustentada pela participação, pela busca do diálogo e do bem comum.

Para Matos(2003, p.1) " a finalidade última da educação é a mudança social em direção a uma sociedade mais justa e mais igualitária.". Assim, a escola deve proporcionar espaços de discussão que permitam e encorajem o conflito de opiniões e pontos de vista com o propósito de formar cidadãos críticos. Portanto uma educação critica não pode ser um simples prolongamento da relação social existente, mas ao contrário ela deve se opor às contradições sociais.

De acordo com esta visão cabe aos professores de matemática a preocupação cada vez maior com a importância da matemática neste processo. Uma matemática como instrumento de intervenção e transformação, cada vez mais se faz necessária ultrapassando o limite físico da escola e se entrelaçando com as questões sociais e políticas de nosso tempo. A nossa sociedade está cada vez mais dependente da matemática, através de modelos complexos, sendo que no mundo de hoje é exigido do cidadão " a capacidade de saber lidar com esses modelos, desocultá-los, perceber a sua presença, ser crítico relativamente aos modos como são aceites na sociedade, perceber as intenções e os modos como são produzidos, etc" (MATOS, 2003, p.2). Esta capacidade reflexiva está ligada a um tipo de conhecimento, denominado por Skovsmose (2001) como "conhecer reflexivo", relacionado à competência de refletir sobre o uso da matemática e avaliar esse uso.

Educar matematicamente, "inclui levar os alunos a apropriar-se de modos de entender matematicamente as situações do dia-a-dia" (MATOS, 2003, p. 3). A educação matemática crítica é uma linha de trabalho que apresenta e fundamenta propostas de redirecionamento do que tem sido a educação matemática. Esta preocupação traz à tona questões levantadas por Skovsmose como:

> a quem interessa que a educação matemática seja organizada dessa maneira? Para quem a educação matemática deve ser voltada? Como evitar preconceitos nos processos analisados pela educação matemática que sejam nefastos para grupos de oprimidos como trabalhadores, negros, índios e mulheres? (SKOVSMOSE, 2001, p.7).

Estas questões exploram a idéia de que a educação tem necessariamente que ter uma dimensão de democratização. Esta democratização, para Skovsmose (2001), não só é possível como traz consigo um importante papel da educação matemática como uma porta de entrada para uma sociedade cada vez mais impregnada de tecnologia.

Esta porta de entrada faz da educação, e consequentemente da educação matemática, um caminho para a socialização do indivíduo. Diante desta necessidade de uma educação voltada para a emancipação do indivíduo, a educação matemática crítica traz "a expressão das preocupações sobre os papéis sociopolíticos que a educação matemática pode desempenhar na sociedade" (SKOVSMOSE, 2008, p.101)

A matemática deve proporcionar para aqueles que a dominam condições de exercer a sua cidadania, "não somente por permitir a leitura crítica do real, como também por desenvolver no educando formas de pensar úteis na percepção das possibilidades de transformação desta realidade" (KESSLER, 1998, p.3). Mas, segundo esta autora, a matemática também pode dificultar o acesso a essa cidadania, pois se para aquele que a detém, serve como caminho para a autonomia cidadã em contrapartida para aquele que não a domina ela atua como um filtro social, dificultando o exercício da cidadania ativa, colaborando com a construção de um cidadão passivo, à mercê de sua própria sorte.

Esta matemática que enfatiza a memorização, o manuseio de fórmulas e algoritmos na maioria das vezes desvinculados do cotidiano do aluno e que não estimula o desenvolvimento de competências que poderiam ajudar a desenvolver uma postura crítica diante da sociedade, está ainda muito presente na escola. A necessidade de se formar cidadãos cada vez mais atuantes exige repensar o papel da matemática e seu ensino:

> [...] o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL ,1998, p 22).

Segundo Kessler (1998) as competências básicas em matemática para o exercício de uma cidadania ativa não estão ligadas apenas a conhecimentos matemáticos, mas também a

> [...]formas de pensar e agir que possibilitam preparar o indivíduo para ser capaz, não só de estabelecer relações entre os resultados e o contexto, levando a um desvelamento do real, como também de captar as possibilidades de transformação deste real. (KESSLER, 1998, p. 3).

Dentre estas competências básicas Kessler (1998, p.7) destaca o pensamento combinatório, definindo-o como “sendo aquele que modela uma situação onde várias possibilidades levam a um determinado resultado”. Este pensamento é importante no contexto de uma educação voltada à cidadania, uma vez que é importante para o cidadão analisar uma série de possibilidades de respostas para uma determinada situação, permitindo assim a avaliação das possíveis soluções alternativas.

3.2 O pensamento combinatório na matemática escolar

Desenvolver o pensamento combinatório é desenvolver a capacidade de analisar situações, estabelecer padrões e identificar possibilidades. O trabalho com o pensamento combinatório é necessário e seu desenvolvimento, já nas séries iniciais, é muito importante pois o aluno é estimulado a desenvolver sua capacidade de raciocinar e tomar decisões.

> A resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. (BRASIL,1998, p. 136).

Trabalhar o desenvolvimento do raciocínio combinatório a partir das séries iniciais do Ensino Fundamental é também uma forma de incentivar os alunos na utilização das diferentes formas de representação (tabelas, esquemas, diagramas, escritas numéricas,...) como recurso para expressar idéias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados.

Borba e Pessoa (2009) evidenciam que mesmo não acontecendo um trabalho mais sistematizado com a *combinatória* nos anos iniciais, é possível desenvolver bem cedo o pensamento combinatório. O desenvolvimento ao qual se referem não necessariamente está ligado ao conhecimento das fórmulas, mas ao desenvolvimento de habilidades que proporcionem o levantamento, a organização e a escolha de possibilidades em problemas de contagem estimulados em situações cotidianas.

Apesar da percepção da importância de desenvolvimento nas séries iniciais, o pensamento combinatório não tem sido muito difundido nos livros didáticos. E, quando o conteúdo é mencionado, acaba não sendo explorado da forma devida, o que limita os alunos, como constatam Pessoa e Saraiva:

> Desta forma, torna-se necessária uma maior atenção dos autores/editores em relação ao número de problemas de raciocínio combinatório propostos em suas obras, visto que a construção de um conceito não emerge apenas de um tipo de situação, ou seja, é necessária a diversificação de situações para viabilizar a construção desse conceito. (PESSOA e SARAIVA 2006, p.14).

Pessoa e Saraiva (2006) destacam que, apesar de toda a orientação que é dada em relação à difusão do pensamento combinatório nas séries iniciais, os livros didáticos enfatizam os problemas que envolvem as demais estruturas multiplicativas com pouca ênfase nas estruturas multiplicativas relativas ao pensamento combinatório.

A discussão sobre a exploração do raciocínio combinatório nas séries iniciais se intensifica quando se trata do 2º ciclo do ensino fundamental. Notamos que nos PCNs, ao serem propostos os conteúdos do 2º ciclo do ensino fundamental, o raciocínio combinatório é apontado como uma forma de dar significado à multiplicação. Apresentar a multiplicação destacando sua relação com a adição de parcelas repetidas é apenas uma abordagem frequentemente utilizada, mas que por si só não é suficiente.

Há necessidade de explorar um campo mais amplo de significados da multiplicação, compreendendo situações que podem favorecer o entendimento das estruturas multiplicativas (BRASIL,1998). Estas situações podem ser divididas em três diferentes grupos.

No primeiro grupo estão as situações nas quais usamos a operação de multiplicação relacionada com a idéia de proporcionalidade, podendo ser denominada multiplicação comparativa. Exemplo: Em uma receita de bolo são utilizados três ovos assim para se fazer quatro bolos serão utilizados 12 ovos. Os problemas que envolvem essa idéia são muito frequentes nas situações cotidianas e, por isso, são mais bem compreendidos pelos alunos.

O segundo grupo envolve as situações associadas à adição de parcelas iguais. Exemplo: Num pequeno auditório, as cadeiras estão dispostas em 7 fileiras com 8 cadeiras cada uma, totalizando 56 cadeiras.

No terceiro grupo estão as situações associadas à idéia de combinatória. Exemplo: Tendo duas bermudas (uma preta (P) e uma branca (B)) e três blusas (uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C)), de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

No que se refere ao quarto ciclo do ensino fundamental, partindo do princípio que os alunos em ciclos anteriores já desenvolveram estratégias para resolver os problemas de contagem, é defendida a apresentação de problemas envolvendo valores maiores, de modo que percebam o princípio multiplicativo como recurso que auxilia a resolver mais facilmente muitas situações. (BRASIL,1998).

Ao tentar solucionar problemas de contagem, os alunos poderão aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Consequentemente poderão desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema do dia-a-dia, que dependem de formas sistematizadas de contar, passando a dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística.

No quarto ciclo do ensino fundamental é proposto também um trabalho abordando o tópico probabilidades, com a finalidade de levar os alunos a perceberem que, por meio de experimentações e simulações, podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para tanto, terão de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão.

Esta relação estreita de dependência entre combinatória e probabilidade é cada vez mais explorada.

> No trabalho com probabilidade é fundamental que os alunos compreendam o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis, utilizando-se do princípio multiplicativo e de representações como uma tabela de dupla entrada ou um diagrama de árvore. (BRASIL, 1998, p.137).

Nesta relação de dependência Roa e Navarro-Pelayo (2001) destacam que muitas dificuldades encontradas em probabilidade são decorrência do não desenvolvimento adequado das idéias matemáticas de análise combinatória.

Diante da necessidade de uma educação cada vez mais voltada para a formação de cidadãos conscientes e participativos, inseridos no mundo das informações e das novas tecnologias, o raciocínio combinatório é uma ferramenta de extrema importância e que por isso deve ser trabalhado desde as séries iniciais de forma a desenvolver nos alunos a capacidade de analisar, comparar e avaliar diferentes possibilidades e resultados.

3.3 A pesquisa sobre o pensamento combinatório

O conteúdo de Análise Combinatória assume uma posição de destaque dentro da Matemática discreta e, de forma geral, na formação dos indíviduos para uma sociedade que exige cada vez mais a capacidade de estabelecer relações, verificar regularidades, buscar alternativas, experimentar, organizar dados, sistematizar resultados, validar soluções, e outras características inerentes ao pensamento combinatório.

Devido à importância deste conteúdo e às dificuldades apresentadas por alunos e alguns professores, faz-se necessária a busca de subsídios que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, o qual está presente na grade curricular de escolas de Ensino Médio e até mesmo em algumas do Ensino

Fundamental. Na busca por alternativas, muitas pesquisas têm sido realizadas, elaborando propostas de Ensino de Análise Combinatória com vistas a minimizar ou superar as dificuldades para com o conteúdo.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo(1996), a análise combinatória deve ser evidenciada dentro da matemática discreta sendo necessário cada vez mais o seu desenvolvimento na matemática escolar. Estes autores evidenciam a necessidade deste conteúdo não ser simplesmente visto como uma ferramenta útil à probabilidade.

Kapur citado por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) destaca dentro do trabalho com o pensamento combinatório alguns motivos pelos quais se justifica o seu ensino na matemática escolar tais como o desenvolvimento da capacidade de enumerar, testar, generalizar e organizar informações; a aplicação em diferentes áreas como química, física, biologia e outras; a facilidade de ser explorado em diferentes níveis não dependendo de fórmulas e assim possibilitando aos alunos uma nova percepção da matemática; o favorecimento do estudo com entendimento de conceitos matemáticos como função, conjuntos e outros.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) explorando a relevância deste tema desenvolveram uma pesquisa na qual foi aplicado um questionário com 13 problemas para analisar a capacidade combinatória de 720 estudantes na faixa etária de 14-15 anos. Diante das dificuldades apresentadas pelos alunos os autores consideraram a existência de 11 tipos de erros entre os quais: o erro de ordem no qual os alunos não conseguem identificar a diferença entre arranjo e combinação; o erro de repetição quando o alunos se confundem com a possibilidade ou não de repetir os termos; o erro de enumeração não sistemática na qual o aluno, por tentativa e erro, tenta encontrar as possibilidades sem buscar um método que lhe permita o resultado direto; resposta intuitivas erradas nas quais o aluno apresenta um resultado sem nenhuma justificativa.

A dificuldade com problemas envolvendo o pensamento combinatório não é uma exclusividade dos alunos do ensino básico ou médio. Roa e Batanero (2001) realizaram um estudo sobre raciocinio combinatorio com alunos universitários do curso de licenciatura em matemática da Universidade de Granada na Espanha, aplicando o mesmo questionario proposto por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo(1996). Diante dos resultados encontrados os autores constataram que, em alguns casos, as dificuldades encontradas por estudantes universitarios coincidem com as dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio e, em alguns casos, até mesmo se mostram mais apronfundadas ou enraizadas no que se refere ao pensamento combinatório.

Diante destas dificuldades apresentadas e da importância do raciocínio combinatório na atividade escolar, pesquisadores e educadores tem buscado alternativas para seu ensino.

Pedrosa (2008) ao propor a introdução de conceitos de análise combinatória para crianças do primeiro ciclo do ensino fundamental salienta a importancia de dar às crianças a liberdade de buscarem estratégias para resolução de atividades. Esta “liberdade” proporciona o desenvolvimento do pensamento combinatório referente às capacidades de analisar, buscar padrões, organizar elementos, testar, fazer conjecturas, entre outros. Tais habilidades são cada vez mais importantes em uma sociedade como a nossa, na qual a matemática tem sido utilizada, frequentemente, para respaldar decisões, atestar imposições e conquistar “alianças”.

Pessoa e Borba (2007) em um estudo sobre estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório observaram que a escola tende a valorizar o formalismo matemático deixando de lado a capacidade dos alunos. Em muitos conteúdos, por exemplo a análise combinatória, é notável que os alunos possam utilizar os métodos informais de resolução, sem dominar as fórmulas. Ao analisar o desempenho e as estratégias de alunos da 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental na resolução de problemas combinatórios constataram que os alunos “desenvolvem interessantes estratégias que devem ser aproveitadas pela escola para ajudá-los a avançar na compreensão dos diversos tipos de problemas e no seu desenvolvimento conceitual” (PESSOA; BORBA, 2007, p.16).

Diante da necessidade de valorização da capacidade “criativa” que muitos alunos desenvolvem para resolver exercícios sem dominar as regras escolares Vargas (2009), ao apresentar o conteúdo de análise combinatória para alunos do 2º ano do ensino médio, destaca a importância de uma mudança de comportamento dos professores não mais como transmissores do conhecimento, mas através de uma postura investigativa, como mediadores da aprendizagem. Para isso Vargas (2009) desenvolveu e aplicou uma sequência didática na qual se propõe explorar atividades investigativas por meio de resolução de problemas que viessem “trazer os estudantes para uma postura de agente de sua aprendizagem” (VARGAS, 2009, p. 68).

Nesta sequência, Vargas (2009), além de salientar a importância das atividades investigativas também destacou a importância do momento de socialização das atividades, no qual os alunos, além de apresentarem suas respostas, compartilharam seus questionamentos que foram esclarecidos pelo professor/pesquisador de tal forma a explorar as diferentes possibilidades de soluções encontradas pelos estudantes.

Proporcionar aos alunos a oportunidade de socializar suas idéias é uma forma de envolvê-los no processo de construção do conhecimento. Ciente desta importância Frant, Castro e Lima (2001) exploram o pensamento combinatório e a importância da estratégia argumentativa dos alunos. Para as autoras é necessário promover na sala de aula o debate onde os alunos possam expor suas idéias não necessariamente através de uma simbologia matemática. Neste processo de expor suas soluções, ser questionado, rever suas interpretações, entre outros que são desenvolvidos pelo debate, o aluno produz conhecimento e desenvolve sua capacidade de interação e interlocução com o meio no qual está inserido.

Esteves (2001) em sua dissertação de mestrado, estudou os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em alunos do nono ano do ensino fundamental (antiga 8ª série). A autora salienta que atividades de análise combinatória que incentivam o aluno no comportamento de busca de hipóteses e que despertam o raciocínio são instrumentos importantes no processo de ensino aprendizagem à medida que envolvem esse aluno na construção do seu próprio conhecimento. Esteves (2001) através da aplicação e análise de uma sequência de atividades de análise combinatória que trabalham a contagem direta, o princípio multiplicativo e a diferença entre arranjo e combinação (sem a utilização de fórmulas) concluiu que é possível e desejável o desenvolvimento dos conceitos de análise combinatória ainda no ensino fundamental de forma significativa.

O trabalho com problemas que possam proporcionar a familiarização dos alunos com exercícios de contagem através de resoluções que não envolvam fórmulas também foi uma alternativa apresentada anteriormente por Sturm (1999). Ao propor uma sequência para introduzir o conteúdo de análise combinatória em uma turma de ensino médio, Sturm (1999) destaca a importância de uma fase inicial na qual os alunos se utilizam de recursos como enumeração sistemática e árvore de possibilidades. Sturm destaca a importância deste trabalho inicial :

> Passei a acreditar que o ensino combinatório deve se dar através de situações-problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação. (STURM, 1999, p.3).

Apesar de serem apresentadas diferentes possibilidades para o desenvolvimento dos conceitos de análise combinatória alguns autores enfatizam que não é uma exclusividade dos alunos a dificuldade com este conteúdo. Costa (2003) em sua dissertação de mestrado, na qual estuda as concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental, destaca que os professores estão bem amparados no que diz respeito a materiais de apoio (livros didáticos, parâmetros norteadores, proposta curricular,...) mas em sua maioria não conhecem o objeto matemático (Análise Combinatória) suficientemente para apresentá-lo aos seus alunos.

Ao constatar a dificuldade dos professores em relação ao conteúdo análise combinatória, Costa (2003) enumerou algumas destas dificuldades que coincidem com as dificuldades apresentadas por alunos, do ensino médio, destacadas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo(1996) tais como: a falta de um procedimento sistemático que permita o cálculo de todas as alternativas; respostas erradas sem nenhuma justificativa; a dificuldade em perceber a importância ou não da ordem dos termos nos exercícios de análise combinatória; o não uso da árvore de possibilidades ou sua construção inadequada.

As pesquisas desenvolvidas apontam a necessidade de repensar o ensino de análise combinatória. O trabalho exaustivo com fórmulas visando mecanizar o processo de resolução de situações combinatórias não proporciona o desenvolvimento do pensamento combinatório. Faz-se necessário dar liberdade aos alunos de resolverem os problemas explorando estratégias diferenciadas e diferentes formas de representação de suas idéias matemáticas.

À medida que estes alunos são incentivados a criar alternativas para chegarem aos resultados também é importante proporcionar momentos nos quais eles possam apresentar suas idéias e questionamentos tornando-os agentes participativos na construção de seus conhecimento.

Este pensamento combinatório tão importante para os alunos sendo trabalhado desde as séries iníciais favorece a atitude reflexiva podendo proporcionar aos educandos um ensino que valorize sua bagagem cognitiva e que seja mais próximo de sua realidade despertando seu interesse e envolvimento no processo ensino-aprendizagem.

3.4 Formas de representação matemática das idéias de análise combinatória

A matemática lida com objetos matemáticos que são objetos abstratos e que portanto não são diretamente percebidos. Para conhecer esses objetos é necessário representá-los, utilizando sinais gráficos.

Essa perspectiva sobre a natureza dos objetos matemáticos e sobre a representação desses objetos é a mesma para vários filósofos e matemáticos, entre eles Raymond Duval, um filósofo francês que juntamente com seus colaboradores tem estudado “os processos cognitivos e lingüísticos envolvidos nas inúmeras maneiras de se expressar as idéias matemáticas” (KALEFF, 2001, p. 1).

Duval (2003; 2009) explora o fato de que o objeto matemático por sua abstração necessita de uma mediação para se tornar acessível ao sujeito. Esta mediação acontece através da representação que, no caso da matemática, necessita de formas de representação além da linguagem natural, utilizando gráficos, diagramas, esquemas, expressões simbólicas (que constituem a linguagem algébrica), figuras geométricas... etc. Estas representações que utilizam uma linguagem constituída pelo emprego de regras de sinais (signos) são chamadas de representações semióticas.

Esta relação, representação/objeto, que proporciona o acesso ao objeto matemático se torna fundamental para dar sustentação ao estudo da matemática uma vez que “toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações” (MACHADO, 2003, p. 8).

Segundo Duval o estudo de matemática é importante porque pode contribuir para o desenvolvimento geral do aluno, de sua capacidade de raciocínio, de análise e de visualização. O ensino da matemática deve procurar possibilitar ao aluno a “capacidade de compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino”(DUVAL, 2003, p. 12).

A diferença que existe entre a atividade cognitiva em matemática e a que é exigida em outros domínios do conhecimento não está nos conceitos, uma vez que a conceituação é processo comum às ciências, mas no trabalho com as representações. Sendo assim Duval (2003) destaca duas características que fazem das representações semióticas este diferencial à medida que impulsionam o desenvolvimento do pensamento matemático.

A primeira está ligada à “importância primordial das representações semióticas”

(DUVAL, 2003, p. 12). Esta importância está associada ao desenvolvimento do pensamento matemático tendo como condição necessária o desenvolvimento das representações semióticas. Duval exemplifica esta importância citando a mudança do sistema de numeração grego/romano para o sistema de numeração decimal, que passou a oferecer maiores possibilidades para o desenvolvimento da matemática.

A segunda característica mencionada por Duval (2003, p.12) está na "grande variedade de representações semióticas utilizadas na matemática". Dominar estas diversas formas de representação é condição necessária para o desenvolvimento do pensamento matemático o que faz da atividade de representação um elo entre o sujeito e o conhecimento matemático.

O domínio da multiplicidade das representações semióticas não está somente em conhecer as diferentes representações, mas sim em saber relacioná-las. Duval (2003) destaca a dificuldade que os alunos têm para realizar a mudança de representação, como se o entendimento dos alunos sobre um determinado conteúdo ficasse restrito à representação utilizada. Esta dificuldade, segundo o autor está ligada ao fato de que não se pode pensar no conteúdo como se estivesse destacado da forma que o representa, pois apesar de serem diferentes, objeto e representação, estabelecem uma relação de dependência.

Como não podemos acessar diretamente os objetos matemáticos, que são abstratos, a forma de conhecê-los depende de se empregar mais de um tipo de representação desse objeto. Conforme Duval coloca "essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado" (2003, p.22).

Ao mencionar esta diversidade de representações semióticas utilizadas em matemática e a possibilidade de converter as representações produzidas em um sistema em representações de outro sistema se faz necessário explorar a idéia dos **registros de representação,** aos quais Duval (2009) associa o grau de liberdade de que um sujeito pode dispor para explorar e comunicar informações a um interlocutor. Segundo Kalef (2006, p.2) "Duval adota os registros de representação para particularizar as diferentes modalidades de representação semiótica que se pode atribuir ao objeto." Assim para Duval (2009) esse conjunto de registros de representação de um objeto matemático constitui um sistema de registros de representação.

Duval fala da diversificação dos registros de representação semiótica, da diferenciação entre representante e representado e da necessidade de coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica disponíveis[3]. Estes três fenômenos são estreitamente ligados e a produção de significado no trabalho com as representações depende da relação existente entre eles como destaca Duval:

> Nos sujeitos, uma representação pode verdadeiramente funcionar como representação [...] apenas quando duas condições são preenchidas: que eles disponham de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto [...] e que eles possa converter espontaneamente de um sistema semiótico a outro, mesmo sem perceber as representações produzidas. (DUVAL, 2009, p.38).

Ao mencionar a variedade de registros, Duval (2009) os classifica em dois grupos: os registros monofuncionais que apresentam algoritmos próprios em sua estrutura seja através de uma representação discursiva como o sistema de escrita numérica (binária, decimal, fracionária,...) e algébrica (expressões literais, equações) ou através de uma representação não-discursiva como os gráficos cartesianos (mudança de sistemas de coordenadas, interpolação, extrapolação) e os registros multifuncionais cujo tratamento não é algoritmizável seja na representação discursiva como a línguagem natural ou na representação não-discursiva como as figuras geométricas planas.

Em matemática há uma diversidade de registros de representação; a linguagem algébrica, as figuras geométricas, os gráficos cartesianos, as tabelas são sistemas de representação muito diferentes entre si e que apresentam especificidades próprias. Duval (2009) fala da diferenciação entre representante e representado ou forma e conteúdo de uma representação. Um objeto pode ser apresentado por diferentes representações, mas não ser confundido com elas. Assim, o objeto função por exemplo, pode ser representado de formas diferentes – representação gráfica, expressão algébrica, representação na forma de tabela – mas uma função não é uma tabela ou um gráfico ou uma expressão algébrica.

Duval fala na coordenação entre os diferentes registros de representação como uma condição necessária para a compreensão. Compreender o objeto matemático número exige integrar as diversas formas de representação desse objeto: 5; $\frac{20}{4}$; cinco; $10 \times 0{,}5$ são diferentes representações que se referem ao mesmo objeto matemático.

Duval (2009) afirma em sentido contrário a outros teóricos que a apreensão ou produção de uma representação semiótica por um indivíduo, ou seja, a “semiósis” é

---

[3] Consultar, por exemplo Kaleff (2004) para um maior detalhamento das relações entre os aspectos cognitivos e lingüísticos na aprendizagem matemática, segundo Duval.

imprescindível para a “noésis”, ou seja, para a ação cognitiva, por exemplo de apreensão conceitual do objeto. Por isso Duval afirma que não há “noésis” sem “semiósis”. Em particular a aprendizagem matemática acontece na medida em que os diversos registros de representação semiótica são coordenados, possibilitando a conceituação do objeto matemático.

Diante de uma situação problema e da necessidade de se utilizar os registros de representação, o aluno tem que estar atento à possibilidade de trocar de registro à medida que um registro possa se tornar mais eficiente do que o outro. Cada registro tem as suas limitações específicas, surgindo a necessidade da utilização de mais de um sistema de expressão e de representação. Assim uma situação problema em análise combinatória que pode ser resolvida em princípio através da enumeração de casos ou da utilização do diagrama de árvore, à medida que as variáveis aumentam (questão de generalização), demanda a sistematização do princípio fundamental da contagem, para simplesmente se trabalhar com a multiplicação de possibilidades. Existe, assim o problema da escolha entre vários registros de representação, daquele que pode facilitar os cálculos, tornando o conteúdo mais compreensível e, portanto, da importância do aluno conhecer os diferentes registros de representação. Segundo Duval (2003), de um ponto de vista pedagógico, procura-se o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos compreendam.

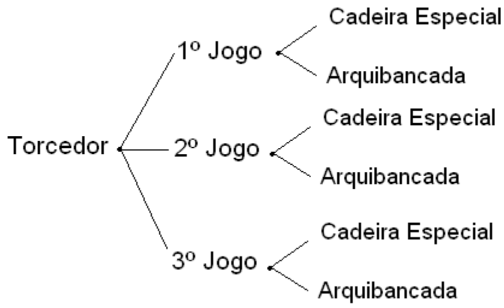
Duval (2003, 2009) trabalha com dois tipos de transformações das representações semióticas. O primeiro tipo de mudança é o *tratamento* onde a transformação da representação não implica em uma mudança de registro, por isso é dita “interna a um registro”. O segundo tipo de mudança é a *conversão* onde a transformação da representação implica na mudança de registro conservando a referência aos mesmos objetos, por essa razão é conhecida como uma transformação externa.

Vamos ilustrar essas operações a partir de situações problema sobre análise combinatória.

Exemplo 1:

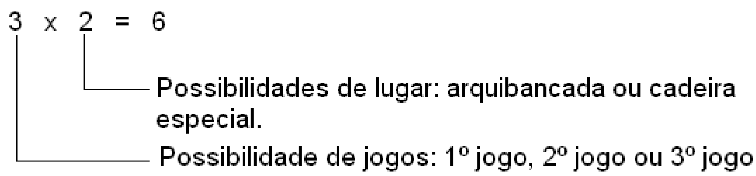
Um torcedor brasileiro resolve comprar um ingresso para assistir um dos três primeiros jogos da seleção brasileira na copa do mundo de futebol. Sabendo que existem dois tipos de ingresso, um para cadeira especial e outro para arquibancada, determine o número de possibilidades que este torcedor tem para comprar um único ingresso.

Dentre as diversas formas de representação que podem ser utilizadas neste exercício vamos destacar dois tipos de representação que envolvem registros diferentes. O primeiro tipo de representação é a representação figural conhecida como árvore de possibilidades.



Nesta representação os alunos podem perceber as seis possibilidades que o torcedor tem de comprar seu ingresso.

O segundo tipo de representação referido é o simbólico-numérico. Neste registro é utilizada a multiplicação das possibilidades como forma de se encontrar as soluções:

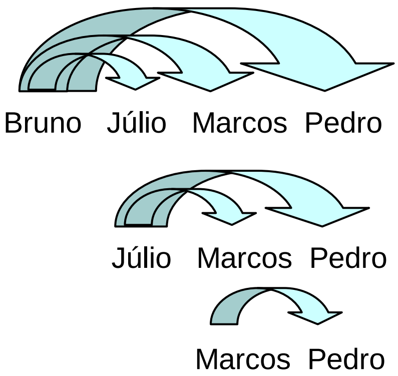


Podemos perceber a mudança de registro que acontece da primeira solução para a segunda caracterizando assim a conversão. Esta possibilidade de trabalhar diferentes registros de representação depende muito do tipo de raciocínio exigido no exercício. Por isso a necessidade de se dominar os diferentes registros, pois à medida que um se mostra mais adequado do que o outro é possível a conversão.

Exemplo 2:

Uma equipe de vôlei é composta por quatro atletas sendo eles Bruno, Pedro, Marcos e Julio. Se esta equipe for disputar uma competição e precisar inscrever uma dupla, quantas são suas opções?

Neste exercício, o problema é proposto na linguagem natural e a solução, como o número de pessoas é pequeno, pode ser feita no mesmo registro da linguagem natural caracterizando um tratamento. Assim o aluno pode optar pela *escrita das opções* e apresentar a resposta: Bruno e Pedro, Pedro e Marcos, Marcos e Julio, Julio e Bruno, Bruno e Marcos e Pedro e Júlio, num total de seis duplas. A escrita de opções pode, por outro lado ser feita de forma mais sistemática, partindo de um primeiro nome e compondo as possibilidades de duplas, obtendo: Bruno e Pedro, Bruno e Marcos, Bruno e Julio, Pedro e Marcos, Pedro e Julio, Marcos e Julio. Nessa busca de uma melhor forma de representação de suas idéias o aluno pode ser incentivado a experimentar novas formas de representar como:



A representação figural esquemática adotada pode facilitar a compreensão e a solução do problema.

No Exemplo 2, se tivéssemos um aumento no número de atletas, a utilização da linguagem natural tornaria o cálculo das opções uma alternativa muito mais cansativa e sujeita a erros sendo recomendada uma mudança de representação para se efetuar o cálculo das opções.

Consideramos assim, um terceiro exemplo.

Exemplo 3:

Uma equipe de vôlei é composta por 12 atletas. Esta equipe vai disputar uma competição e precisa inscrever uma dupla, quantas são suas opções?

É desejável que para a solução do problema o aluno já seja capaz de trabalhar com o registro algébrico, empregando com significado a fórmula de combinação simples, e utilizá-la para calcular a combinação de 12 (atletas) tomados 2 a 2 e escrever:

$$C_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)!2!}$$

As operações de tratamento dentro do registro conduzem a simplificações e

$$C_{12,\,2} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12.11}{2.1} = 66$$

Assim, as possibilidades de montagem das duplas são ao todo 66.

Neste exemplo o problema, proposto na linguagem natural é interpretado e resolvido através da linguagem algébrica. Essa troca que exige a *conversão* de um registro a outro não é imediata, a menos que ao enunciado dado, o aluno seja capaz de relacionar a operação de combinação simples e a fórmula matemática associada a essa operação.

É possível que num primeiro momento o aluno faça a opção de simplesmente usar o princípio multiplicativo para obter 12 x 11= 132 possibilidades e depois dividir por dois ($\frac{132}{2} = 66$ duplas) pelo fato de inicialmente cada dupla ter sido contada duas vezes (Pedro e Paulo e Paulo e Pedro). Essa solução, não lança mão do registro algébrico formal, a fórmula algébrica de combinação; propõe uma conversão ao utilizar o registro simbólico-numérico, para a resolução do problema proposto e a seguir operações de tratamento (no mesmo registro numérico) para chegar à resposta. A solução, justamente pelo fato de não lançar mão da fórmula matemática, pode ser mais adequada, num trabalho desenvolvido junto a alunos do ensino fundamental, ao se introduzir as idéias de combinação simples.

A transformação por conversão de registros envolve o fato de que os alunos não conseguem a princípio perceber o mesmo objeto explorado em mais de uma representação. Para trabalhar a conversão o aluno deve saber transitar entre os diversos tipos de registros associando e aprimorando a relação conhecimento e representação.

A dificuldade da conversão de representações está ligada diretamente com aquilo que Duval (2009) classifica como "**congruência**" das representações e " **não congruência**" das representações. Para Duval:

> O procedimento de correspondência de duas representações pertencentes a registros diferentes pode ser estabelecido localmente por uma correspondência associativa das unidades significantes elementares constitutivas de cada um dos dois registros. (DUVAL, 2009, p.64).

Se existe a correspondência termo a termo entre as unidades significativas respectivas estamos tratando da congruência entre duas representações, porém quando não existe esta correspondência entre as representações falamos de não congruência. Os dois casos citados podem ser exemplificados.

1º caso:

" O conjunto dos números naturais múltiplos de 2" $\rightarrow \{x \in N / x = 2n \text{ e } n \in N\}$.

Neste caso se fala em congruência, pois existe uma correspondência termo a termo e a conversão inversa permite encontrar a expressão inicial do registro de partida. Se $x \in N$, então estamos falando de um subconjunto dos números naturais. Como $x = 2n$

então x é múltiplo de dois logo {x Є N/ x = 2n e n Є N} implica em “O conjunto dos números naturais múltiplos de 2”.

O 2º caso é apresentado por Duval (2009, p.65) através do exemplo: “O conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal. → x.y > 0”.

Neste caso não existe correspondência termo a termo, uma vez que a expressão “x.y > 0” pode assumir um significado diferente da expressão apresentada no exercício como, por exemplo, “a abscissa e a ordena tem o mesmo sinal”. Temos assim um caso de não congruência, pois a conversão inversa não permite encontrar a expressão inicial.

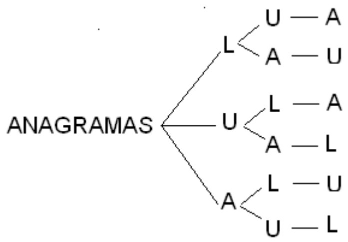
No caso da análise combinatória a congruência entre os registros de representação nem sempre é tão perceptível o que aumenta a dificuldade no trabalho com a conversão. Isto fica evidente em alguns exercícios em que o aumento do número de variáveis induz a uma mudança de registro. Nestes exercícios o aluno, pela não congruência dos registros, se coloca segundo Duval (2009, p. 21) “como que em um enclausuramento de registro.” sujeitando-se ao erro.

Para exemplificar esta situação analisemos um exercício no qual se deseja calcular a quantidade de anagramas de duas palavras sendo a primeira, com uma quantidade menor de letras e a segunda com uma quantidade maior. Tomemos primeiramente a palavra LUA.

Para resolver este exercício muitos alunos se utilizam da linguagem natural por ser mais comum a eles. Assim são escritas todas as opções para determinar a quantidade de anagramas: LUA, LAU, ULA, UAL, ALU e AUL totalizando 6 opções.

Outra forma de resolver este exercício seria utilizando a representação simbólico-numérica na qual se multiplica as possibilidades de cada letra 3 x 2 x 1 = 6 opções.

Aparentemente, devido à não congruência, estes registros se mostram muito diferentes um do outro. Esta diferença é minimizada com a utilização de outros registros como, por exemplo, a árvore de possibilidades:



Podemos perceber nesta representação sua relação com a linguagem natural através das palavras formadas nas ligações entre as letras. Da mesma forma, podemos perceber sua relação com a representação simbólico-numérica sendo que a quantidade de opções está estabelecida na quantidade de galhos começando com três depois dois e por fim um galho.

Assim a árvore de possibilidades, neste exemplo, pode ser uma forma para que o aluno compreenda a conversão do registro natural de linguagem para o registro simbólico-numérico. A importância da compreensão dos vários tipos de representação entendendo os processos de conversão de um registro a outro é imprescindível para a resolução de problemas envolvendo situações de anagramas com o aumento do número de letras, por exemplo, no calculo dos anagramas da palavra BURACO.

Através da linguagem simbólico-numérica, multiplicando-se as possibilidades, conseguimos calcular facilmente a solução sendo 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720 anagramas. Porém, a escrita das opções, linguagem natural, fica inviável pela quantidade de anagramas.

A não congruência existente na conversão do registro da linguagem natural para a linguagem simbólico-numérica, como em outros registros, aumenta o grau de dificuldade do exercício, pois com o aumento das variáveis aqueles alunos que não conseguem trabalhar a conversão se limitam a um determinado tipo de registro e assim ficam vulneráveis ao erro.

Esta troca de registro que por um lado pode tornar o conteúdo mais difícil para alguns alunos pode proporcionar a outros a real compreensão do conteúdo. Duval (2003) destaca dois pontos de vista que abordam de forma diferenciada a mudança de registro (conversão). Por um lado o ponto de vista matemático trata a conversão como forma de se atingir o objetivo de forma mais rápida sem nenhuma participação nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois estes acontecem baseados em um tratamento efetuado sobre um determinado registro. Por outro lado o ponto de vista cognitivo em que a conversão conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Assim Duval (2009) enfatiza a necessidade da utilização da conversão em detrimento ao tratamento, pois enquanto o tratamento limita o sujeito por acontecer no interior de um único registro a conversão requer o conhecimento e a coordenação entre diferentes registros. Duval destaca que “esta questão da coordenação dos registros e os fatores suscetíveis de favorecer esta coordenação aparecem então como questões centrais para as aprendizagens intelectuais” (DUVAL, 2009, p.39).

Embora não seja utilizada essa linguagem de registros de representação, os

PCNs valorizam a operação de conversão à medida que apontam a necessidade de utilização das diferentes representações. Como um dos critérios de avaliação para o ensino fundamental espera-se perceber no aluno a capacidade de resolver problemas de contagem e indicar as possibilidades de ocorrer determinado evento, utilizando mais de uma forma de representação das idéias matemáticas.

> [...]o professor verifica se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem que possibilitem obter o número de agrupamentos, utilizando procedimentos diversos, como a construção de diagramas de árvore, tabelas, gráficos, etc.(BRASIL ,1998, p.77).

O trabalho com as diversas formas de representação semiótica associadas ao raciocínio combinatório explorado no ensino fundamental pode proporcionar ao aluno uma habilidade maior de utilização de diversos registros algébricos, figurais, além da linguagem natural que são úteis para se trabalhar com a informação de tal forma a interpretá-la e explorá-la consolidando o processo de aprendizagem matemática.

A proposta de abordagem do raciocínio combinatório no ensino fundamental, aqui apresentada tem como meta incentivar o uso dos diferentes registros de representação, na construção das idéias de análise combinatória simples. Para isso utilizamos os métodos de inquirição como estratégias de ensino e aprendizagem.

3.5 A investigação e o desenvolvimento do pensamento combinatório

Ponte (2003) destaca que tradicionalmente ensino e investigação são vistos como atividades distintas e que não podem ser trabalhadas de forma conjunta sem que uma não comprometa o desenvolvimento da outra. Para Ponte a idéia de investigação traz consigo a idéia de conhecimento, pois a atividade de investigar "não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos." (PONTE, 2003, p. 27).

A atividade investigativa em matemática, como afirma Frota (2005), possibilita uma abordagem mais dinâmica da aula na qual o aluno passa a ter um papel importante como "coadjuvante" na construção do conhecimento.

> Práticas investigativas introduzidas na sala de aula de matemática parecem ser cruciais para o desenvolvimento de uma postura especulativa em matemática, podendo gerar também, um deslocamento do foco da aula, do professor para o aluno, no sentido de uma aula mais colaborativa. (FROTA, 2005, p.2).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que estas práticas investigativas em matemática se desenvolvem em torno de situações problemas nas quais o primeiro grande passo é identificar claramente o problema a resolver. Estes autores enfatizam que na busca pela solução do problema se desenvolve a postura especulativa, citada por Frota (2005), podendo ser feitas outras descobertas que, para o processo ensino-aprendizagem, se tornam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Assim segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) é perceptível e extremamente importante, em matemática, a relação estreita que existe entre problemas e investigações.

A resolução de problemas é ponto de partida da atividade matemática. Nos PCNs é destacada a importância de se trabalhar a partir da proposição de problemas.

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL,1998, p. 40).

O trabalho com a resolução de problemas compreende quatro etapas segundo Polya (1995). A primeira fase é a *compreensão do problema* e está subdividida em duas etapas: a primeira é a *familiarização*, em que é feita uma leitura preliminar para visualizar o problema como um todo; a segunda etapa consiste no *aperfeiçoamento da compreensão* através de uma leitura detalhada e atenta, em que se procura identificar os dados, a incógnita e tudo aquilo que o problema traz consigo, organizando as informações e, se for possível, estabelecendo relações entre elas.

A segunda fase, de acordo com Polya (1995), é o *estabelecimento de um plano.* Para esta fase é necessário algum conhecimento sobre o assunto abordado, para que se possam estabelecer relações e procurar problemas anteriores que possam estar relacionados com o problema em questão. Caso não se encontrem problemas correlatos, é necessário tentar reformular (variar, transformar, modificar,...) o problema.

Após o estabelecimento de um plano é necessário executá-lo. Aqui se dá a terceira fase, quando se coloca o plano em prática o que, segundo Polya (1995), pode ser mais fácil, uma vez que se trata de executar o que foi planejado. Nesta fase cada passo deve ser realizado de forma detalhada, verificando-se cada operação algébrica e geométrica e assim certificando-se da correção dos passos.

A quarta e última fase é o *retrospecto*, quando o aluno tem a oportunidade de refletir sobre as etapas desenvolvidas, reconsiderando e re-examinando o resultado encontrado, bem como todo o processo que o levou até este resultado. Esta fase proporciona ao aluno a consolidação do conhecimento e o aperfeiçoamento da sua capacidade de resolver problemas. Nesta fase, orientado pelo professor o aluno tem a possibilidade de perceber que a resolução de um problema não se limita a um único caminho expandido suas estratégias para lidar com as questões matemáticas.

Para Polya (1995) o papel do professor no trabalho com a resolução de problemas é muito importante. O professor precisa estar presente e auxiliar os seus alunos. Este auxílio precisa impulsionar o aluno no trabalho independente, valorizando a experimentação, a análise, a verificação, de forma que o aluno possa aos poucos construir as idéias sobre cada tópico matemático.

Trabalhar com a resolução de problemas demanda uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado; a solução não está explicita, mas é possível construí-la. A necessidade de desenvolver habilidades que permitam levantar conjecturas, provar os resultados, testar seus efeitos e comparar os diferentes caminhos para obter a solução tiram o foco da importância da resposta correta e a transferem para o processo de resolução.

Ernest (1996) fala em pedagogia de inquirição buscando caracterizar os métodos de inquirição que categoriza como descoberta guiada, resolução de problemas e abordagem investigativa. Na categorização, Ernest (1996) apresenta os papeis dos professores e alunos como forma de diferenciá-las. Na descoberta guiada o professor formula o problema com o objetivo em mente cabendo ao aluno seguir as orientações. Na resolução de problemas o professor também formula o problema, porém deixa o método de solução em aberto possibilitando ao aluno escolher o seu próprio caminho. Na abordagem investigativa o professor escolhe uma situação de partida cabendo aos alunos definirem seus próprios problemas e resolvê-los.

Frota destaca a importância da utilização destes métodos baseados na inquirição ao propor que “a introdução de uma pedagogia de inquirição passa por romper com uma série de concepções e valores atribuídos a: matemática, ensinar e aprender matemática, papel do professor e da escola". (FROTA, 2005, p.3).

Ponte (2003) afirma que dúvidas e questionamentos surgem mediante a necessidade da utilização destes métodos de inquirição em sala de aula. Este autor evidencia três etapas fundamentais a serem exploradas em uma atividade investigativa a ser desenvolvida em uma aula ou em um conjunto de aulas.

A primeira fase é a apresentação da atividade pelo professor. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) enfatizam que mesmo sendo breve, esta etapa é fundamental para o resto da atividade. Nesta fase, denominada arranque da aula, Ponte afirma que o professor deve garantir que todos os alunos compreendam o sentido da tarefa tornando-a "fundamental para que o aluno entenda qual é a atitude que o professor espera dele nessas aulas." (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.28).

A segunda fase é o desenvolvimento do trabalho. Nesta fase, individualmente ou em grupos, os alunos devem se concentrar em resolver as situações problemas propostas. Neste momento a intenção é que os alunos desenvolvam os processos que caracterizam a atividade investigativa como a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas, a justificação de conjecturas entre outras.

A terceira fase é a discussão dos resultados na qual são socializadas as soluções encontradas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que as atividades investigativas proporcionam boas aulas de discussão nas quais os alunos podem confrontar suas conjecturas cabendo ao professor o papel de mediador. Esses autores apontam alguns aspectos positivos que podem ser evidenciados nesta fase:

> A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.41).

O desenvolvimento destas fases e o sucesso da atividade matemática envolvida dependem muito da participação do professor, pois esse exerce um papel determinante nas aulas de investigação. O professor diante do desenvolvimento do trabalho dos alunos deve por um lado lhes proporcionar "a autonomia para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos seja significativo do ponto de vista da disciplina matemática" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.47). Desta forma, a postura do professor nestas atividades se destoa da atitude requerida em outros tipos de aula o que representa um desafio à sua prática, mas que se traduz, segundo Ponte (2003), em momentos de realização profissional.

A proposta aqui apresentada, de introdução ao pensamento combinatório com alunos do 9º ano do ensino fundamental, é a tentativa de uma abordagem fundamentada na pedagogia da inquirição, propondo situações problema e incentivando o uso de diferentes formas de representação em matemática. Através de aulas que se inspiram nos métodos de inquirição (ERNEST, 1996) esta proposta é uma estratégia para que os alunos possam desenvolver uma visão diferenciada da análise combinatória, como um conteúdo mais próximo de sua realidade e explorado através da multiplicidade de registros de representação.

4 A ANÁLISE COMBINATÓRIA EM TEXTOS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

O livro didático ocupa um lugar de destaque no processo de ensino aprendizagem, consistindo em um recurso auxiliar e importante na condução do trabalho didático. O texto didático torna-se um interlocutor, um instrumento de diálogo com o professor e com o aluno, na medida em que apresenta não apenas os conteúdos matemáticos, mas uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de se conseguir aprendê-lo mais eficazmente. Em outras palavras o livro didático expressa uma concepção de matemática e do que é aprender matemática.

Ao se propor a introdução do pensamento combinatório no ensino fundamental não se pode desprezar o fato de que o discurso de muitos professores pode transparecer uma certa insegurança para ministrar este conteúdo, uma vez que a formação de alguns professores pode ter deixado a desejar no que se refere à construção do pensamento combinatório, muitas vezes trabalhado sem uma sistematização do assunto, conforme destacado, por exemplo em Costa (2003). Entendemos que o livro didático desempenha um importante papel de fornecer ao professor instrumentos teóricos (que precisam ser complementados) e metodológicos para o ensino desse conteúdo.

Diante da proposta de trabalharmos o pensamento combinatório no 9º ano (antiga 8ª série) do ensino fundamental através da introdução de idéias relacionadas às operações de arranjo, combinação e permutação, julgamos importante uma análise de como esse conteúdo é abordado em algumas coleções de livros didáticos do ensino fundamental.

Procedemos a uma análise da abordagem de tal conteúdo em alguns livros do ensino fundamental a partir das seguintes categorias:

- forma como o conteúdo é introduzido;
- conceitos de análise combinatória explorados nas atividades propostas;
- formas de registros de representação utilizados (diagramas, tabelas, árvores de possibilidades,...).

As coleções analisadas foram:

- Tudo é Matemática- 6º a 9° ano – Luiz Roberto Dante – Editora Ática – São Paulo, 2008.

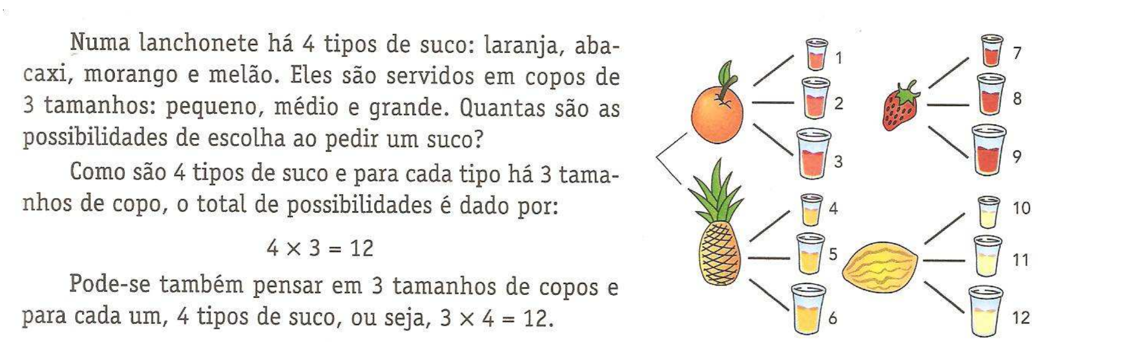
- Novo Praticando Matemática - 6º a 9° ano – Álvaro Andrini, Maria J. Vasconcellos – Editora do Brasil, 2006.
- Matemática Fazendo a Diferença – 6º a 9° ano – José R. Bonjorno, Regina A. Bonjorno, Ayrton Olivares – FTD – São Paulo, 2006.
- Matemática para todos – 5ª a 8ª série – Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis - Editora do Brasil – São Paulo, 2007.

As coleções escolhidas foram ou estão sendo utilizadas nas escolas que o pesquisador trabalha, incluindo a escola na qual foi desenvolvida a pesquisa. O programa nacional do livro didático (PNLD), que tem como objetivo auxiliar o professor na escolha de livros de qualidade, relaciona dentre as 16 coleções recomendadas em 2008, as quatro coleções que foram analisadas nesta pesquisa.

4.1 Análise da 1ª Coleção - *Tudo é Matemática*

O livro traz no Capítulo 2 do livro do 6° ano, o conteúdo "Operações fundamentais com números naturais". Ao introduzir a Multiplicação o autor apresenta algumas idéias associadas à multiplicação e uma delas é o *cálculo do número de possibilidades* ou *combinações possíveis*.

Neste livro, o conteúdo é apresentado através de um exemplo que desenvolve o princípio multiplicativo e que se utiliza de uma representação figural.


Numa lanchonete há 4 tipos de suco: laranja, abacaxi, morango e melão. Eles são servidos em copos de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande. Quantas são as possibilidades de escolha ao pedir um suco?

Como são 4 tipos de suco e para cada tipo há 3 tamanhos de copo, o total de possibilidades é dado por:

$$4 \times 3 = 12$$

Pode-se também pensar em 3 tamanhos de copos e para cada um, 4 tipos de suco, ou seja, $3 \times 4 = 12$.

Figura 1: Extraída de Dante (2008) - Tudo é matemática, 6º ano, p. 41.

Após a apresentação deste exemplo é proposta uma atividade, que explora ainda a mesma situação do exemplo. Embora o enunciado não retome a pergunta do exemplo o autor pretende que o aluno complete uma tabela, utilizando então outra forma de representação das idéias matemáticas (figura 2). Uma segunda atividade propõe a ampliação dos dados dispostos no exercício anterior de tal forma que o aluno utilize a representação simbólico-numérica como alternativa para encontrar a resposta.

Atividades e problemas

39 Complete a tabela, que apresenta 4 tipos de suco e 3 tamanhos de copos.

	Pequeno	Médio	Grande
Laranja	laranja pequeno		
Abacaxi			abacaxi grande
Morango			
Melão		melão médio	

Figura 2: Extraída de Dante (2008) - Tudo é matemática, 6º ano, p. 41.

O conteúdo volta a ser trabalhado somente no livro do 9º ano. No capitulo 10 intitulado “Noções de Estatística e Probabilidade” ao apresentar o conteúdo “noções de probabilidade” trabalha-se o pensamento combinatório através do cálculo das possibilidades de ocorrência de um determinado evento.

Neste capitulo vemos o cálculo de permutações sendo desenvolvido em dois exercícios clássicos. O primeiro envolve a formação de números com algarismos distintos. Apesar de priorizar o cálculo das probabilidades, o exercício pede que o aluno “forme” todos os números de três algarismos distintos. Sendo assim o aluno não é incentivado a calcular as possibilidades pelo princípio multiplicativo ($\underline{3} . \underline{2} . \underline{1} = 6$) mas sim pela escrita das opções (123, 132, 213, 231, 312 e 321). O segundo exercício, na figura 3, envolve anagramas (anagrama é definido pelo autor como diferentes posições das letras em uma palavra).

Veja alguns anagramas com a palavra AMOR: AMOR, ROMA, MORA, OMAR

Escreva todos os anagramas da palavra AMOR e responda:

a) Quantos são os anagramas formados?

b) Quantos terminam em vogal?

c) Sorteando ao acaso, qual a probabilidade de um desses anagramas terminar em vogal?

d) Sorteando ao acaso, qual a probabilidade de um desses anagramas começar e terminar em consoante?

Figura 3: Extraída de Dante (2008) - Tudo é matemática, 9º ano, p. 283.

No exercício de anagramas, o autor trabalha com a enumeração das possibilidades, propondo a utilização da linguagem natural, registro em que o exercício é proposto. Não é feita a ligação da solução obtida, incentivando, por exemplo, o aluno a determinar o número de possibilidades, usando o princípio multiplicativo.

Nesta coleção o autor apresenta idéias relativas ao pensamento combinatório em dois momentos: o primeiro como uma idéia associada à multiplicação ainda no 6º ano e o outro na introdução do conteúdo de probabilidade. Nestas duas abordagens o autor não apresenta um texto explicativo localizando o exercício dentro do contexto do pensamento combinatório e também não faz distinção entre os diferentes tipos de agrupamentos que são feitos - permutação, arranjo e combinação- na resolução dos problemas.

No manual do professor não são encontradas informações ou sugestões sobre este tema embora o autor enfatize a importância do raciocínio combinatório como um dos objetivos do ensino de matemática à medida que desperta no aluno a capacidade de analisar quais e quantas são as possibilidades de algo ocorrer.

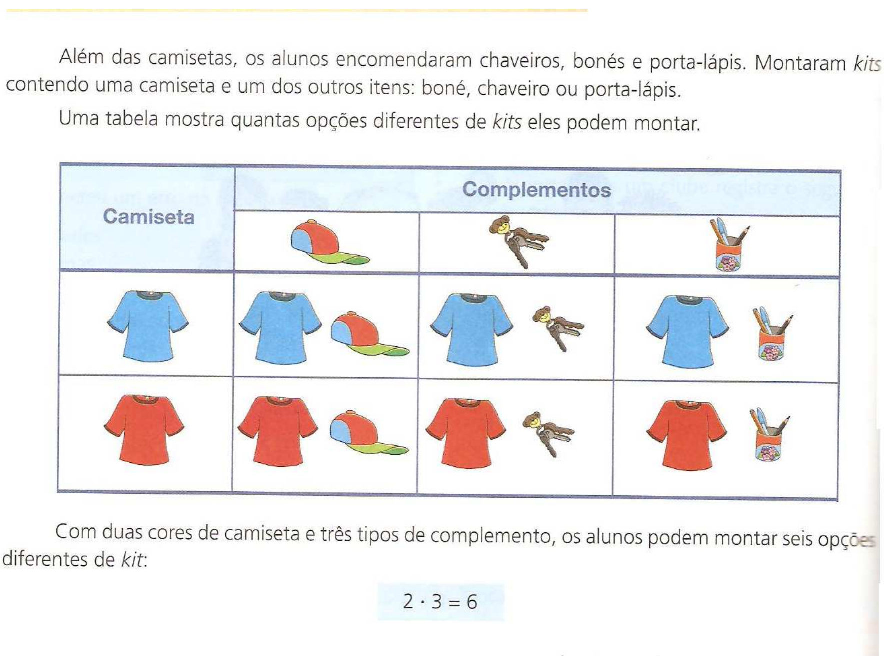
São apresentados poucos problemas, quatro no total, que exploram diferentes tipos de representação como a tabela e representação figural. As transformações de representações não são muito exploradas pelo fato de que os exercícios privilegiam a observação das possibilidades e sua contagem acontece, em muitas vezes através da escrita das opções.

No 1º exemplo, apresentado no livro do 6º ano, o autor explora a conversão de um registro de representação para outro quando apresenta a multiplicação de possibilidades associada a uma representação figural como forma de resolvê-lo, o que não volta a acontecer em momentos posteriores e nem é sugerido, por exemplo, quando o assunto é novamente abordado no livro do 9º ano.

4.2 Análise da 2ª Coleção - Novo Praticando Matemática

Ao introduzir o conteúdo “Multiplicação e divisão de números naturais” no volume 1 (referente a 6º ano) o autor apresenta um tópico chamado “ As idéias da multiplicação” no qual apresenta a multiplicação não apenas como um registro de adição de parcelas iguais (3 + 3 + 3 = 3 x 3 = 9) mas também a apresenta aplicada a contagem de possibilidades. Esta *contagem de possibilidades* está associada ao pensamento combinatório.

O conteúdo é apresentado por meio de um exemplo que é resolvido de duas maneiras: usando a representação por meio de tabela e diretamente, pela multiplicação de possibilidades.



Além das camisetas, os alunos encomendaram chaveiros, bonés e porta-lápis. Montaram *kits* contendo uma camiseta e um dos outros itens: boné, chaveiro ou porta-lápis.

Uma tabela mostra quantas opções diferentes de *kits* eles podem montar.

Camiseta	Complementos		

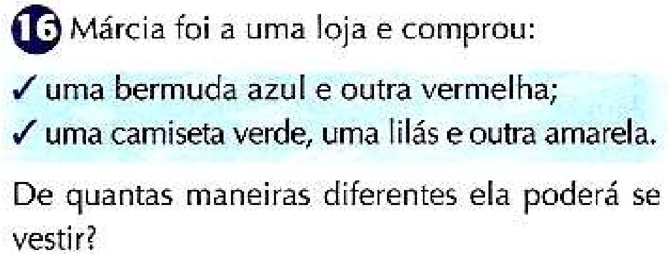
Com duas cores de camiseta e três tipos de complemento, os alunos podem montar seis opções diferentes de *kit*:

$2 \cdot 3 = 6$

Figura 4: Extraída de Andrini e Vasconcelos (2006) - Novo Praticando Matemática, 6º ano, p.50.

Ao apresentar o exemplo da Figura 4 os autores trabalham com a ampliação do número de opções passando para três cores de camisetas e quatro tipos diferentes de complementos para que os alunos possam responder. Pela resposta apresentada os autores esperam que os alunos trabalhem a multiplicação das possibilidades encontrando 3 x 4 = 12 Kits.

Após a apresentação do conteúdo são propostos alguns exercícios dentre eles dois que estão relacionados com o conteúdo em questão. Nestes exercícios, segundo a resolução apresentada pelos autores, espera-se que os alunos trabalhem com a multiplicação das possibilidades (figura 5) ao invés de escrever as possibilidades.


16 Márcia foi a uma loja e comprou:

✓ uma bermuda azul e outra vermelha;
✓ uma camiseta verde, uma lilás e outra amarela.

De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir?

Figura 5: Extraída de Andrini e Vasconcelos (2006) - Novo Praticando Matemática, 6º ano, p.50.

Nos volumes 2 e 3 (referentes ao 7 e 8º ano) desta mesma coleção o conteúdo não é explorado. No volume quatro (referente ao 9º ano), trabalha-se o tema "noções de probabilidade" no quarto capítulo. Neste capítulo, ao propor o cálculo da probabilidade como a divisão entre as possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades, são apresentados exemplos e exercícios que envolvem o pensamento combinatório.

Ao expor um exercício no qual se calculam as possibilidades sobre o lançamento de uma determinada moeda, o livro apresenta o cálculo através da árvore das possibilidades representado na Figura 6:

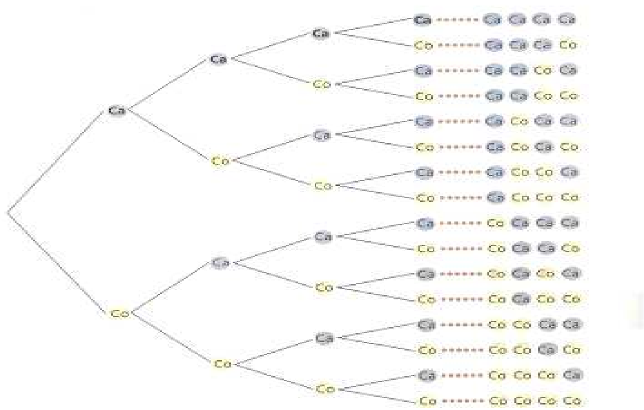


Figura 6: Extraída de Andrini e Vasconcelos (2006) - Novo Praticando Matemática, 6º ano, p.118.

No final do exemplo os autores apresentam o principio multiplicativo como uma alternativa mais rápida e fácil para o cálculo das 16 possibilidades encontradas.

São 16 resultados possíveis.

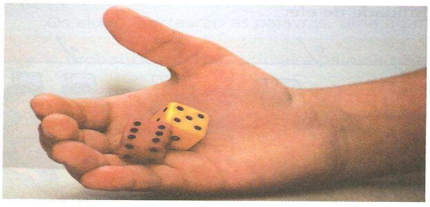
Se você lembrar do princípio multiplicativo, economizará tempo:

Para cada lançamento há duas possibilidades: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ possibilidades no total.

Figura 7: Extraída de Andrini e Vasconcelos (2006) - Novo Praticando Matemática, 6º ano, p.118.

Entre os exercícios propostos, três trabalham a idéia de análise combinatória. O primeiro exercício propõe o lançamento de dois dados no qual é sugerida a utilização de uma tabela (figura 8) para ajudar na contagem das possibilidades. No segundo exercício calculam-se as possibilidades que um casal tem ao planejar ter dois filhos. Neste exercício não é proposta nenhuma forma para se calcular as possibilidades, ficando a cargo do aluno. O terceiro exercício em questão está associado ao exemplo dado na explicação do conteúdo que trabalha o lançamento de moedas.

7 Dois dados de cores diferentes são lançados, e é observada a soma dos pontos das faces superiores.



a) Qual é a soma de pontos que tem mais probabilidade de acontecer?

b) Qual é a soma de pontos que tem menos probabilidade de acontecer?

c) Determine a probabilidade de se obter a soma de pontos igual a 5.

d) Determine a probabilidade de se obterem números iguais nas duas faces.

Sugestão: Elabore em seu caderno uma tabela como a seguinte.

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Figura 8: Extraída de Andrini e Vasconcelos (2006) - Novo Praticando Matemática, 6º ano, p.122.

Como na coleção anterior o raciocínio combinatório é explorado em dois momentos sendo o primeiro no 6º ano associado à idéia de multiplicação e depois no 9º ano associado ao conteúdo de probabilidade.

Os autores desta coleção exploram as diferentes formas de representação como árvore de possibilidades, tabela e representação simbólico-numérica (multiplicação de possibilidades). Em poucos casos, como nas figuras 6 e 7, estas representações são confrontadas e a conversão de um registro em outro é apresentada como possibilidade para facilitar os cálculos.

A apresentação do conteúdo, tanto no 6º como no 9º ano, acontece através de exemplos resolvidos sem uma abordagem teórica que ressalte o pensamento combinatório como é mencionado pelos autores ao enfatizarem, no livro do 9º ano, que "por meio de problemas, pretende-se desenvolver o raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo." (ANDRINI E VASCONCELOS, 2006, p. 12). Como na coleção anterior não são apresentados exercícios que envolvam os diferentes tipos de cálculo (arranjo, permutação e combinação) utilizados em exercícios de contagem.

4.3 Análise da 3ª Coleção - Matemática Fazendo a Diferença

Esta coleção explora bastante o princípio multiplicativo no 3° e 4° ciclos do ensino fundamental. Como nas coleções anteriores, este livro apresenta os primeiros exercícios de pensamento combinatório relacionados ao conteúdo de multiplicação no livro do 6° ano (antiga 5ª série). No terceiro capítulo intitulado "Multiplicação" são apresentadas as idéias com as quais a multiplicação está relacionada: Adição de parcelas iguais, proporcionalidade e combinação. A combinação explora o princípio multiplicativo destacado nesta pesquisa.

Após a distinção e apresentação rápida das idéias associadas à multiplicação, dentre elas a combinação, são apresentados alguns exercícios resolvidos. Entre estes exercícios, um se destaca (figura 9) como possibilidade de desenvolver o pensamento combinatório, não só pela idéia trabalhada, mas pela resolução apresentada pelos autores.

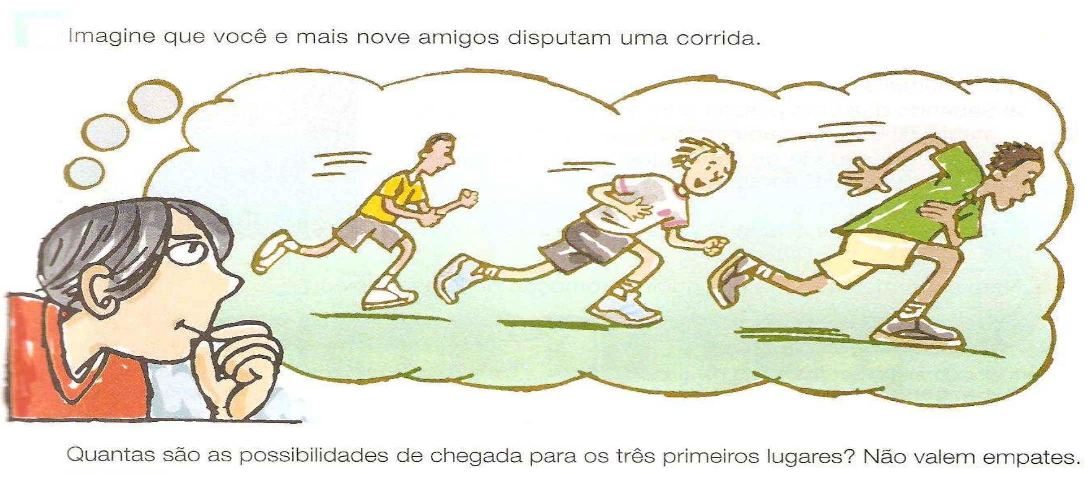


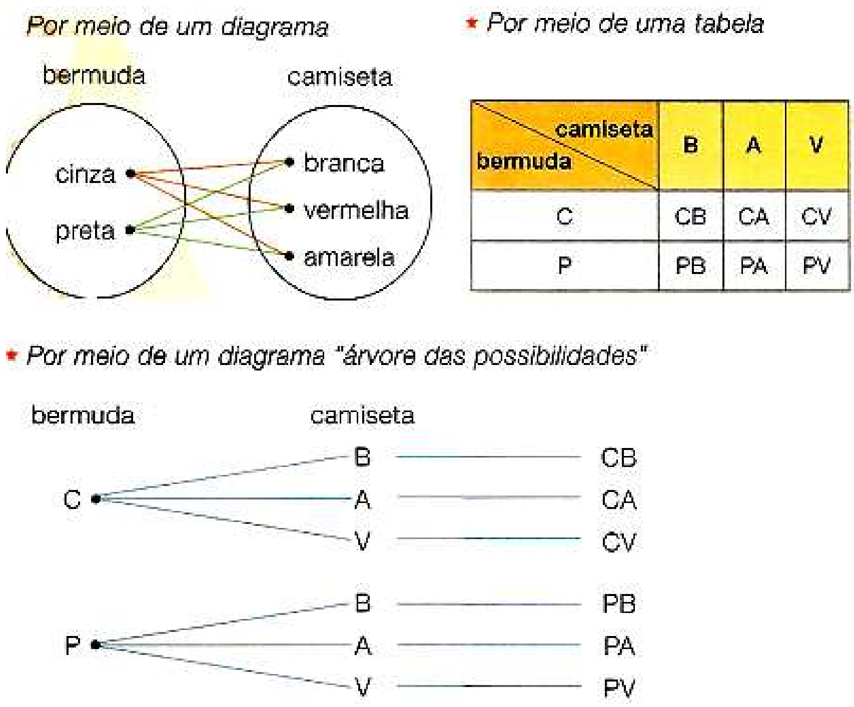
Figura 9: Extraída de Bonjorno e Olivares (2006) – Matemática Fazendo a Diferença, 6º ano, p.51.

O exercício apresenta, dentro da analise combinatória, o raciocínio de arranjo de 10 pessoas tomadas três a três $\left((A_{10,3}) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} = 10.9.8 = 720 \right)$. Os autores abordam a idéia de arranjo a partir do princípio multiplicativo. Na resolução os autores destacam as dez possibilidades para o primeiro colocado sendo que qualquer pessoa pode chegar em primeiro. Para o segundo lugar sobram nove possibilidades, e assim 8 possibilidades para o terceiro sendo feita a conta pela multiplicação 10 x 9 x 8 = 720 possibilidades. Apesar de este exemplo apresentar uma abordagem de solução diferente das outras coleções, as demais atividades propostas pela coleção não exploram esta diferença.

Nos livros de 7° e 8° ano (antigas 6ª e 7ª séries) não encontramos exercícios que estejam relacionados com o conteúdo explorado nesta pesquisa. Já no livro do 9° ano encontramos no oitavo capítulo, intitulado “Noções de probabilidade”, seis páginas dedicadas ao princípio multiplicativo nas quais são explorados os mais variados exercícios.

Na introdução do conteúdo é apresentado um exemplo no qual um rapaz que dispõe de duas bermudas (cinza e preta) e de três camisetas (branca, vermelha e amarela) para fazer uma caminhada pela areia da praia. Supondo que este rapaz vá escolher uma bermuda e uma camiseta para essa caminhada os alunos são questionados sobre as opções deste rapaz.

Os autores ao introduzirem o conteúdo valorizam a percepção das possibilidades através de diferentes tipos de representação como, por exemplo, diagrama, tabela e árvore das possibilidades.



bermuda \ camiseta	B	A	V
C	CB	CA	CV
P	PB	PA	PV

Figura 10: Extraída de Bonjorno e Olivares (2006) – Matemática Fazendo a Diferença, 9º ano, p.248.

Após a introdução do conteúdo, duas atividades resolvidas são apresentadas. A primeira explora uma corrida disputada por quatro carros (A, B, C e D). Pergunta-se quantas e quais são as possibilidades de chegada desses carros. Para resolver esta questão os autores apresentam duas representações distintas. A primeira é uma árvore das possibilidades na qual percebemos as seis possibilidades que correspondem ao carro A em primeiro lugar e assim respectivamente com cada um dos outros carros, chegando-se num total de 24 possibilidades. A segunda é através da representação simbólico-numérica na qual se multiplica as possibilidades de chegada para cada uma das posições (4. 3. 2. 1 = 24).

No segundo exercício apresentado, trabalha-se a formação de números de três algarismos distintos. Este exercício é muito utilizado dentro do conteúdo de arranjo simples, sendo explorado pelos autores sem a utilização de fórmulas (figura 11), valorizando a multiplicação das possibilidades o que facilita muito o cálculo das opções.

Um número de 3 algarismos é formado por três ordens: centena, dezena e unidade. Os algarismos que devem ser colocados em cada ordem são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (10 opções). Assim, temos:

Centena	Dezena	Unidade
9	9	8

Um número não pode começar por 0. Logo são 9 opções

Na ordem da dezena devemos ter algarismos distintos, e um deles já foi escolhido para as centenas. Logo, restam 9 opções.

Já foram escolhidos um algarismo para as centenas e outro para as dezenas. Restam, portanto, 8 opções de algarismos.

Usando o princípio multiplicativo 9 x 9 x 8 = 648 números

Figura 11: Extraída de Bonjorno e Olivares (2006) – Matemática Fazendo a Diferença, 9º ano, p.251.

Neste capítulo são propostos 18 exercícios relacionados com o conteúdo: exercícios que trabalham as possibilidades de eleições de presidente e vice-presidente; diferentes caminhos que podem ser percorridos entre duas cidades; números de casais que podem ser formados com um grupo de pessoas; quantas placas de carro podem ser formadas; quantos anagramas podem ser formados e etc...

Dentre todos os exercícios propostos, um nos chamou mais a atenção por apresentar, informalmente, a diferença entre arranjo e combinação. A figura 12 apresenta o exercício que explora em duas situações a importância ou não da ordem dos termos.

2 Giovana gosta de 5 sabores de sorvete: abacaxi, coco, limão, chocolate e morango. Determine quantas possibilidades ela tem para escolher duas bolas entre os cinco sabores, nas seguintes condições:

a) duas bolas do mesmo sabor 5

b) duas bolas de sabores diferentes, não importando a ordem em que são colocadas na casquinha 10

c) duas bolas de sabores diferentes, importando a ordem em que são colocadas na casquinha 20

Figura 12: Extraída de Bonjorno e Olivares (2006) – Matemática Fazendo a Diferença, 9º ano, p.253.

Ao propor o cálculo das possibilidades para se escolher duas bolas de sorvetes os autores propõem na letra **b** uma idéia de combinação, estudada em análise combinatória, na qual a mudança da ordem dos termos não altera o resultado final. Já na letra **c** os autores trabalham a idéia de arranjo na qual a mudança da ordem dos termos influi no resultado final. Este é o único exercício que identificamos nas quatro coleções analisadas, que aborda esta diferença.

O princípio multiplicativo é apresentado no livro do 9º ano como um tópico antecedendo o estudo de probabilidade. Os autores apresentaram o princípio multiplicativo como alternativa para "resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos" (BONJORNO; OLIVARES, 2006, p.249). Para realçar a sua importância foram apresentadas diferentes formas de representação nas quais o princípio multiplicativo foi utilizado como uma opção mais rápida, valorizando a conversão de registros.

Os autores ao apresentarem um planejamento para auxiliar o professor, no livro do 9º ano, destacam o conteúdo princípio multiplicativo, através do qual se espera desenvolver os seguintes conteúdos procedimentais:

> -Desenvolver o raciocínio combinatório por meio de situações problemas que envolvam contagens.
> -Reconhecer a necessidade do uso da multiplicação na resolução de problemas de contagens.
> -Realizar contagens, aplicando o princípio multiplicativo e a divisão para reduzir agrupamentos repetidos. (BONJORNO; OLIVARES, 2006, p.24).

Percebemos nestes procedimentos e através dos exercícios resolvidos que os autores exploram as idéias de combinação e arranjo sem utilizar fórmulas. A tentativa é destacar dois tipos de situação que demandam procedimentos distintos.

4.4 Análise da 4ª Coleção - Matemática para todos

Esta coleção apresenta no livro do 6º ano um capítulo inicial intitulado "Um panorama da matemática". Neste capítulo são apresentados, de forma rápida, resumos de alguns conteúdos entre os quais aparece o pensamento combinatório em um tópico intitulado "Contando possibilidades".

Neste tópico, para introduzir a idéia de contagem, indaga-se sobre o total de placas de carro que podem ser formadas por três letras e quatro números. Percebemos que dentre os exercícios que envolvem cálculos das possibilidades foram evidenciados alguns registros de representação como tabelas, diagramas e outros.

Na sequência do conteúdo são apresentados sete exercícios que exploram o pensamento combinatório nos quais, para a resolução, os autores propõem o uso de uma tabela e a escrita das opções. Nos problemas propostos para casa o autor apresenta: um exercício para se completar uma tabela de possibilidades; um exercício que pede para se montar uma bandeira com três cores distintas escolhidas de um grupo de seis cores diferentes; dois exercícios que trabalham a formulação de números de três algarismos (sendo distintos ou não); dois exercícios para combinar cores de carros.

Nesta mesma coleção o autor propõe no livro do 7º ano um capitulo intitulado "Padrões numéricos". Neste capítulo é apresentado o conteúdo "Possibilidades e padrões" no qual o autor explora o cálculo de possibilidades priorizando dois tipos de representação: árvore das possibilidades e representação simbólico-numérica (multiplicação de possibilidades).

O conteúdo é apresentado com a resolução de exemplos nos quais através da utilização de letras e números são formados códigos. Nestes exemplos, além da resolução por tabelas e a árvore das possibilidades os autores enfatizam a multiplicação das possibilidades como alternativa viável, mas nem sempre aplicável.

> Tabelas e diagramas em forma de árvore ajudam a contar as possibilidades. Perceber um padrão nos problemas simples ajuda a responder os mais difíceis. Nos exemplos resolvidos o cálculo pôde ser encontrado por multiplicações. Mas, cuidado! Nem sempre é possível usar a multiplicação para contar todas as possibilidades de uma situação. (IMENES; LELLIS, 2007, p. 65).

Embora os autores destaquem esse fato, não exemplificam uma situação em que o princípio multiplicativo não se aplique.

Após a introdução do conteúdo são propostos cinco exercícios para a sala de aula e sete para serem feitos em casa. Estes exercícios trabalham possibilidades de caminhos entre diferentes lugares, construção de árvore de possibilidades (figura 13), construção de anagramas, formação de placas de carro e outros.

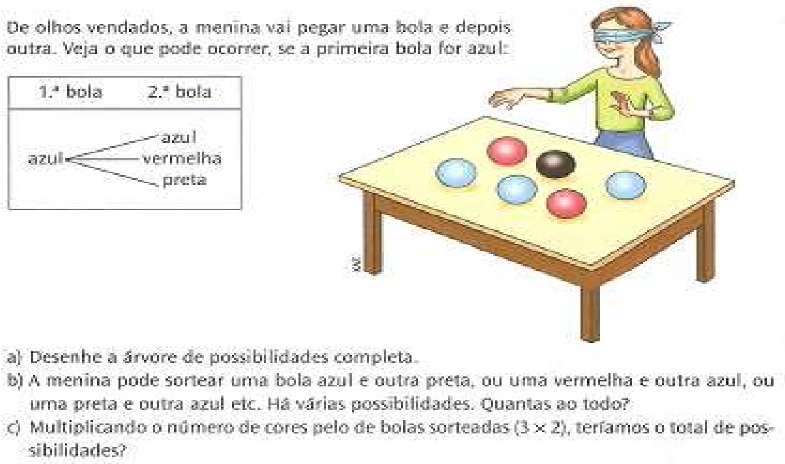


Figura 13: Extraída de Imenes e Lellis (2007) – Matemática Para Todos, 7º ano, p.67.

Como nas outras coleções analisadas, o livro do 8° ano não aborda o pensamento combinatório. Este conteúdo volta a ser trabalhado no livro do 9º ano, no quinto capítulo intitulado “Estatística”, que se inicia com o tópico “Contando possibilidades”.

Para apresentar o conteúdo os autores se utilizam de um exemplo no qual Diogo quer montar uma bandeira com quatro faixas na horizontal sendo cada uma de uma cor. Dispondo-se de quatro cores diferentes é proposto o cálculo das possibilidades de configuração desta bandeira. Estas possibilidades são apresentadas primeiramente através da construção da árvore das possibilidades e em seguida usando o princípio multiplicativo.

Após a apresentação do exemplo são propostos seis problemas para serem feitos em sala de aula e cinco problemas para casa. Nestes exercícios encontramos anagramas, lançamento de dados, formação de números, formação de placas (figura 14) entre outros.

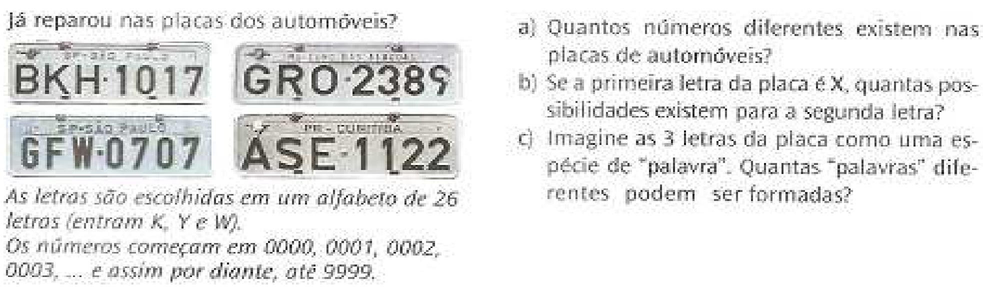


Figura 14: Extraída de Imenes e Lellis (2007) – Matemática Para Todos, 9º ano, Figura 14, p.91.

Nesta coleção os autores apresentam o conteúdo explorando exemplos resolvidos e exercícios nos quais os alunos são levados a comparar diferentes formas de representação. Esta possibilidade de se trabalhar com diferentes registros de representação é mencionada pelos autores Imenes e Lellis (2007, p. 90) para os quais “uma boa habilidade de cálculo exige o domínio de todos os recursos e saber decidir o mais adequado em cada situação”.

Os autores também enfatizam que qualquer que seja o recurso escolhido, resolver um exercício não significa simplesmente apresentar um número como resposta, mas principalmente expor o raciocínio que conduziu a ela. Este raciocínio muitas vezes está representado por uma tabela, uma árvore de possibilidade, um diagrama, através de uma operação de multiplicação de possibilidades. A utilização de vários “recursos” como os autores se referem e que entendemos como a utilização dos vários registros de representação é incentivada pelos autores da coleção.

4.5 Os livros didáticos e a relação entre o pensamento combinatório e a probabilidade no ensino fundamental

O conceito de probabilidade, nas quatro coleções analisadas, é apresentado no livro do 9° ano do ensino fundamental, associado às chances de um determinado evento acontecer calculadas a partir da razão entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados possíveis como o exemplo da figura 15.

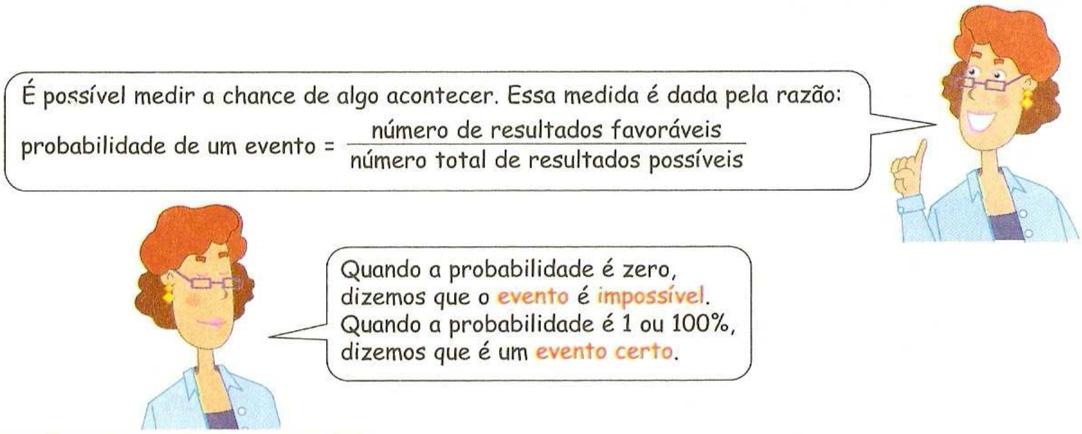


Figura 15: Extraída de Dante (2008), Tudo é matemática, 9º ano, p. 283.

O cálculo probabilístico, em muitos casos, depende de cálculos referentes ao pensamento combinatório para determinar tanto os resultados favoráveis como o total de resultados possíveis estabelecendo assim uma relação de dependência entre estes dois conteúdos.

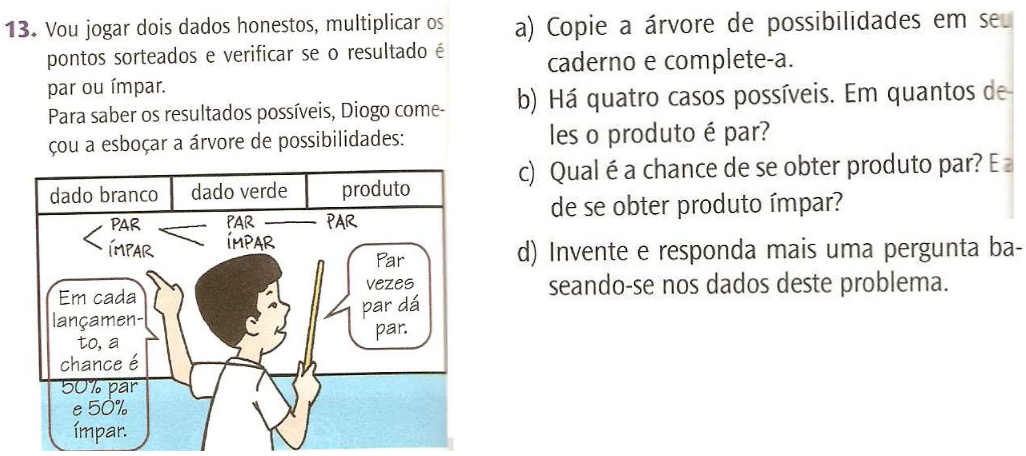
Na coleção “Tudo é matemática” o autor, após a apresentação da fórmula, utiliza dois exemplos resolvidos para mostrar o cálculo das probabilidades nos quais as possibilidades são determinadas sem a utilização de cálculos referentes ao pensamento combinatório. Nesta coleção são propostos nove exercícios para serem feitos em sala e mais cinco exercícios para casa.

Dos exercícios de probabilidade propostos podemos destacar quatro que estão diretamente ligados aos cálculos de análise combinatória e à utilização dos registros de representação. O primeiro envolve a formação de números de três algarismos distintos com os dígitos 1, 2 e 3. Apesar de ser facilmente calculado pela permutação simples o autor apresenta a solução através da escrita das opções (123, 132, 231, 213, 312 e 321). O segundo exercício trabalha com o cálculo dos anagramas que podem ser formados com as letras de uma palavra antes de se calcular as probabilidades. Apesar de pedir para determinar o número de anagramas o autor também pede para que se escrevam todos os anagramas o que induz o aluno a mudar da representação algébrica para linguagem natural. Os exercícios três e quatro trabalham o cálculo de possibilidades através de diferentes registros, tabela e diagrama, antes de realizar os cálculos de probabilidade.

Percebe-se nos exercícios resolvidos e propostos que o trabalho com os diferentes registros de representação e as transformações entre estes registros é necessário para se desenvolver o cálculo das possibilidades e consequentemente a probabilidade.

A coleção “Matemática para todos” além de apresentar a idéia de probabilidade como a chance de um evento acontecer traz alguns textos para tornar o conteúdo mais próximo da realidade dos alunos. Um dos textos intitulado “Teoria e Prática” apresenta uma tabela com dados reais sobre o número de assaltos em uma cidade e analisa algumas probabilidades a partir desta tabela. O livro também traz um texto que trabalha a probabilidade envolvida no jogo da Mega-Sena no qual o autor apresenta a forma de calcular as possibilidades dos jogos, através do pensamento combinatório, e consequentemente as probabilidades de se ganhar.

Os autores propõem onze exercícios para sala e mais sete exercícios para casa nos quais além de utilizarem o raciocínio combinatório e os diferentes registros de representação para o cálculo probabilístico também utilizam atividades investigativas para estimular a criatividade dos alunos como na figura 16.



13. Vou jogar dois dados honestos, multiplicar os pontos sorteados e verificar se o resultado é par ou ímpar.
Para saber os resultados possíveis, Diogo começou a esboçar a árvore de possibilidades:

dado branco	dado verde	produto
PAR / ÍMPAR	PAR / ÍMPAR	PAR

a) Copie a árvore de possibilidades em seu caderno e complete-a.
b) Há quatro casos possíveis. Em quantos deles o produto é par?
c) Qual é a chance de se obter produto par? E a de se obter produto ímpar?
d) Invente e responda mais uma pergunta baseando-se nos dados deste problema.

Figura 16: Extraída de Imenes e Lellis (2007) – Matemática Para Todos, 9º ano, p.96.

Neste exercício o aluno é conduzido a utilizar a árvore das possibilidades como forma de encontrar as possibilidades, além de calcular as probabilidades propostas. Na letra (d) o aluno é desafiado a criar e responder uma questão relacionada com o problema.

Outros três exercícios exploram a relação existente entre a análise combinatória, os diferentes registros de representação e a probabilidade. Destes exercícios dois trabalham com a formação de números nos quais os algarismos não precisam ser distintos e o outro exercício explora o lançamento de quatro moedas e apresenta uma tabela para se calcular as 16 possibilidades existentes.

Na coleção “Matemática Fazendo a diferença” os autores fazem uma abordagem histórica da probabilidade relacionando-a aos jogos de azar antes de apresentarem o seu cálculo através da divisão entre as possibilidades favoráveis e o total de possibilidades.

Os autores além de apresentarem a fórmula utilizam três exemplos resolvidos para introduzir o conteúdo sendo que um deles apresenta uma árvore das possibilidades para se calcular as possibilidades no lançamento sucessivo de duas moedas. Entre os exercícios propostos para casa podemos encontrar outros cinco que trabalham, antes do cálculo da probabilidade, o raciocínio combinatório e os diferentes registros de representação como o uso de uma tabela em um exercício de lançamento de dados, a linguagem simbólico-numérica em exercícios de formação de números e de possibilidades para os três primeiros colocados em uma corrida.

A coleção “Novo Praticando Matemática” dedica seis páginas, entre teoria e exemplos, do livro do 9º ano para a introdução do conceito de probabilidade antes de propor os primeiros exercícios. Os autores ao apresentarem a fórmula de probabilidade, exemplificam o uso de alguns registros de representação como alternativa para se calcular as possibilidades. Por exemplo, no lançamento de quatro moedas, as possibilidades são apresentadas através da árvore das possibilidades e através da multiplicação das possibilidades.

Além dos muitos exemplos resolvidos, o livro propõe 44 exercícios entre atividades para sala e para casa, nos quais diferentes registros de representação constantemente são sugeridos como alternativa para se calcular possibilidades. O uso da tabela é um do mais explorados para calcular as possibilidades de lançamento de dois dados, para calcular a soma de dois números sorteados em uma roleta, entre outros.

4.6 Síntese das análises

Diante da análise das quatro coleções percebemos que geralmente o pensamento combinatório é abordado no ensino fundamental associado a outros conteúdos. Seja como idéia de multiplicação ou como instrumental para o cálculo das possibilidades em probabilidade o seu desenvolvimento acontece de forma intuitiva priorizando a linguagem natural e o princípio multiplicativo.

Todas as quatro coleções analisadas abordam o pensamento combinatório no livro correspondente ao 6º ano do ensino fundamental (antiga 5ª serie). Das quatro coleções, três apresentam o conteúdo como uma “idéia de multiplicação”. Na 4ª coleção, “Matemática para todos”, o conteúdo é apresentado em um capítulo intitulado “Panorama da matemática”, quando o pensamento combinatório é utilizado, entre outros conteúdos, para que o professor possa avaliar o conhecimento prévio dos alunos, suas iniciativas e suas atitudes em relação à matemática.

Podemos notar que as diferentes formas de representação não são muito exploradas nos livros referentes ao 6º ano sendo que os alunos são induzidos a usar o princípio multiplicativo pela relação com a multiplicação de números naturais.

Nos livros referentes ao 7º ano somente a coleção “Matemática para todos” explora, através de exemplos e exercícios propostos, o pensamento combinatório e alguns tipos de representação como árvore de possibilidades e linguagem simbólico-numérica. Os livros do 8º ano, das quatro coleções, não abordam o pensamento combinatório que volta ser explorado nos livros do 9° ano nos quais o conteúdo é apresentado como ferramenta para o cálculo probabilístico.

Um aspecto importante nos livros do 9º ano, das quatro coleções, é a valorização das diferentes formas de representação das idéias de análise combinatória como a árvore de possibilidades, diagrama, tabela, escrita das opções, representação simbólico-numérica e outras. Tanto em exercícios resolvidos como em exercícios propostos os diferentes registros de representação são apresentados através de ilustrações ou como sugestão para facilitar os cálculos. Apesar da utilização de diferentes registros verificamos que a conversão dos registros é pouco explorada, talvez pelo foco intuitivo, sem remeter a estudos mais aprofundados sobre o pensamento combinatório.

Dentre os exercícios resolvidos e propostos, poucos envolvem a idéia de arranjo e permutação simples, sendo resolvidos sem a utilização de fórmulas, através da multiplicação de possibilidades. Apenas uma das coleções explorou, informalmente e em um único exercício, a diferença entre a importância ou não da ordem dos elementos ao se montarem os agrupamentos, destacando as duas operações distintas de fazer arranjo e combinação.

Constatamos que as coleções apresentam no livro do 9º ano, após a exploração do pensamento combinatório, o conteúdo de probabilidade. Seja através de um texto explicativo ou através de exercícios resolvidos a introdução da probabilidade é feita de tal forma a valorizar a importância do pensamento combinatório e dos diferentes registros de representação no cálculo das possibilidades de um evento ocorrer, necessárias para se calcular a probabilidade.

Ao apresentarem o conteúdo de probabilidade, todas as coleções, trazem um número considerável de exercícios sendo, por exemplo, que a coleção “Novo Praticando Matemática” propõe 44 exercícios de fixação dos quais muitos trabalham o pensamento combinatório. Não identificamos exercícios, mesmo que simples, envolvendo probabilidade de união de dois eventos, probabilidade da intersecção de dois eventos, probabilidade condicional e outros tipos comuns no trabalho com probabilidade.

A análise feita permitiu destacar algumas características destas coleções a serem consideradas para a montagem do módulo de ensino de introdução ao pensamento combinatório: a necessidade de utilização dos diferentes registros de representação; a falta das transformações destes registros em especial a conversão; a falta de exercícios que explorem a diferença entre arranjo simples e combinação simples; a possibilidade de se estudar a probabilidade interligada ao pensamento combinatório e a falta de exercícios que explorem diversos tipos de probabilidade.

5 UM MÓDULO DE ENSINO PARA INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO COMBINATÓRIO

O módulo de ensino aqui apresentado foi elaborado objetivando uma introdução ao pensamento combinatório e testado junto a alunos do 9º ano, do Ensino Fundamental.

A proposta é fundamentada em alguns princípios destacados por Raymond Duval (2003, 2009), ao sistematizar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, como: a importância dos diferentes registros de representação para o trabalho com os objetos matemáticos e a necessidade, da transformação de um registro em outro à medida que um se torna mais vantajoso que o outro.

As atividades são propostas como atividades de investigação (Ponte, 2003; Ernest 1996; Polya, 1995), de forma a favorecer o aprendizado dos princípios de contagem, dos conceitos de permutação, arranjo, combinação e sua utilização no cálculo de possibilidades de ocorrência de um evento.

O módulo de ensino compreende quatro seqüências de atividades, cada uma delas com um foco principal. Cada sequência é composta de duas fichas de atividades que são resolvidas uma em sala e outra em casa. A ficha de atividades para sala de aula é resolvida em duplas e depois discutida por todos os alunos em um momento de socialização dos resultados encontrados. Após esta etapa os alunos recebem a ficha de atividades para casa, sendo desenvolvida individualmente e entregue ao professor.

Os objetivos gerais do módulo são:

- Explorar a capacidade dos alunos de enumerar, organizar, analisar, testar entre outras que são inerentes ao pensamento combinatório.
- Explorar os diferentes registros de representação (tabela, diagramas, linguagem algébrica, linguagem natural, árvore das possibilidades,...) e as transformações destes registros como meio para aprimorar o processo ensino-aprendizagem.
- Desenvolver o princípio multiplicativo como um instrumento na resolução de exercícios de contagem, evitando o uso de fórmulas.
- Utilizar atividades investigativas para romper com a simples reprodução de procedimentos, proporcionando ao aluno a participação na construção do seu

conhecimento à medida que situações desafiadoras o conduzem na busca de estratégias para resolvê-las.

- Incentivar a socialização das idéias de forma que os alunos desenvolvam a capacidade de se comunicar matematicamente à medida que são questionados e levados a refletirem sobre o seu trabalho.

Ao final do módulo foi prevista a condução de duas atividades sendo uma prova, feita individualmente, e um questionário respondido também individualmente em que os alunos avaliam o tipo de trabalho desenvolvido, sendo a identificação das respostas opcional.

Seqüência de Atividades 1 - A introdução do princípio multiplicativo e a exploração de diferentes representações para o cálculo de possibilidades.

O princípio multiplicativo é apresentado nos livros didáticos com o objetivo de introduzir o conteúdo de probabilidade, para o qual a contagem de possibilidades é fundamental. De modo geral os livros didáticos apresentam o conteúdo na forma de exemplos resolvidos.

O bloco de atividades proposto consiste em uma série de situações problema, a serem resolvidas pelos alunos, que vão aos poucos encontrar formas e estratégias diferenciadas de resolução, construindo algumas idéias básicas da análise combinatória.

A proposta é fundamentada no princípio que:

> A resolução de problemas e as investigações como métodos de ensino requerem que se considere o contexto social da turma e suas relações de poder. A resolução de problemas permite ao aluno aplicar a sua aprendizagem criativamente, numa nova situação [...]. (ERNEST, 1996, p.31).

Como afirma Ernest (1996) a valorização da bagagem cognitiva do aluno é importante dentro do processo ensino aprendizagem para que o conteúdo em questão não pareça desvinculado dos conteúdos anteriormente estudados.

Nesse momento o aluno resolve exercícios relacionados com situações cotidianas e que admitem várias estratégias de solução, que empregam várias formas de representação das idéias. O trabalho é feito primeiramente em duplas e posteriormente as situações problema e as soluções propostas pelas duplas são exploradas com participação de toda a turma.

O papel do professor (neste caso o pesquisador) é de extrema importância como afirma Ernest (1996, p.31) “[...] o professor ainda mantém muito de seu controle sobre o conteúdo e o modo de ensinar.” Este controle acontece na forma de elaboração da seqüência de atividades e na maneira como ela é conduzida. O foco das atividades propostas no bloco é favorecer a utilização das diferentes formas de representação matemática em situações que envolvem o princípio multiplicativo e o cálculo de possibilidades; o professor leva os alunos, através de questionamentos, a exporem suas respostas e refletirem sobre elas.

Ao final do trabalho feito em duplas acontece a socialização. Os alunos expõem para a turma suas idéias, argumentando sobre as conclusões e observações. Uma ficha de atividades para casa é proposta com o objetivo de fixar os conceitos desenvolvidos, sendo também um espaço para a introdução de questões novas que compreenderão as atividades seguintes.

Seqüência de Atividades 2 - A exploração de exercícios em que a ordem dos termos não faz diferença (Combinação)

Esse bloco de atividades é orientado pelo método da “Descoberta Guiada”, um dos métodos de inquirição apresentados por Ernest (1996); o professor formula o problema ou escolhe a situação, com um objetivo em mente e conduz o aluno para que possa alcançar esse objetivo.

O aluno é motivado a comparar os exercícios e idéias trabalhadas no primeiro bloco, de tal forma a desenvolver a percepção sobre a relação entre a importância, ou não da ordem dos termos, para a contagem de possibilidades a ser feita. Situações problema propostas exploram sem fórmulas as idéias envolvendo permutação, arranjo e combinação simples. Mais uma vez o incentivo aos diferentes registros de representação é uma importante ferramenta.

Os exercícios conduzem os alunos a perceberem que em situações problema nas quais a ordem de disposição dos elementos não importa, algumas possibilidades são repetidas e por isso existe um excesso de possibilidades. Constatada esta repetição espera-se (através dos exercícios) que os alunos percebam a idéia da divisão como forma de se retirar este excesso de possibilidades.

Um dos objetivos do bloco de atividades é abordar a idéia de combinação simples, já no Ensino Fundamental, sem o uso de fórmulas, facilitando o seu estudo posterior, formalizado no Ensino Médio. Quando exercícios desta natureza são apresentados nos livros didáticos, aparecem muitas vezes de forma isolada, sem um destaque para esse tipo de agrupamento e sem nomeá-lo como combinação. A proposta apresenta aqui a primeira sistematização de idéias na qual são discutidos os conceitos de arranjo e combinação. Esta sistematização tem por objetivo proporcionar ao aluno a capacidade de analisar o exercício em relação à importância, ou não da ordem dos termos e classificá-lo como arranjo ou combinação.

Seqüência de Atividades 3 - A introdução da probabilidade através da resolução de situações problema

Esse bloco de atividades se justifica pela ligação intrínseca existente entre combinatória e probabilidade.

Como a proposta é viabilizar uma abordagem intuitiva do raciocínio combinatório é natural também que seja feita uma introdução ao pensamento probabilístico.

As atividades propostas além de buscarem desenvolver o pensamento probabilístico têm como objetivo a introdução das diferentes formas de se representar uma probabilidade (fracionária, decimal ou percentual) explorando alguns conceitos probabilísticos desenvolvidos, geralmente, apenas no ensino médio, como a probabilidade condicional, a probabilidade da união e a probabilidade da intersecção.

Seqüência de Atividades 4 – Sistematização de conceitos da análise combinatória simples

Neste bloco os alunos são incentivados a estabelecer relações, sistematizando idéias de tal forma que a introdução do fatorial e das fórmulas de permutação, arranjo e combinação decorra naturalmente através da condução de atividades de descoberta guiada.

A proposta é de condução de um trabalho de conexão entre o conhecimento prévio dos alunos e o novo conhecimento adquirido, sendo

> [...] fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. (BRASIL,1998, p. 37).

Nesta fase os cálculos utilizados anteriormente (princípio fundamental da contagem, permutação, arranjo, combinação e probabilidade) são retomados de tal forma que os alunos comparando as atividades desenvolvidas possam estabelecer conexões entre os vários resultados, identificando as similaridades e diferenças.

5.1 Descrição das Atividades

Apresentamos a seguir os blocos de atividades com os objetivos detalhados e procedemos a análises prévias, apontando algumas expectativas de soluções que podem ser apresentadas pelos alunos.

Depois de separadas as duplas os alunos recebem a ficha de atividade para ser feita em sala, sendo orientados a resolvê-las sem a preocupação com questões de “certo e errado”. São destacados que os aspectos mais importantes no trabalho são a participação e o empenho em resolver os exercícios. Netas fase os alunos têm duas aulas para resolver os exercícios propostos e entregar para o professor.

Após as duas aulas de resolução uma terceira aula é destinada para socialização das idéias e debate, momento em que os alunos podem apresentar suas resoluções, dúvidas e questionamentos.

Terminada a socialização os alunos recebem a ficha de atividades para casa que deve ser resolvida individualmente e entregue ao professor na semana seguinte.

Seqüência de Atividades 1

1ª Ficha de Atividades – para sala
1) Marcos estava fazendo compras em um shopping e resolveu parar para fazer um lanche. A lanchonete oferecia dois tipos de salgados e três tipos de suco.

SALGADOS		SUCO	
Pastel	R$1,00	Laranja	R$1,00
Kibe	R$1,00	Goiaba	R$1,00
xxx		Uva	R$1,00

Com os dois reais que tinha no bolso, Marcos resolveu comer um salgado e tomar um suco. Responda:
a) Quantas eram as possibilidades de Marcos, se ele resolvesse comer um pastel?
b) Quantas eram as possibilidades de Marcos, se ele resolvesse beber um suco de goiaba?
c) Quantas eram as possibilidades de Marcos no total? Quais eram essas possibilidades (escreva as opções)?
2) Um grupo de amigos resolveu montar um time de futebol. Na escolha do uniforme do time foram apresentadas algumas opções de camisa e short. A camisa pode ser Branca, Cinza ou Amarela e o short pode ser Preto, Azul ou verde.

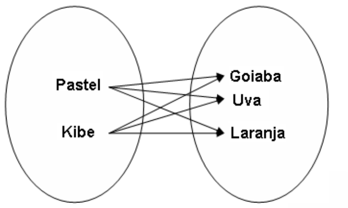
a) Complete a tabela abaixo.

			
	Camisa Branca Short Azul		
			
			

1ª Ficha de Atividades – para sala – continuação
b) Quantas são as possibilidades de escolher um uniforme para o time?
c) O exercício pode ser resolvido sem a utilização da tabela? Em caso afirmativo apresente outra maneira para resolvê-lo.
d) Se houvesse seis cores de camisa e cinco cores de short, quantas possibilidades de uniformes haveria? Explique como encontrou a resposta.
3) Um anagrama é um código formado com todas as letras de uma palavra, podendo ou não ter significado na língua portuguesa. Por exemplo, LAU e ALU são anagramas da palavra LUA.
a) Quais são os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra LUA?
b) Escolha uma palavra com quatro letras distintas e determine quais são os anagramas que podem ser formados com as letras desta palavra.
c) É possível calcular a quantidade de anagramas, das letras **a** e **b**, sem escrever as possibilidades? Se possível calcule.
4) Ao abrir uma conta em um banco, Bianca teve que escolher uma senha formada por três algarismos distintos . Sabendo-se que para montar a senha ela pode escolher três dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Determine:
a) Como o seu aniversário é dia 13 de março, ela resolveu começar sua senha com os algarismos 1 e 3 (1 3 ___). Quantas opções ela tem para o último algarismo?
b)Quantas senhas Bianca pode formar sabendo que o primeiro algarismo escolhido foi o cinco (5 ___ ___)?
c) Quantas senhas podem ser formadas no total? (___ ___ ___)
d) Suponhamos que a senha formada por Bianca pudesse conter números repetidos. Quantas senhas podem ser formadas no total? (___ ___ ___)
5) Uma corrida é disputada por seis carros: A, B, C, D, E e F, tendo todos a mesma chance de ganhar. Sendo assim, determine:
a) Quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?
b) Se fossem 10 carros disputando a corrida, quantas seriam as possibilidades para os três primeiros lugares?
c) Entre todos os possíveis resultados para esta corrida qual a chance de que entre os carros (A, B, C, D, E e F), o carro **A** chegue entre os três primeiros lugares

O primeiro exercício tem por objetivo desenvolver o cálculo de possibilidades por meio da escrita das opções. Ao se deparar com as opções esperamos que os alunos registrem as alternativas para a letra **a**, por exemplo, escrevendo as opções Pastel-Laranja, Pastel-Goiaba e Pastel-Uva. O aluno também pode utilizar outros tipos de registro de representação como diagrama ou multiplicação das possibilidades.

Diagrama:



6 possibilidades

Multiplicação das possibilidades:

2(tipos de salgado) x 3(tipos de suco) = 6 possibilidades.

O segundo exercício trabalha a mesma idéia do exercício anterior, porém explora outros aspectos. Primeiro que o fato de apresentar uma tabela incentiva os alunos a utilizarem outra forma de representação. Na letra **c** deste exercício os alunos são incentivados a pensar em outra forma de resolução a não ser pelo uso da tabela. Esperamos que eles trabalhem com o princípio multiplicativo, observando que as três opções de cada item podem ser multiplicadas e obtendo-se assim a resposta:

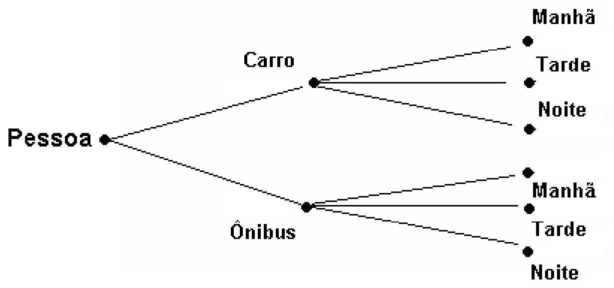
3 shorts x 3 camisas = 9 possibilidades.

Para fixar o princípio multiplicativo o exercício explora o aumento das opções, na letra **d**, alterando assim os números a serem multiplicados. Os diferentes registros de representação e o incentivo à realização das operações de transformação de registros são importantes para que o aluno perceba as diferentes maneiras de resolver os exercícios e representar as idéias matemáticas.

O exercício três tem por objetivo associar o princípio multiplicativo ao cálculo de permutações. Exercícios que exploram a formação de anagramas são importantes para que o aluno esteja atento à importância da ordem dos termos ao fazer um grupamento. Neste exercício esperamos que os alunos, nas letras **a** e **b**, trabalhem explorando a escrita das opções como LUA, LAU, ALU. Na letra c, com o intuito de provocar o aluno, é proposto o trabalho com a conversão de registros de representação deixando de lado a escrita das opções, para utilizar o princípio multiplicativo o que facilita os cálculos.

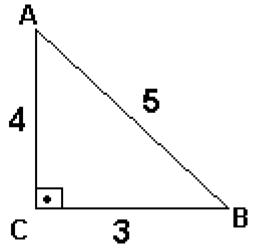
O exercício quatro é comum no conteúdo de análise combinatória, e aborda o arranjo. O objetivo deste exercício é proporcionar ao aluno a resolução de exercícios de arranjo por meio do princípio multiplicativo. Para isto, o exercício explora nas letras ***a*** e ***b*** a formação de números mediante a fixação de alguns algarismos, o que facilita a análise das possibilidades para cada um dos algarismos restantes. Ao resolver este exercício, alguns alunos podem se confundir na hora de diferenciar o número de algarismos utilizados e o número de possibilidades de cada algarismo (algarismo cinco é diferente de cinco opções). Nas letras **a** e **b** a idéia é possibilitar a escrita das opções, 132, 134 e 135, mas nas letras **c** e **d**, pela quantidade de opções, os alunos devem trabalhar a conversão de registros deixando a escrita das opções em função da linguagem simbólico-numérica através da multiplicação das opções.

O exercício cinco trabalha o princípio multiplicativo aplicado a exercícios de arranjo, mas o seu objetivo é proporcionar um primeiro contato com a importante relação entre a contagem de possibilidades e o cálculo de probabilidade.

1ª Ficha de Atividades - para casa
1) Observe a ilustração abaixo:

a) Sabendo-se que esta é a resposta de um exercício, escreva um possível enunciado para ele.
b) Explorando sua criatividade, elabore outro exercício e utilize o mesmo tipo de representação (árvore das possibilidades) apresentada na letra ***a*** para resolvê-lo.
2) Luciana foi ao shopping fazer compras e decidiu comprar um livro e um Cd de presente para o seu pai. Ela sabe que seu pai gosta de ouvir Samba, MPB, e Rock e que gosta de ler romance e suspense. Se Luciana esta decidida a levar um Cd e um livro determine.
a)Quantas e quais seriam as opções de Luciana?
b) A representação utilizada no exercício anterior (árvore das possibilidades) pode ser utilizada neste exercício? Caso afirmativo monte a árvore das possibilidades para este exercício.


1ª Ficha de Atividades - para casa - continuação

3) Em uma prova sobre trigonometria no triângulo retângulo foi apresentada a figura abaixo.

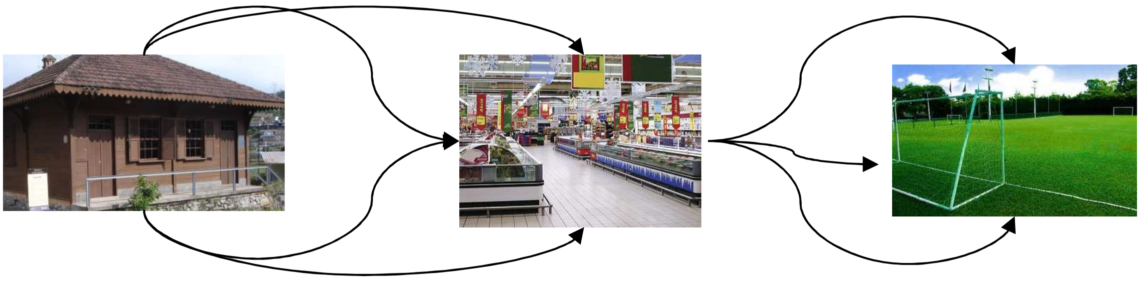


Nesta questão pedia-se o valor de $sen(\hat{A})$. Sabendo-se que um aluno não se lembrou da fórmula e resolveu arriscar a sorte. Determine:

a) Quantas opções de escolha este aluno teria para dar a resposta sabendo-se que o valor de $sen(\hat{A})$ é a divisão do valor da medida de dois dos lados do triângulo?

b) Sabendo que o aluno não se lembrava da fórmula, determine a chance, em porcentagem, que ele tem de acertar a resposta.

4) Bruno vai sair de casa para jogar uma partida de futebol com os amigos. Antes de chegar ao campo ele tem que passar no supermercado para comprar uma bola. Da sua casa até o supermercado ele tem quatro caminhos e do supermercado até o campo ele tem três caminhos, determine quantos são os possíveis caminhos que ele pode escolher de casa até o campo de futebol.



5) Em uma rua foram construídas três casas, uma após a outra. Dispondo-se de três cores diferentes (Azul, Branca e Amarela) e sabendo que cada casa só pode ser pintada de uma cor, determine:

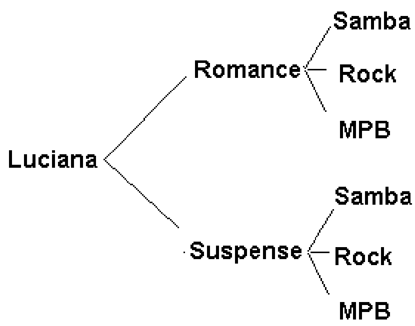
a) De quantas maneiras podem ser pintadas essas casas de modo que todas as casas tenham cores diferentes?

b) De quantas maneiras podem ser pintadas essas casas de modo que a primeira casa esteja pintada de azul?

c) Dispondo-se de seis cores diferentes para pintar as três casas, quantas seriam as possibilidades que nesta rua as casas tenham cores diferentes?

Os exercícios para casa foram montados e aplicados para reforçar, individualmente, as idéias trabalhadas e exploradas nas atividades desenvolvidas em sala de aula. O primeiro exercício para casa apresenta uma representação figural muito comum no tratamento de questões envolvendo o pensamento combinatório. A árvore das possibilidades (como é conhecida esta representação) é utilizada para resolver exercícios, como forma de visualizar mais facilmente as possibilidades. Neste exercício o aluno é instigado a criar um exercício, em que a resolução possa ser obtida através da árvore das possibilidades.

O segundo exercício trabalha uma combinação entre as opções de CDs e Livros podendo ser resolvido pela multiplicação das possibilidades. $\frac{3}{\text{Opções de CDs}} \text{ x } \frac{2}{\text{Opções de Livros}} = 6 \; possibilidades$. Na letra **c** espera-se que os alunos não tenham dificuldades em utilizar a árvore das possibilidades para a resolução deste exercício:



O terceiro exercício faz uma relação entre um dos conteúdos estudados pela turma anteriormente, trigonometria no triângulo retângulo, e o pensamento combinatório. Neste exercício esperamos que os alunos trabalhem a idéia do arranjo de três elementos dois a dois, mas sem utilizar a fórmula. Acreditamos que a escrita das opções será o caminho mais explorado pelos alunos facilitando assim o cálculo da porcentagem na letra **b.**

No exercício quatro esperamos que os alunos utilizem a linguagem simbólico-numérica através da multiplicação das opções para encontrar as possibilidades totais.

$$\frac{4}{\text{Casa} \rightarrow \text{supermercado}} \text{ x } \frac{3}{\text{Supermercado} \rightarrow \text{futebol}} = 12 \; possibilidades$$

No exercício cinco esperamos que os alunos priorizem dois registros de representação sendo a linguagem simbólico-numérica, através do princípio multiplicativo, e a escrita das opções para resolvê-lo. Na letra **a** são utilizadas três cores para se pintar as três casas o que envolve a idéia de permutação simples, pois as cores não podem ser repetidas. Assim, esperamos que os alunos não tenham dificuldades para resolvê-la, o que pode acontecer apresentando-se a escrita das opções azul-branco-amarelo, amarelo-branco-azul,... ou pela multiplicação das opções $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades. Já na letra **b** acredita-se que alguns alunos possam ter mais dificuldades, pois além de fixar a cor da primeira casa o exercício não falou de casas com cores distintas. O exercício pode ser resolvido de maneira simples como na letra **a**, mas alguns alunos talvez continuem trabalhando com a idéia de cores distintas. Na letra **c** os alunos se deparam com um exercício de arranjo no qual temos seis cores para três casas. Nesta letra, com o aumento do número das cores e o fato de não termos quais são as cores, esperamos que os alunos se utilizem da multiplicação das possibilidades $6 \times 5 \times 4 = 120$.

Recolhidas as atividades para casa, os alunos se reúnem em dupla novamente (mesma dupla) com o intuito de fazer a segunda parte da atividade. Como visto na descrição das etapas, esta segunda parte tem por objetivo proporcionar ao aluno o contato com exercícios que exploram a ordem dos termos e assim desenvolver um entendimento sobre a diferença existente entre exercícios de arranjo e combinação.

Seqüência de Atividades 2

2ª Ficha de Atividades – para sala

1) Patrícia resolveu tomar um sorvete. As opções de sabor oferecidas são: coco, limão, baunilha, chocolate e morango. Determine:

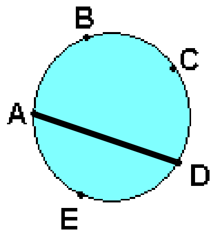
a) Quais são as opções de Patrícia para escolher duas bolas de sabores diferentes.

b) Quais são as opções de Patrícia para escolher três bolas de sabores diferentes.

c) É possível calcular a quantidade de opções que Patrícia tem, nas letras **a** e **b**, sem escrever quais sejam as opções? Explique como proceder.

2) Na aula de geometria foi proposto o seguinte desafio para os alunos:

Determine quantas cordas podem ser formadas com os pontos da circunferência abaixo. (**Resolva sem desenhar as possibilidades**)



3) Considere os seguintes problemas:

a) Determinar o número possível de senhas de 03 dígitos distintos, que podem ser formadas usando-se os algarismos 1, 2, 3 e 4.

b) Determinar quantas e quais são as opções de montar um prato escolhendo 03 itens como acompanhamento para a carne, em um restaurante que oferece como opções de acompanhamento fritas, arroz, feijão e legumes.

c) No problema a) temos quatro números e devemos escolher três para formar a senha; no problema b) temos quatro acompanhamentos para escolher três. Responda: Apesar de envolverem a mesma quantidade de elementos os resultados dos dois problemas são iguais? Justifique sua resposta.

2ª Ficha de Atividades – para sala – continuação
4) Quando resolvemos um exercício de anagramas, como foi feito na Atividade 1 em sala, percebemos que ao trocarmos a ordem dos elementos temos um resultado diferente. Exercícios que envolvem este raciocínio são conhecidos como exercícios de **ARRANJO SIMPLES**. Os anagramas LUA e LAU são diferentes, pois trocamos a ordem das letras A e U. Por outro lado existem exercícios, conhecidos como exercícios de **COMBINAÇÃO SIMPLES**, em que a ordem dos termos não é importante. Por exemplo, se desejamos formar duplas de alunos, a dupla Pedro e Marcos é a mesma dupla que Marcos e Pedro.
Classifique cada exercício da 2ª Ficha de Atividades como exercício de Arranjo ou Combinação e justifique:
Exercício 1 ( ) Arranjo ( ) Combinação Justificativa:
Exercício 2 ( ) Arranjo ( ) Combinação Justificativa:
Exercício 3 (letra **a**) ( ) Arranjo ( ) Combinação Justificativa:
Exercício 3 (letra **b**) ( ) Arranjo ( ) Combinação Justificativa:

O exercício um tem por objetivo proporcionar ao aluno o primeiro contato com a idéia de combinação. Neste exercício, nas letras **a** e **b**, o aluno é questionado sobre “quais são as opções?” e não “quantas são as opções”, pois quando o aluno escreve as opções ele não vai repetir a opção coco-limão e limão-coco. Uma vez feita a escolha pela escrita das opções, esperamos que os alunos automaticamente façam a exclusão das alternativas repetidas o que geralmente não acontece quando se calculam as opções através da multiplicação das possibilidades. Na letra **c** esperamos que o aluno utilize a multiplicação das possibilidades para calcular as opções das letras **a** e **b** e assim se depare com resultados diferentes em relação às opções encontradas nas letras anteriores o que deve motivá-lo a perceber a real diferença entre arranjo e combinação.

O exercício dois trabalha com cinco pontos combinados dois a dois desenvolvendo a idéia de corda, associando conteúdos da análise combinatória e da geometria. Neste exercício, mais uma vez, espera-se que os alunos percebam que AB e BA representam a mesma corda o que diferencia a conta a ser feita das contas feitas na 1ª ficha de atividades. Assim os alunos podem utilizar a escrita das opções (AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CD e DE), como forma de calcular as opções. Alguns alunos podem também utilizar a multiplicação das possibilidades $5 \times 4 = 20$, percebendo a necessidade de dividir por dois, pois cada opção é repetida duas vezes (AB e BA).

O exercício três explora a diferença entre arranjo e combinação. Neste exercício o aluno deverá resolver na letra **a** e **b** uma situação envolvendo o mesmo número de termos, porém cada uma envolvendo um tipo diferente de raciocínio. Na letra **a** os alunos devem resolver um exercício de arranjo de quatro termos tomados três a três no qual esperamos que a multiplicação das opções seja a maneira mais utilizada $4 \times 3 \times 2 = 24$. Já na letra **b,** na qual se trabalha a combinação de quatro termos tomados três a três, esperamo que a escrita das opções seja mais utilizada do que a multiplicação das possibilidades (Fritas-Arroz-Feijão, Fritas-Legumes-Feijão, Fritas-Legumes-Arroz e Legumes-Arroz-Feijão).

Assim como no exercício três o exercício quatro também explora a diferença entre arranjo e combinação. Neste exercício são definidos arranjo simples e combinação simples e diferenciados pela importância, ou não da ordem dos termos para que os alunos possam identificar e classificar o raciocínio utilizado nos exercícios anteriores. Esperamos que os alunos não tenham dificuldades para diferenciar os exercícios de arranjo e de combinação e que utilizem exemplos para justificar suas respostas (coco-limão = limão-coco e $123 \neq 132$).

Após a resolução e exploração destes exercícios foi proposto que os alunos levassem para casa uma ficha de atividades com outros quatro exercícios e que resolvessem, individualmente, para entregar uma semana depois (na próxima aula). Os exercícios propostos para casa trabalham a idéia de combinação e têm como objetivo avaliar a compreensão dos estudantes sobre o conteúdo.

2ª Ficha de Atividades – para casa

1) Marta resolveu fazer uma torta doce. O recheio desta torta é composto sabores diferentes que devem ser escolhidos entre abacaxi, limão, maça, chocolate, morango e maracujá. Sendo assim determine:

a) Quais as opções de Marta para fazer o bolo escolhendo dois sabores?

b) Quais as opções de Marta para fazer o bolo escolhendo três sabores?

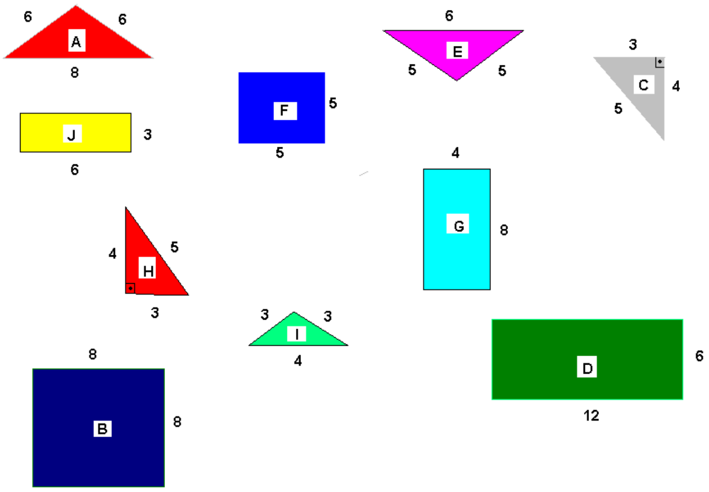
c) É possível calcular a quantidade de opções que Marta tem, nas letras **a** e **b**, sem escrever quais sejam as opções? Explique como proceder.

2) Resolva os problemas seguintes e depois classifique-os, justificando, como exercícios de Arranjo ou Combinação:

a) Ao comprar um carro são oferecidos 5 itens adicionais: ar condicionado, direção hidráulica, trava elétrica, vidro elétrico e som. Se Marcos vai escolher dois itens quantas e quais são suas opções?

b) Pedro, Paula, Marcelo e Bruna são da comissão de formatura e precisam escolher entre eles dois para serem o presidente e vice-presidente desta comissão. Quantas e quais opções eles têm?

3) Em uma aula de geometria o professor explicou a diferença existente entre figuras congruentes e figuras semelhantes. Uma folha contendo algumas figuras foi entregue aos alunos.



Esta folha continha as seguintes perguntas:

a) Qual a diferença entre figuras semelhantes e figuras congruentes?

b) Quantas duplas de figuras semelhantes podem ser formadas?

c) Quantas duplas de figuras congruentes podem ser formadas?

d) Quantas duplas de figuras podem ser formadas?

e) Qual a chance de sortear duas figuras congruentes?

f) Qual a chance de sortear duas figuras semelhantes?

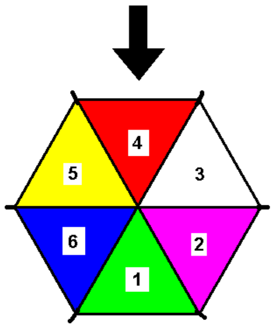
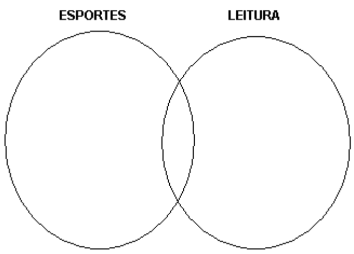
O exercício número um trabalha com a combinação de seis elementos tomados dois a dois e três a três. Depois de desenvolvidos e explorados alguns exercícios em sala esperamos que os alunos utilizem a multiplicação das possibilidades seguido da divisão para se retirar o excesso. Na letra **a** como são escolhidos dois sabores temos as opções 6 x 5 = 30, sendo que cada opção é repetida duas vezes (limão-maçã = maçã-limão) e assim 30 / 2 = 15 possibilidades. Na letra **b** os alunos devem escolher três sabores por isso 6 x 5 x 4 = 120 e como cada opção é repetida seis vezes (Abacaxi-Limão-Maçã, A-M-L, L-A-M, L-M-A, M-A-L e M-L-A) temos 120 / 6 = 20 opções.

O exercício dois é semelhante ao exercício três aplicado em sala de aula com o intuito de verificar o aprendizado do aluno em relação à diferença arranjo e combinação. Esperamos que os alunos utilizem não só a multiplicação das possibilidades mas também a escrita das opções como na letra **b** na qual temos quatro pessoas para o cargo de presidente e vice-presidente: Paula-Pedro, Paula-Marcelo, Paula-Bruna mais três opções tendo Pedro presidente, mais três tendo Marcelo presidente e três tendo Bruna presidente num total de 12 opções que também podem ser encontradas, mais facilmente, pela multiplicação das opções (4 pessoas para presidente e três pessoas para vice-presidente) 4 x 3 = 12.

Já o exercício três envolve a idéia de figuras semelhantes e figuras congruentes. Estes conceitos foram estudados anteriormente e devem ser recordados para o cálculo das opções. O exercício também explora a idéia de probabilidade ao calcular a chance de se retirar uma figura congruente ou retirar uma figura semelhante.

Na semana seguinte após recolhidas a ficha de atividades para casa foi proposta a terceira parte da atividade que trabalha a introdução do cálculo da probabilidade. Esta parte é de extrema importância pela relevância que o raciocínio combinatório tem no estudo das probabilidades. Nesta parte os exercícios têm por objetivo proporcionar ao aluno a associação dos conteúdos anteriormente trabalhados nas atividades aplicadas com seu conhecimento prévio de probabilidade desenvolvido no dia a dia.

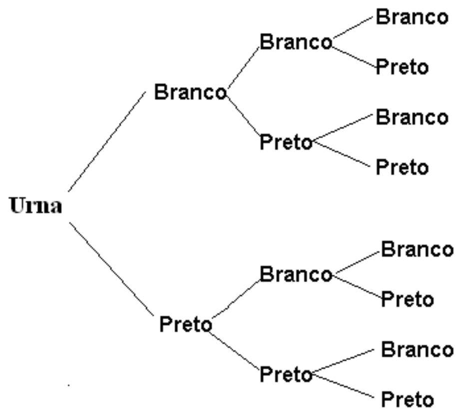
Seqüência de Atividades 3

3ª Ficha de Atividades – para sala
1) No jogo de roleta em uma das barraquinhas da festa junina as regras são as seguintes: Números 1, 3 e 5 – Você perde. Número 2 – Você ganha uma bola. Número 4 – Você ganha um pacote com balas e doces. Número 6 - Você ganha um bicho de pelúcia. Determine: 
a) Qual o número de possibilidades de se jogar e ganhar algum brinde?
b) Qual a razão entre o número de possibilidades de se ganhar um brinde e o número total de possibilidades?
c) O que representa esta razão calculada no item anterior?
d) Qual a chance de se perder?
e) Elabore e resolva uma questão envolvendo este jogo.
2) Em uma urna estão 6 cartões sendo que 3 cartões são pretos e 3 cartões são brancos. Retirando sucessivamente 3 cartões (sem reposição), determine:
a) As opções, através da árvore de possibilidades, para os três cartões retirados.
b) A chance de que os três cartões tenham a mesma cor.
c) Sabendo-se que o primeiro cartão retirado é branco determine a chance de que os outros dois cartões tenham a mesma cor.
3) Num grupo de 30 alunos temos 12 alunos que gostam de leitura, 21 alunos que gostam de esportes e 6 alunos que não gostam nem de leitura e nem de esportes. Analise os dados do exercício e responda justificando:
a) Complete o diagrama com o número de alunos: 
b) Qual a razão entre o número de alunos que não gostam de esportes e o total de alunos? O que representa esta razão? Justifique sua resposta.

3ª Ficha de Atividades – para sala – continuação
c) Qual a porcentagem dos alunos que gostam de esporte ou de leitura? Justifique sua resposta.
d) Qual a porcentagem dos alunos que gostam somente de esportes? Justifique sua resposta.
4) Quando Pedro foi se vestir, ficou na dúvida de qual roupa iria usar. Sabendo-se que, em seu guarda-roupa, Pedro tinha três calças (Preta, Azul e Cinza) e quatro camisetas (Azul, vermelha, Cinza e branca) determine:
a) Monte uma tabela para representar as opções de Pedro se vestir naquele dia?
b) No dia a dia ouvimos falar em Probabilidade de um evento. A probabilidade permite expressarmos a chance de um evento acontecer sendo representada por uma fração, por um número decimal ou por uma porcentagem. Por exemplo, no exercício anterior, da roleta, a probabilidade (chance) de sair um número par é 50% $\left(\frac{3}{6}\ ou\ 0{,}5\right)$. Sendo assim, qual é a probabilidade de que Pedro escolha ao acaso uma calça e uma camiseta da mesma cor? Expresse o resultado usando formas diferentes.
6) Marcos e João resolveram jogar dados. Classifique como Verdadeiro(V) ou Falso(F) as afirmações feitas pelos dois amigos. (Justifique suas respostas). 
a) João afirmou que se jogasse o dado uma vez a probabilidade de sair um número maior que três é de 50%.
b) Marcos afirmou que se jogassem dois dados de uma vez, a probabilidade da soma dos dois números encontrados ser igual a seis é maior que $0{,}2$.
c) João afirmou que se jogassem dois dados de uma vez, a probabilidade da soma ser maior que nove sabendo-se que um dos dados apresentou o número 5 é de $\frac{1}{9}$ (uma no total de nove possibilidades).
d) Marcos afirmou que se jogassem três dados de uma vez, a probabilidade dos três números serem pares é de 12,5%.

O primeiro exercício desta atividade é mais geral e explora alguns conceitos importantes para o estudo da probabilidade. O cálculo das possibilidades de um determinado evento ocorrer é trabalhado em paralelo com a idéia da chance de um evento ocorrer, falar em probabilidade é falar em razão (possibilidades desejáveis/total de possibilidades), mas nem sempre o aluno percebe esta relação tornando-se necessário exercícios que o conduzam a esta visão. Acreditamos que os alunos possam estabelecer uma relação com o cálculo da porcentagem, pois é um conceito que eles já conhecem e que pode ser mais desenvolvido nestas atividades. Na letra **e** os alunos são desafiados a criar e resolver um exercício envolvendo o jogo da roleta. Acreditamos que os alunos devem fazer a opção por exercícios nos quais se calcula o número de possibilidades de um determinado evento ocorrer em detrimento a exercícios nos quais se calcula a chance deste evento. Como os alunos geralmente estão acostumados a aprender os conteúdos e reproduzir mecanicamente os seus cálculos, acreditamos que eles possam ter dificuldades para criar esta questão.

No exercício dois exploramos o uso árvore das possibilidades como forma de calcular as possibilidades para que o aluno possa perceber o vínculo existente entre os conteúdos trabalhados. Esperamos que uma vez feita a árvore de possibilidades os alunos não tenham dificuldades para encontrar as respostas.



Neste exercício, na letra **c**, se introduz a idéia da probabilidade condicionada e os alunos podem utilizar a própria árvore das possibilidades para fazer o cálculo. Esperamos que os alunos utilizem a razão para os cálculos e que alguns possam responder algumas questões através da porcentagem .

No exercício três trabalhamos a probabilidade associada à idéia de conjuntos na qual se explora a probabilidade da intersecção e união. O trabalho com diagrama é novo para os alunos, uma vez que este conteúdo é mais explorado no 1º ano do ensino médio dentro do conteúdo de conjuntos. Os alunos devem apresentar uma maior dificuldade para resolver a letra **d** que exige separar os alunos que gostam somente de esporte daqueles que gostam de outras atividades. A dificuldade encontrada neste exercício não está no cálculo das possibilidades e sim no trabalho com conjuntos.

O exercício quatro é um exercício de extrema importância dentro desta atividade. Além de explorar o uso da tabela como mais uma ferramenta para facilitar o cálculo das possibilidades ele faz a associação do cálculo das chances com a idéia de probabilidade. O termo probabilidade é apresentado e explorado por três formas de representação: Fração, decimal e percentual. Como os alunos já fizeram a tabela na letra **a**, acreditamos que eles não apresentem dificuldades para calcular a probabilidade utilizando os diferentes registros de representações.

No exercício cinco exploramos as diferentes formas de se apresentar a probabilidade. Neste exercício trabalhamos eventos simultâneos e a probabilidade condicional. Nas letras **a, b** e **c** os alunos não devem encontrar problemas por serem exercícios bem simples sendo que na letra **a** das seis possibilidades temos três (4, 5 e 6) que interessam, na letra **b** as possibilidades que interessam são (1 e 5), (2 e 4), (3 e 3), (4 e 2) e (5 e 1) num total de 36 possibilidades (6 x 6 = 36) e na letra **c** das 36 opções existente, calculadas no item anterior, aquelas que interessam são (5 e 5), (5 e 6) e (6 e 5).

Acreditamos que na letra **d** os alunos tenham mais dificuldades por se tratar de um número maior de possibilidades. Para a resolução da letra **d** é possível trabalhar com a escrita das opções (2-2-2, 2-2-4,...) o que dificultaria o cálculo, tornando a multiplicação das possibilidades uma opção mais fácil. Temos as possibilidades dos três números retirados serem pares calculadas através da multiplicação 3 x 3 x 3 = 27 num total de 6 x 6 x 6 = 216 possibilidades. A dificuldade dos alunos não está na situação apresentada pelo exercício, mas sim no caminho que os alunos possam escolher para resolvê-lo.

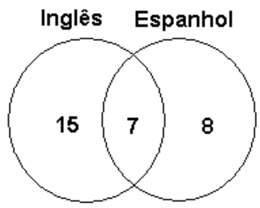
Após a resolução e exploração destes exercícios foi proposto que os alunos levassem para casa uma ficha de atividades com outros cinco exercícios e que resolvessem, individualmente, para entregar uma semana depois (na próxima aula).

3ª Ficha de Atividades – para casa
1) Um casal tem cinco filhos, sendo três homens e duas mulheres. Eles têm que escolher dois filhos para participarem de uma gincana entre famílias.
a) Escreva quais as possibilidades que esta família tem para escolher a dupla de filhos.
b) Se Bia é uma das filhas deste casal, determine a probabilidade, em porcentagem, de que Bia faça parte desta dupla.
c) Qual a probabilidade de que a dupla seja formada somente por homens?
2) Em um grupo de trinta alunos quinze estudam espanhol, vinte e dois estudam inglês e sete alunos estudam inglês e espanhol. Sabendo-se que um aluno vai ser escolhido para uma viagem determine:
a) Qual a probabilidade, em porcentagem, do aluno escolhido ser aluno do curso de inglês?
b) Qual a probabilidade, em porcentagem, do aluno escolhido ser aluno somente do curso de inglês?
c) Qual a probabilidade, em porcentagem, do aluno escolhido ser somente aluno do curso de espanhol?
3) Um baralho é composto por cartas divididas em quatro naipes (Espadas, Paus, Ouros e Copas. Há 13 cartas de cada naipe, sendo um Ás, os números de 2 a 10 e três figuras (Rei, Dama e Valete). 
a) Retirando-se uma carta do baralho determine a probabilidade, em porcentagem, de se retirar uma carta de copas.
b) Sabendo-se que foi retirada uma carta de copas, qual a probabilidade desta carta ser um número maior que seis?
c) Retirando-se duas cartas do baralho determine a probabilidade, em porcentagem, de se retirar figuras ou carta de copas.

3ª Ficha de Atividades – para casa – continuação
4) Lançando uma moeda temos 50% de chance de tirar cara e 50% de chance de tirar coroa.
a) Lançando-se duas moedas, determine os possíveis resultados utilizando a árvore das possibilidades.
b) Lançadas as duas moedas qual a probabilidade de se tirar duas coroas?
c) Lançadas as duas moedas qual a probabilidade de que as duas apresentem o mesmo resultado?
d) Se fossem lançadas três moedas, qual a probabilidade do número tirado de caras ser maior que o número tirado de coroas? (Resolva sem escrever as opções explicando seu raciocínio).
5) Em uma caixa são colocadas bolas numeradas de 1 a 8.
a) Retirando-se uma bola da caixa, determine qual a probabilidade de sair um número múltiplo de 3?
b) Retirando-se duas bolas sucessivamente (sem reposição), determine a probabilidade de que a soma dos números seja maior que dez sabendo-se que uma das bolas retirada é o número 6?
c) Retirando-se duas bolas ao mesmo tempo, determine a probabilidade de que os seus números sejam consecutivos?

No primeiro exercício os alunos são induzidos a escrever quais são as possíveis duplas. Neste caso esperamos que trabalhem com letras ou nomes fictícios. Pedro, Douglas, Marcio, Bia e Lucia podem formar as seguintes duplas Pedro e Douglas, Pedro e Marcio.... Tendo escrito as opções, como na letra **a**, fica fácil resolver as demais.

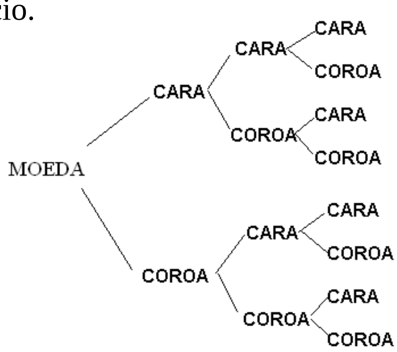
O segundo exercício é uma forma de revisar o trabalho com conjuntos. Como a atividade foi resolvida e depois discutida em sala, esperamos que os alunos não tenham dificuldades em resolver este exercício. O trabalho com o diagrama, mesmo que não sendo pedido, deve ser utilizado pelos alunos uma vez que foi trabalhado anteriormente e facilita muito os cálculos.



O terceiro exercício tem por objetivo reforçar a probabilidade condicional na letra **b** ao propor que a carta seja de copas e assim se calcula a probabilidade de ser maior que seis. Outro objetivo é trabalhar a probabilidade da união de dois eventos na letra **c** em que se deseja calcular a probabilidade de retirar uma figura ou uma carta de copas tendo como fator complicador o fato de que temos cartas de copas que são figuras.

O quarto exercício trabalha o lançamento de moedas em que as letras **a, b** e **c** apresentam a mesma situação (lançamento de duas moedas). Como na letra **a** sugerimos que se utilizassem da árvore das possibilidades para mostrar as possibilidades, acreditamos que as letras **b** e **c** possam ser resolvidas de forma direta.

Na letra **d** esperamos que os alunos também utilizem a árvore das possibilidades para resolver o exercício.



O exercício 5 é o que apresenta o maior grau de dificuldade dos exercícios explorados. A letra **a** é mais fácil, pois são dois os múltiplos de três (3 e 6) compreendidos de 1 a 8. A letra **b** e **c** são parecidas, porem escritas de forma diferente. Na letra **b** falamos da retirada de duas bolas sucessivamente e por isso é necessário falar da reposição ou não da bola retirada, mas na letra **c** como falamos da retirada de duas bolas ao mesmo tempo não é necessário. Na letra **b** temos 8 possibilidades para primeira bola e 7 possibilidades para segunda bola num total de 8 x 7 = 56 possibilidades. Considerando ou não a ordem dos termos o resultado encontrado seria o mesmo. Se os alunos trabalhassem com estas 56 possibilidades teriam seis possibilidades interessantes para o exercício (5 e 6, 7 e 6, 8 e 6, 6 e 5, 6 e 7, 6 e 8) assim um total de 6 em 56 ou 10,7%. Mas se ao invés de trabalhar com as 56 possibilidades os alunos considerarem que a ordem não importa, ou seja, 1 e 6 é a mesma coisa que 6 e 1 então seriam 3 possibilidades num total de 28 o que corresponde aos mesmos 10,7%. A letra **c** apesar de falar de números consecutivos envolve a mesma perspectiva da letra **b** e assim não depende da relação que os alunos estabeleçam para a ordem dos termos.

Após recolhidas as atividades propostas para casa, as duplas são novamente reunidas para última parte da atividade. Esta última parte está relacionada com a sistematização das idéias trabalhadas nas atividades anteriores. Assim os alunos poderão perceber que os exercícios resolvidos e os métodos utilizados são conhecidos e existe toda uma teoria por traz deles. Neste tipo de atividade o aluno se sente participante no processo ensino-aprendizagem, pois quando se sistematiza a teoria isso acontece de forma natural, como decorrência dos exercícios explorados.

Seqüência de Atividades 4

4ª Ficha de Atividades (1ª parte) – para sala
Os exercícios que temos resolvido envolvem o conteúdo matemático chamado ANÁLISE COMBINATÓRIA. A Análise Combinatória, como o próprio nome diz, estuda, analisa, as diferentes formas de agrupar elementos e de contar os grupamentos possíveis feitos com elementos de um determinado conjunto, de forma a satisfazer certas condições. Nos estudos de Análise Combinatória o princípio mais importante é conhecido como **PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.** Este princípio permite calcular as possibilidades de ocorrência de um evento, sem a necessidade de descrever todas as possibilidades Na 1ª atividade o exercício número 2 no qual os alunos desejam montar os uniformes tendo seis cores de camisa e cinco cores de short é resolvido, como foi visto, sem se escrever todas as opções, mas simplesmente através da multiplicação 6 x 5 = 30 opções de uniformes. Assim também as tarefas 3c e 4c foram resolvidas da mesma forma. Na resolução dessas tarefas foi usado o **Princípio Fundamental da Contagem** (conhecido também como Princípio multiplicativo)
1) Enuncie com suas palavras o **Princípio Fundamental da Contagem.**
2) Elabore um problema cuja solução possa ser obtida usando o **Princípio Fundamental da Contagem** e expressa na forma: **R =** 4 x 3 x 2
3) Em algumas situações precisamos agrupar todos os elementos de um conjunto. É o caso, por exemplo, de se montar anagramas de uma palavra. Se a palavra tem 3 letras distintas, quantos anagramas podem ser formados: E se o número de letras for 6?

4ª Ficha de Atividades (1ª parte) – para sala – continuação
Nesses casos importa a ordem de disposição dos elementos, que são distintos e todos os elementos são considerados. A operação matemática no caso é chamada **permutação simples** dos elementos do conjunto. Assim se a palavra tem 3 letras, existem P_3 permutações com $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ anagramas.
4) Se a palavra tem 5 letras, existem P_5 permutações com $P_5 =$ ....
De modo geral se temos **n** elementos distintos, então o número de agrupamentos ordenados ou permutações simples que podemos obter com todos os **n** elementos é obtido calculando-se $P_n =$ ....
Curiosidade. Em Matemática o número 4 x 3 x 2 x 1 é chamado fatorial de 4 e denotado por 4! Você sabe dizer o valor de: $a)\ \frac{7!}{4!} \qquad b)\ \frac{5!}{2!3!}$

4ª Ficha de Atividades (2ª parte) – para sala
Existem dois tipos fundamentais de operação que podem ser usados em exercícios de contagem: **Arranjo** e **Combinação**. Vimos que a grande diferença dos dois está relacionada com a ordem dos termos. No **Arranjo** a ordem dos termos é importante, por exemplo, os números 123 e 132 ficam diferentes após a troca da ordem dos termos. Já na **Combinação** a ordem dos termos não importa, por exemplo, um suco de mamão e laranja é a mesma coisa que laranja e mamão. No exercício 3, da 2ª ficha de atividade para sala, foram apresentadas duas situações com o mesmo número de elementos nas quais a operação exigida é diferente para cada letra. Na letra **a** temos os algarismos 1, 2, 3, e 4 com os quais devemos formar números de três algarismos distintos. Este exercício envolve a idéia de arranjo, pois a ordem é importante e assim as opções podem ser calculadas pela multiplicação das possibilidades. $\underline{\ 4\ } \times \underline{3} \times \underline{\ 2\ } = 24$ possibilidades.

4^a Ficha de Atividades (2^a parte) – para sala – continuação
Na letra **b** do exercício mencionado, deseja-se escolher três acompanhamentos dentre os quatro possíveis: arroz, feijão, fritas e legumes. Vimos que são 4 as opções possíveis: arroz-feijão-legumes, arroz-feijão-fritas, arroz-legumes-fritas e legumes-feijão-fritas. Apesar de as letras **a** e **b** tratarem da mesma quantidade de elementos as respostas são diferentes. Na letra **a** encontramos 24 possibilidades e na letra **b** 4 possibilidades. Esta diferença acontece, como vimos, porque no exercício dos acompanhamentos a ordem dos termos não importa e assim a mesma opção pode ser repetida 6 vezes: arroz-feijão-fritas = arroz-fritas-feijão = fritas-feijão-arroz = fritas-arroz-feijão = feijão-fritas-arroz = feijão-arroz-fritas. Por isso 24 opções / por 6 repetições= 4 possibilidades.
Nos exercícios de arranjos multiplicamos as opções e nos exercícios de combinação multiplicamos as opções e dividimos pelas repetições.
1) Suponhamos um exercício de arranjo no qual temos 5 elementos(A, B, C, D e E) e devemos escolher dois. Qual o número de possibilidades?
2) Se o exercício anterior envolvesse a idéia de combinação, qual seria o número de opções?
3) Se dos 5 elementos tivéssemos que escolher 4 elementos qual seria a reposta para o exercício de arranjo e para o exercício de combinação?
4) Sendo os números 1, 2, 3 e 4 um aluno montou uma forma de resolver o exercício da escolha do números de algarismos distintos. Para calcular o número de possibilidades de se montar um número de dois algarismos ele montou: $\frac{5!}{(5-2)!}$
a) Calcule e confirme a resposta.
b) Qual a fórmula para calcular as possibilidades de se formar um número de três algarismos distintos, através da expressão do aluno?
c) Se tivéssemos n elementos para formar um número de p algarismos através da expressão do aluno, qual seria a fórmula?

4ª Ficha de Atividades (2ª parte) – para sala – continuação
5) Sejam Marcos, Bruno, Pedro, Nair e Lucas um grupo de amigos com o qual se deseja formar duplas. O mesmo aluno montou uma forma de resolver o exercício. Tendo 5 elementos para escolher dois temos $\frac{5!}{(5-2)!}$ como cada dupla é repetida duas vezes(Pedro e Nair = Nair e Pedro) ele dividiu por 2!. Assim a resposta final é $\frac{5!}{(5-2)!.2!}$.
a) Se dos 5 amigos tivéssemos que formar um trio qual seria a expressão que o aluno iria montar ?
b) Se tivéssemos **n** amigos e tivéssemos que escolher um número **p** de amigos, qual seria a fórmula para se calcular as possibilidades?

4ª Ficha de Atividades (3ª parte) – para sala
Como foi visto na 3ª ficha de atividade para sala os exercícios nos quais se calculam as chances de um determinado evento ocorrer são conhecidos como exercícios de probabilidade. No exercício 5 da 3ª ficha de atividade para sala é explorado o lançamento dos dados. Afirma-se que ao lançar um dado a probabilidade (chance) de sair um número maior do que três é de 50%. Quando o dado é lançado existem seis possibilidades para o resultado: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Este total de possibilidades é conhecido como **espaço amostral**. Mas o que o exercício pede é que o número alcançado seja maior que três e assim temos como possibilidades 4, 5, e 6. Para a situação descrita temos $P(A) = \frac{3}{6}$ sendo que: **A** representa <u>o evento sair um número maior que 3</u>; o numerador 3 representa ______________________________________; e o denominador 6 indica ______________________________________.
1) Explique, com suas palavras, como se calcula a probabilidade de um evento acontecer?

4ª Ficha de Atividades (3ª parte) – para sala – continuação
2) Retomemos o exercício trabalhado anteriormente. Marcos, Bruno, Pedro, Nair e Lucas desejam formar duplas para um torneio. a) Queremos determinar qual a probabilidade de que a dupla formada seja composta por duas pessoas do mesmo sexo. i. Qual o espaço amostral e qual o número de elementos desse espaço? ii.Qual o evento que se deseja que ocorra? Quais e quantas são as possibilidades desse evento ocorrer? iii.Expresse a probabilidade, do enunciado, por meio de uma fração.
b) Qual a probabilidade de se formar um trio no qual Bruno esteja presente?
3) Em uma urna são colocados 12 cartões numerados de 1 a 12. Suponhamos que a pessoa vá tirar dois cartões consecutivamente, sem reposição. a) Determine a probabilidade de que os dois cartões sejam de números pares.
b) Existe um tipo de probabilidade conhecida como **probabilidade condicional.** Neste caso, calculamos a probabilidade de um evento **A** acontecer sendo que um evento **B** já aconteceu. Um evento está condicionado ao outro. **Um exemplo**: Queremos calcular a probabilidade de que a soma dos dois cartões retirados seja maior que 12 sendo que o primeiro cartão retirado seja o de número 4. Para calcular esta probabilidade temos que calcular as possibilidades de que a soma seja maior que 12 e, ao mesmo tempo, que o primeiro número seja o 4. Qual o valor da probabilidade pedida?
b) Monte um exercício considerando a mesma urna com 12 cartões numerados de 1 a 12 que também exija o cálculo de probabilidade condicional.

Esta sequência de atividades foi dividida em três partes sendo a primeira responsável por apresentar e desenvolver o princípio fundamental da contagem e a permutação simples utilizados em exercícios anteriores. Os alunos, nesta parte, vão ter contato com o conceito de fatorial e assim chegar à fórmula da permutação.

Na segunda parte desta atividade é retomada a diferença entre arranjo e combinação que já foi apresentada e explorada em outros exercícios. Mas o que diferencia esta atividade das outras é que os alunos são levados a utilizarem o fatorial para encontrar as fórmulas de arranjo $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ e combinação $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Na terceira parte desta atividade exploramos a idéia de probabilidade apresentando a definição de espaço amostral e explorando a probabilidade como uma razão entre o total de possibilidades desejadas e o total de possibilidades. O aluno é levado a explicar a probabilidade com suas palavras e tem um contato com a definição de probabilidade condicional, sendo desafiado a criar um exercício que envolva este tipo de raciocínio.

Terminada a aplicação destas atividades podem ser desenvolvidos outros dois tipos de atividades: a primeira que não foi mencionada e que acontece como conseqüência do desenvolvimento do ano letivo é a avaliação, a segunda é um questionário cujo objetivo é que os alunos avaliem o tipo de trabalho desenvolvido.

No final do mês de novembro a escola, onde a pesquisa foi conduzida, tem uma semana de provas finais, nas quais os professores avaliam os últimos conteúdos trabalhados. Assim nesta turma foi aplicada a avaliação abaixo que é composta de oito questões baseadas nas atividades aplicadas e que também serviu como fonte de dados para a pesquisa.

Avaliação

1) Em um jogo são utilizados dois dados. Um dado contendo números de 1 a 6 e o outro contendo seis cores (azul, amarelo, branco, preto, verde e vermelho).Lançam-se dois dados ao mesmo tempo.

a) Preencha a tabela do espaço amostral.

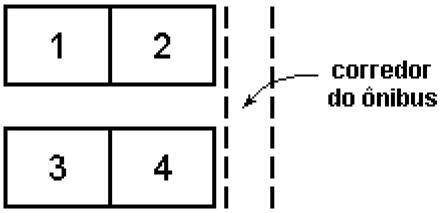
continuação da avaliação

b) Qual a probabilidade de sair um número maior que 4 e a cor verde?

c) Qual a probabilidade de sair um número impar ou a cor branca?

2) Marcos, Pedro, Bruna e Luiza irão viajar de ônibus, ocupando as poltronas de números 1 a 4, com 1 e 2 juntas e 3 e 4 juntas, conforme o esquema. O número de maneiras de ocupação dessas quatro poltronas, garantindo que, em duas poltronas juntas, ao lado de uma moça sempre viaje um rapaz, é:

a) 6.   b) 8.   c) 12.   d) 16.



3) Marcelo tem 4 camisetas (branca, cinza, preta e azul), 2 bermudas(Vermelha e cinza) e 2 bonés (vermelho e preto). Determine quantas opções Marcelo tem para se vestir com uma camiseta, uma bermuda e um boné de tal forma a não repetir nenhuma cor. (Dica: Utilize a árvore de possibilidades para facilitar as contas)

a) 16.   b) 12.   c) 8.   d) 6.

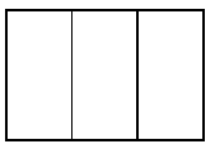
4) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra MUNDO:

a) 6   b) 24   c) 120   d) 360

5) A figura a seguir representa uma bandeira com 3 listras. Dispondo-se de 3 cores distintas(azul, branco e verde) deseja-se pintar todas as listras, de forma que listras vizinhas tenham cores diferentes.

a) De quantas maneiras distintas a bandeira pode ser pintada? Justifique escrevendo as opções

b) Escolhendo-se aleatoriamente uma das formas possíveis de pintar a bandeira, qual é a probabilidade de que a forma escolhida seja uma que contenha as 3 cores?



continuação da avaliação
6) Uma loja de doces e salgados para festas oferece três tipos de salgados: coxinha, empada e pastel que podem ser recheados de: bacalhau, frango, queijo e palmito. Faça o que se pede:
a) Monte uma árvore de possibilidades para encontrar todos os tipos de salgados variando os recheios.
b) Se uma pessoa não come coxinha nem bacalhau determine os tipos de salgados que podem ser montados de tal forma a agradar esta pessoa.
7) Uma torta salgada deve ser feita de tal forma que seu recheio contenha três dos ingredientes: presunto, carne, palmito, requeijão, azeitona e milho verde. Quantas opções existem para fazer a torta? a) 120 b) 60 c) 20 d) 16
8) Os números de telefone de uma determinada região começam com 3826, sendo que a escolha dos quatro últimos algarismos fica a critério do morador. Suponhamos que na hora de montar seu telefone Lucas, que mora na região, não possa repetir nenhum algarismo. Quantas são as possibilidades de Lucas montar seu telefone? a) 360 b) 120 c) 90 d) 60

Nesta avaliação são exploradas as diferentes formas de representação como tabela, escrita das opções, árvore de possibilidades, multiplicação das possibilidades e outras. No exercício um o aluno, induzido a utilizar uma tabela, deve trabalhar a probabilidade da união e da intersecção de eventos.

No exercício dois o aluno pode se utilizar da multiplicação das possibilidades, o que é a mais difícil pelas condições impostas pelo exercício; sendo assim esperamos que a escrita das opções seja o caminho mais adotado pelos alunos.

No exercício três a utilização da árvore das possibilidades torna o exercício facilmente resolvível sem a multiplicação das possibilidades. O que já não acontece no exercício quatro no qual se explora a idéia de permutação simples de cinco elementos. Esperamos que alguns alunos utilizem a própria fórmula de permutação.

No exercício cinco o aluno é questionado sobre o número de opções, mas também é cobrado sobre quais são estas opções o que o conduz à utilização da escrita das opções como forma de responder o exercício (Azul-branco-verde, azul-branco-azul,...). Esta escrita das opções ajuda a visualizar as opções da letra **b** e assim não se faz necessário o cálculo das possibilidades por meio da multiplicação.

No exercício seis o aluno ao utilizar a árvore das possibilidades deve perceber dentre as opções aquelas que atendem as condições propostas. Nos exercícios sete e oito o aluno deve trabalhar com o raciocínio de arranjo e combinação. No exercício sete são seis elementos para serem combinados três a três e no exercício oito que envolve a formação de números distintos depois da análise dos algarismos já utilizados deve se utilizar o arranjo dos seis algarismos restantes tomados quatro a quatro.

Para concluir a atividade foi aplicado um questionário no qual os alunos puderam expressar sua opinião e falar dos aspectos positivos e negativos desta atividade. O questionário foi aplicado na aula de outro professor, para que os alunos não se sentissem constrangidos ao avaliar o trabalho na presença do pesquisador e professor. O questionário era formado pelas seguintes questões:

Questionário
1) Dentre as atividades que desenvolvemos estudando Análise Combinatória e Probabilidades, qual a que chamou mais a sua atenção? Por quê?
2) Faça um pequeno comentário sobre os trabalhos desenvolvidos no estudo desse assunto.

6 INVESTIGAÇÕES E DESCOBERTAS DOS ALUNOS

Após a elaboração e aplicação do módulo de ensino foi feita uma análise dos resultados que é apresentada nesta parte da pesquisa. Cabe ressaltar que a turma era composta por 25 alunos que seriam divididos em onze duplas e um trio. Porém alguns problemas como atraso e faltas nos obrigaram a fazer alterações para que todos os alunos pudessem participar da atividade em grupo.

Assim dos quatro dias de atividades tivemos algumas duplas que se mantiveram e que aqui serão enumeradas:

Dupla 1 : Fernando e Henrique

Dupla 2 : Barbara e Kevin

Dupla 3: Débora e Luiza M.

Dupla 4: Guilherme e Nícolas.

Dupla 5: Ana e Gabriela F..

Dupla 6: Emily e Mariana.

Dupla 7: Carolina e Rafael

Dupla 8: Gabriela G. e Luiza O..

Além das oito duplas mencionadas outros grupos foram formados durante as sequências de atividades. No primeiro dia foram formados doze grupos sendo onze duplas e um trio, no segundo dia foram formados doze duplas, no terceiro dia foram formados oito duplas e três trios e no quarto e último dia foram formadas onze duplas e um trio.

A análise dos resultados apresentados, a princípio foi quantitativa, mapeando-se o número de acertos e erros. Posteriormente aspectos qualitativos foram considerados, como a utilização dos diferentes registros. As sequências foram analisadas separadamente sendo observadas as fichas de atividade para sala e para casa. A etapa corresponde à análise *a posteriori*, permitindo comparar as expectativas de respostas e dificuldades apontadas na análise *a priori*, (Capítulo 5) com as estratégias de raciocínio combinatório efetivamente empregadas pelos alunos.

A análise dos resultados foi apresentada em quadros nos quais os exercícios foram classificados como certo, errado, incompleto e branco. A classificação “incompleta” se faz necessário, pois em alguns exercícios nos quais os alunos optaram pela escrita das opções algumas respostas ficaram incompletas, além da falta de justificativa das respostas em exercícios que demandavam explicações. A classificação "branco" foi associada às duplas que não fizeram o exercício. Já a classificação "correta" e "errada" não está associada somente ao resultado, mas também ao cálculo apresentado pelos alunos.

6.1 Análise da Sequência de Atividades 1

6.1.1 Análise da 1ª Ficha de Atividades em sala

Esta primeira atividade era composta por quatro exercícios subdivididos em itens (a, b,...)

Nesta primeira atividade os doze grupos podem ser organizados assim:

Exercício 1	a	B	c
Certo	12	12	11
Errado	0	0	1
Incompleto	0	0	0
Branco	0	0	0

Quadro 2: Resultado do 1º exercício da 1ª ficha de atividades para sala.

O exercício 1 por se tratar do cálculo de possibilidades de um evento envolvendo um número pequeno de variáveis não ofereceu aos alunos, como previsto, muitas dificuldades. Na letra **c** além de calcular as possibilidades através da escrita das opções (Pastel -Laranja, Pastel -Uva,...) alguns alunos mudaram o registro de representação utilizando uma representação figural, como a dupla 3:

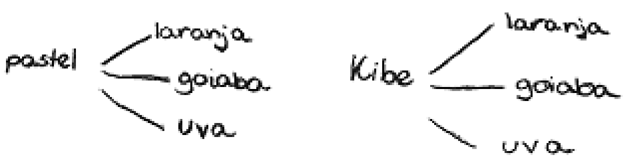


Figura 17: Extraída da 1ª ficha de atividades(para sala) da dupla 3.

A única dupla que errou a letra **c,** errou por considerar que as opções Pastel-Laranja e Laranja-Pastel são opções diferentes encontrando assim o dobro de alternativas.

Exercício 2	a	B	c	D
Certo	11	12	12	9
Errado	0	0	0	0
Incompleto	0	0	0	3
Branco	1	0	0	0

Quadro 3: Resultado do 2º exercício da 1ª ficha de atividades para sala.

O exercício 2 apresenta uma tabela, para as letras **a** e **b**, como forma de incentivar a utilização de diferente registros de representação.

Quando questionados, na letra **c,** sobre a possibilidade de fazer o exercício utilizando outro tipo de representação todas as duplas responderam sim. Os grupos fizeram a conversão de registros deixando de trabalhar com a linguagem natural, escrevendo as opções, para trabalhar com a representação figural ou, como a maioria, para trabalhar com a representação simbólico-numérica (figura 18):

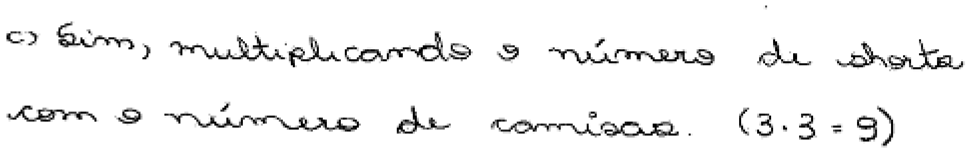


Figura 18: Extraída da 1ª ficha de atividades(para sala) da dupla 5.

Na letra **d** como conseqüência da letra **c** todos os grupos conseguiram chegar à resposta certa sendo que três grupos não justificaram os cálculos como foi pedido.

Como mencionado no capítulo 5 esta mudança de registro era esperada e consequentemente a percepção da possibilidade de transformação dentre as diferentes formas de representação.

Exercício 3	a	b	C
Certo	12	7	4
Errado	0	0	6
Incompleto	0	5	2
Branco	0	0	0

Quadro 4: Resultado do 3º exercício da 1ª ficha de atividades para sala.

O exercício número 3 envolvia o cálculo de anagramas, exercício clássico no contexto da análise combinatória.

Quando questionados sobre **quais** são os anagramas da palavra SOPA e não sobre **quantos** são, os alunos foram induzidos a perceber que à medida que vamos aumentando o número de letras a quantidade de anagramas vai aumentando e assim a escrita das opções vai ficando cada vez mais difícil, o que sugere uma transformação da representação utilizada.

Na letra **a** todas as duplas escreveram as seis opções sem problemas, o que já não aconteceu na letra **b** sendo que, aproximadamente 42% dos grupos, deixaram a resposta incompleta ao não escreverem as 24 opções, como a dupla três:

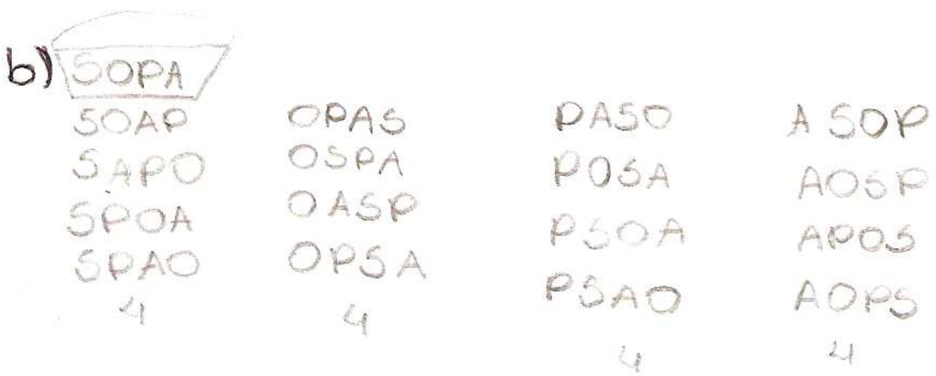


Figura 19: Extraída da 1ª ficha de atividades(para sala) da dupla 3.

Uma vez proposta a escrita das opções e percebida a dificuldade pelo aumento das letras, os alunos foram questionados, na letra **c**, sobre a possibilidade de se utilizar outro registro de representação para facilitar os cálculos.

Quatro grupos conseguiram resolver sem escrever as opções e através da conversão de registros utilizaram a multiplicação das possibilidades (figura 20) para encontrar a solução. Filipe Augusto e Maria Luiza:

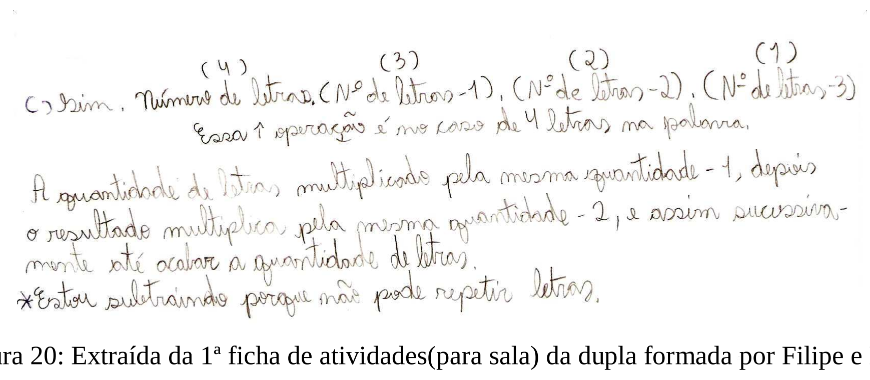


Figura 20: Extraída da 1ª ficha de atividades(para sala) da dupla formada por Filipe e Maria.

Neste caso a dupla mostrou claramente que compreendeu o princípio multiplicativo como alternativa no cálculo de possibilidades alcançando-se assim um dos objetivos propostos por esta pesquisa.

A dupla 7 chegou ao resultado através de uma representação que envolve tanto a escrita das opções quanto a multiplicação das possibilidades. No cálculo dos anagramas da palavra AMOR a dupla escreveu os anagramas que começam com a letra A e multiplicou o resultado (6 anagramas) pelo número de letras da palavra (4 letras) encontrando 24 anagramas.

Os grupos que fizeram **a** letra **b** incompletas, como era de se esperar, não conseguiram fazer a letra **c**. Além disto, dois grupos apresentaram as contas 4 x 3 x 2 x 1= 24, mas não explicaram o porquê, como foi pedido no exercício, e assim as respostas foram consideradas incompletas.

Exercício 4	a	B	c	D
Certo	11	8	5	5
Errado	0	2	3	1
Incompleto	0	0	2	0
Branco	1	2	2	6

Quadro 5: Resultado do 4º exercício da 1ª ficha de atividades para sala.

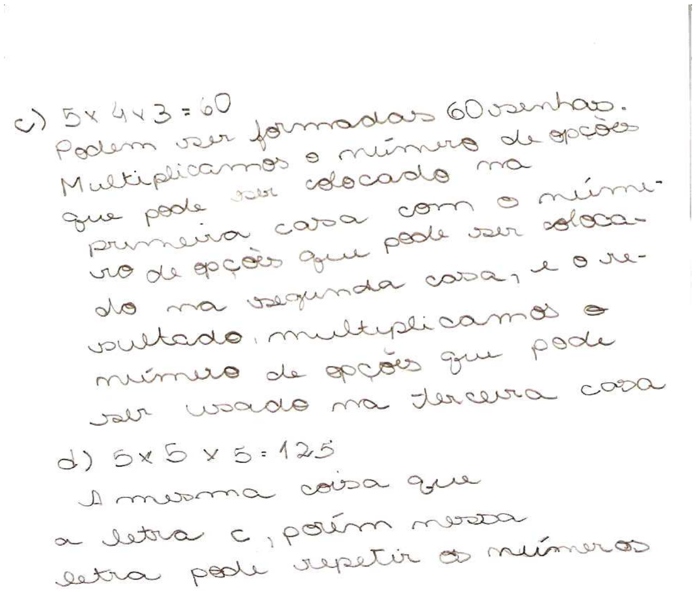
O exercício quatro trabalhava a formação de senhas e gradativamente ia aumentado o grau de dificuldade, com o aumento dos algarismos e outras condições. Na letra **a** os alunos não tiveram dificuldades e preferiram a escrita das opções como representação para resolver o exercício.

Na letra **b,** como na letra **a,** a senha deveria ser formada com três algarismos distintos, porém deveria começar com o algarismo cinco. Poucos grupos acertaram a resposta através da multiplicação das possibilidades (4 x 3 = 12) sendo que a maioria utilizou a escrita das opções.

Podemos notar, nos exercícios resolvidos, que os alunos se sentem mais seguros ao escreverem as opções. Diante desta realidade percebemos a importância de apresentar exercícios com um número maior de opções, o que os leva a pensar em alternativas de resolução utilizando outras representações e até mesmo a mudança do registro de representação.

Nas letras **c** e **d** as senhas devem ter três algarismos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, e

5 sendo distintos na letra **c** e podendo ser repetidos na letra **d**. Nestes casos teríamos um total de 60 senhas na letra **c** e 125 senhas para letra **d** o que torna a escrita das opções uma alternativa improvável. A dificuldade relatada acima fica perceptível nos resultados apresentados pela tabela na qual somente cinco grupos acertaram, utilizando a multiplicação de possibilidades, as letras **c** e **d** como a dupla 2.



c) 5x4x3=60
Podem ser formadas 60 senhas.
Multiplicamos o número de opções
que pode ser colocado na
primeira casa com o núme-
ro de opções que pode ser coloca-
do na segunda casa, e o re-
sultado multiplicamos o
número de opções que pode
ser usado na terceira casa
d) 5x5x5=125
A mesma coisa que
a letra c, porém nessa
letra pode repetir os números

Figura 21: Extraída da 1ª ficha de atividades (para sala) da dupla 2.

O trio formado por Fernanda, Gislaine e Miqueli utilizou uma representação diferente dos demais, porém sem sair do registro numérico. Na letra **d**, por exemplo, o trio escreveu as opções de senhas que começam com o número 1 (25 possibilidades) e multiplicaram pelo total de algarismos (5 algarismos) encontrando as 125 opções.

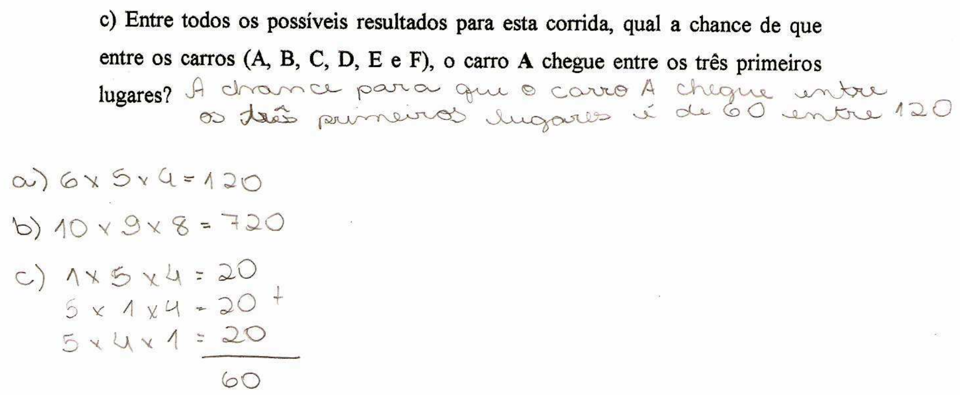
Exercício 5	A	b	C
Certo	8	6	1
Errado	1	2	6
Incompleto	0	0	1
Branco	3	4	4

Quadro 6: Resultado do 5º exercício da 1ª ficha de atividades para sala.

No exercício cinco, três dos doze grupos que participaram da atividade não conseguiram administrar seu tempo de tal forma a fazer toda a ficha de atividades deixando assim o exercício em branco. Além disto, um quarto grupo não conseguiu fazer as letras **b** e **c** deixando-as em branco.

Nas letras **a** e **b** a partir do número de corredores calculavam-se as possibilidades de chegada para uma corrida. Os grupos optaram pela multiplicação de possibilidades como forma de calcular as opções nas letras **a** e **b**.

Apenas um dos grupos (figura 22) que participou das atividades acertou a letra **c.** Nesta letra foram apresentadas duas condições que aumentaram o grau de dificuldade do exercício. Primeiro foi exigido que no cálculo das possibilidades o corredor A sempre aparecesse entre os três primeiros e, segundo, foi pedido o cálculo das chances e não só das possibilidades.



c) Entre todos os possíveis resultados para esta corrida, qual a chance de que entre os carros (A, B, C, D, E e F), o carro **A** chegue entre os três primeiros lugares? A chance para que o carro A chegue entre os três primeiros lugares é de 60 entre 120

a) 6 x 5 x 4 = 120
b) 10 x 9 x 8 = 720
c) 1 x 5 x 4 = 20
5 x 1 x 4 = 20 +
5 x 4 x 1 = 20
60

Figura 22: Extraída da 1ª ficha de atividades (para sala) da dupla 2.

A dupla 6 conseguiu calcular as possibilidades, mas não calculou as chances enquanto a dupla 1 calculou as possibilidades do corredor A chegar em primeiro mas não a possibilidade de chegar nos três primeiro lugares. Outras duas duplas associaram o cálculo da chance à idéia de porcentagem, mas não conseguiram fazer o cálculo das possibilidades apresentando a porcentagem errada.

6.1.2 *Análise da 1ª Ficha de Atividades para casa*

Dos vinte e cinco alunos da sala seis não fizeram a 1ª Ficha de Atividades para casa.

Os resultados apresentados foram os seguintes:

Exercício 1	A	b
Certo	4	6
Errado	9	5
Branco	6	8

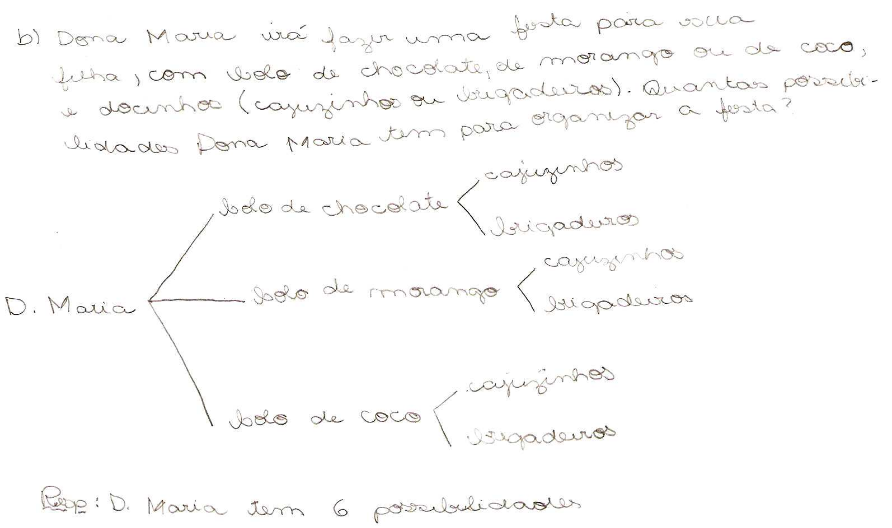
Quadro 7: Resultado do 1º exercício da 1ª ficha de atividades para casa.

O exercício número um propunha a utilização da árvore das possibilidades como mais uma possibilidade dentre os diversos registros de representação. Porém o exercício também explorava a elaboração de questões por parte dos alunos o que, geralmente, não é trabalhado com freqüência nos livros didáticos.

A ausência de atividades investigativas proporciona a mecanização do ensino, limitando assim a capacidade criativa dos alunos o que justifica o grande número de erros e de questões em branco.

A classificação errada para as letras **a** e **b** refere-se aos exercícios que foram criados, mas que não fazem sentido.

Na letra **a** como o enunciado deveria ser criado de acordo com a resposta apresentada os alunos tiveram uma dificuldade maior do que na letra **b** (figura 23) uma vez que os alunos a tiveram liberdade para criar o enunciado e depois resolver.


b) Dona Maria irá fazer uma festa para sua filha, com bolo de chocolate, de morango ou de coco, e docinhos (cajuzinhos ou brigadeiros). Quantas possibilidades Dona Maria tem para organizar a festa?

D. Maria
bolo de chocolate: cajuzinhos, brigadeiros
bolo de morango: cajuzinhos, brigadeiros
bolo de coco: cajuzinhos, brigadeiros

Resp: D. Maria tem 6 possibilidades

Figura 23: Extraída da 1ª ficha de atividades (para casa) da aluna Bárbara.

Percebemos que a utilização da árvore das possibilidades aconteceu naturalmente na letra **b**, até mesmo para alunos que não conseguiram montar o enunciado completo, mas tendo a resposta em mente.

Exercício 2	A	b
Certo	15	13
Errado	4	6
Branco	0	0

Quadro 8: Resultado do 2º exercício da 1ª ficha de atividades para casa.

No exercício dois o número de acertos foi muito alto, sendo que os alunos trabalharam com diferentes representações e em alguns casos utilizaram a conversão dos registros de representação.

Os alunos que erraram a letra **a** também erraram a letra **b**. O erro aconteceu por calcularem a possibilidade de compra de um CD **ou** um livro e não de um CD **e** um livro. Esta diferença fica evidente nas representações utilizadas pelas alunas Gabriela (figura 24) e Gislaine (figura 25) :

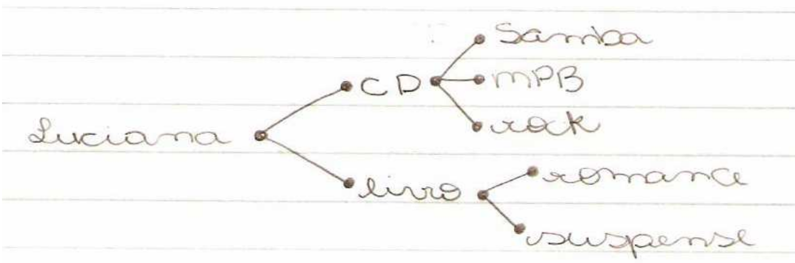


Figura 24: Extraída da 1ª ficha de atividades (para casa) da aluna Gabriela

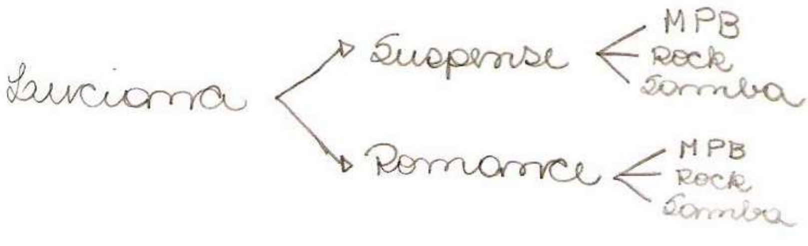


Figura 25: Extraída da 1ª ficha de atividades (para casa) da aluna Gislaine.

A aluna Gabriela trabalha com o “ou” e a aluna Gislaine trabalha com o “e” apresentando a árvore de possibilidades correta, na qual estão representadas todas as opções de compra de um livro e um CD. Exploramos aqui a diferença que existe em analise combinatória relacionada com a utilização do “ou” (associado a adição) e o “e” (associado a multiplicação). Os quatro alunos que erraram, utiizando o “ou”, somaram as três opções de CD e as duas opções de livro encontrando cinco opções, como a aluna Gabriela.

A árvore das possibilidades não foi o único registro de representação utilizado. Alguns alunos, na letra **a**, utilizaram a multiplicação das opções (2 x 3 = 6 possibilidades) e outros a escrita das opções (Romance e MPB, Romance e Rock, ...).

O exercício três apresentou um alto índice de questões em branco como podemos ver no quadro:

Exercício 3	A	b
Certo	12	4
Errado	1	1
Branco	6	14

Quadro 9: Resultado do 3º exercício da 1ª ficha de atividades para casa.

Segundo o depoimento de alguns alunos a justificativa está na dificuldade com a trigonometria, como menciona Nicolas:*"...quando fala de seno é difícil ainda mais junto com esta matéria"*. Cabe salientar que estes alunos haviam estudado o conteúdo trigonometria no triângulo retângulo antes de começarem o módulo de ensino.

Os alunos que conseguiram chegar à resposta correta na letra **a,** fizeram-no através da multiplicação das opções (3 x 2 = 6 possibilidades) e através da escrita das opções (3/4, 2/5, 4/2,...). Porém poucos alunos conseguiram calcular a chance na letra **b**. Dos quatro alunos que acertaram, dois calcularam a chance em porcentagem e para isto utilizaram a regra de três, como a aluna Gabriela M. que se esqueceu de acrescentar o símbolo de porcentagem:

Figura 26: Extraída da 1ª ficha de atividades (para casa) da aluna Gabriela M..

Os outros dois alunos escreveram a chance como razão entre o número de possibilidades desejáveis e o número total de possibilidades.

O exercício 4 era um exercício mais simples e por isso teve um índice de acerto próximo a 90%.

Exercício 4	a
Certo	17
Errado	1
Branco	1

Quadro 10: Resultado do 4º exercício da 1ª ficha de atividades para casa.

Dos 17 alunos que acertaram a questão, 15 utilizaram a representação simbólico-numérica através da multiplicação das possibilidades (4 x 3 = 12). Os outros dois alunos nomearam cada um dos caminhos com letras (A, B, C, D e E, F, G) e depois escreveram todas as opções (AE, AF,...).

O exercício cinco explorava idéias de permutação e arranjo.

Exercício 5	A	b	c
Certo	12	12	5
Errado	6	6	10
Branco	1	1	4

Quadro 11: Resultado do 5º exercício da 1ª ficha de atividades para casa.

Cinco dos doze alunos que acertaram, as letras **a** e **b**, utilizaram a escrita as opções, como a aluna Ana (figura 27) enquanto os outros seis alunos trabalharam com a representação simbólico-numérica através da multiplicação das possibilidades, como a aluna Barbara:

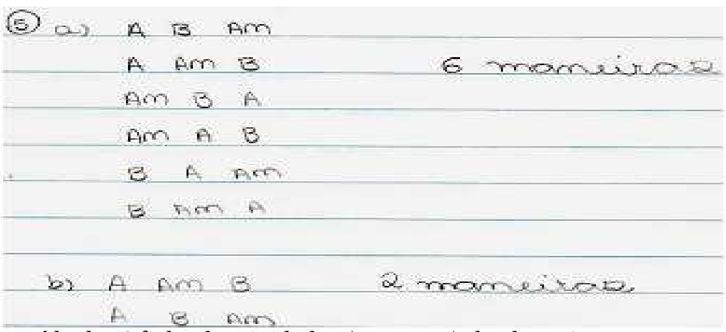


Figura 27: Extraída da 1ª ficha de atividades (para casa) da aluna Ana.

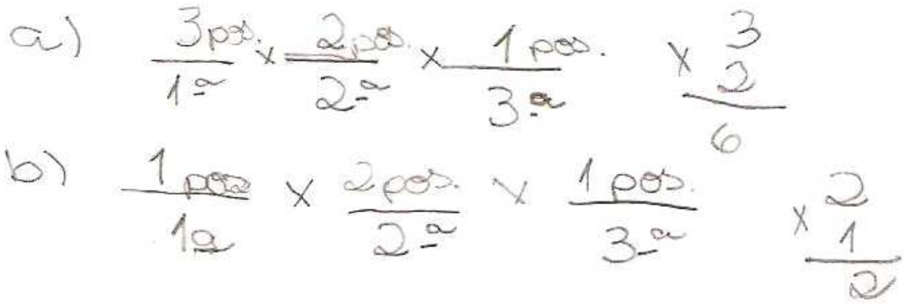


Figura 28: Extraída da 1ª ficha de atividades (para casa) da aluna Barbara.

A aluna Barbara analisou as possibilidades para cada uma das casas (representadas com 1ª, 2ª e 3ª) e depois multiplicou as possibilidades.

Na letra **c** encontramos um número grande de erros. Como o número de opções é muito alto, a opção mais viável era a multiplicação das possibilidades sendo que alguns alunos tentaram trabalhar com a escrita das opções, errando o exercício.

6.2 Análise da Sequência de Atividades 2

6.2.1 Análise da 2ª Ficha de Atividades em sala

A segunda atividade aplicada em sala foi composta por quatro exercícios que exploraram a combinação e a sistematização da diferença entre arranjo e combinação.

O exercício 1 abordou o cálculo das combinações de elementos dois a dois e três a três. Este exercício explorou, a princípio, a escrita das opções como representação para apresentar quais eram as possibilidades e na letra **c** o cálculo destas opções através de outra representação que não seja a linguagem natural. Os resultados podem ser analisados mediante o quadro:

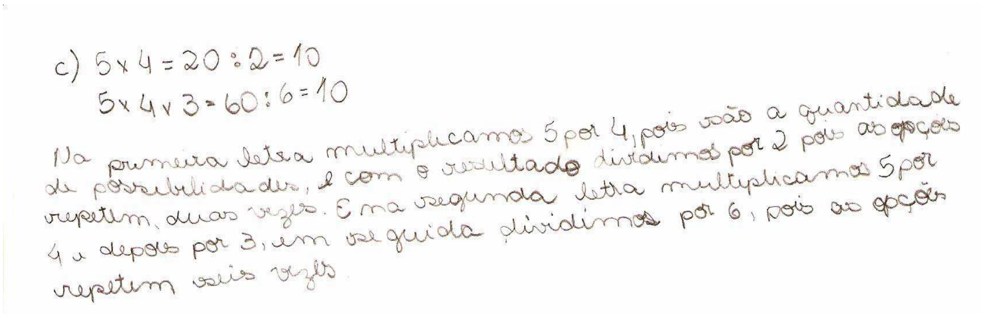
Exercício 1	A	b	c
Certo	12	6	3
Errado	0	3	3
Incompleto	0	3	1
Branco	0	0	5

Quadro 12: Resultado do 1º exercício da 2ª ficha de atividades para sala.

As letras **a** e **b** apresentam a mesma resposta, porém com números de elementos diferentes (dois na letra **a** e três na letra **b**). Esta variação de elementos justifica a diferença de resoluções corretas da letra **a** para a letra **b.** Das seis duplas que não erraram a letra **b**, três escreveram de forma incompleta as opções e as outras três duplas colocaram opções nas quais os elementos se repetiam e assim uma mesma opção foi contada mais de uma vez.

A maior parte das duplas que acertarou as letra **a** e **b** utilizou a representação figural para facilitar a visualização e depois escrever as opções.

Na letra **c** as duplas foram questionadas sobre a possibilidade de calcular as opções das letras **a** e **b** sem escrevê-las. As duplas que responderam corretamente mudaram o registro de representação utilizado passando da linguagem natural para a representação simbólico-numérica da multiplicação das possibilidades, associada à divisão como forma de retirar o excesso de possibilidades (possibilidades que se repetem). Como a dupla 2:


c) $5 \times 4 = 20 : 2 = 10$

$5 \times 4 \times 3 = 60 : 6 = 10$

Na primeira letra multiplicamos 5 por 4, pois são a quantidade de possibilidades, e com o resultado dividimos por 2 pois as opções repetem duas vezes. E na segunda letra multiplicamos 5 por 4 e depois por 3, em seguida dividimos por 6, pois as opções repetem seis vezes.

Figura 29: Extraída da 2ª ficha de atividades (para sala) da dupla 2.

Uma dupla conseguiu fazer o cálculo da letra **a**, mas não conseguiu justificar o resultado da letra **b** e por isso o exercício foi considerado incompleto. As três duplas que erraram o exercício encontraram as opções corretas nas letras **a** e **b,** mas quando mudaram o registro de representação, na letra **c,** simplesmente multiplicaram as possibilidades e não retiraram as opções repetidas encontrando resultados diferentes dos encontrados nas letras anteriores.

Exercício 2	a
Certo	11
Errado	1

Quadro 13: Resultado do 2º exercício da 2ª ficha de atividades para sala.

No exercício dois os alunos não encontraram muitas dificuldades ao trabalharem a combinação de dois pontos utilizando diferentes registros de representação como a representação figural (figura 30), a escrita das opções e a multiplicação das possibilidades.

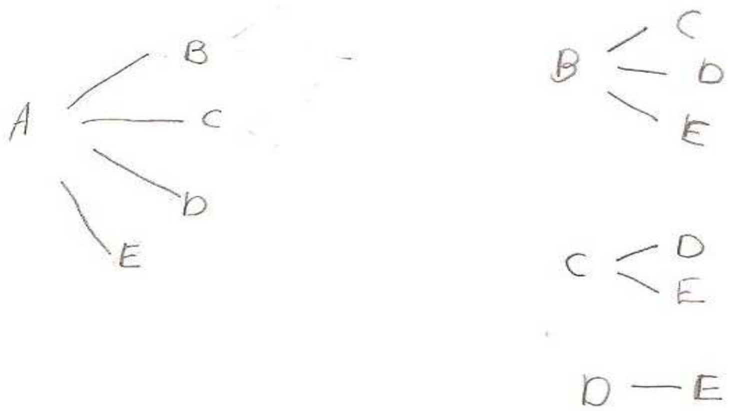


Figura 30: Extraída da 2ª ficha de atividades (para sala) da dupla 4.

A única dupla que apresentou a resolução incorreta utilizou dois diferentes registros de representação (escrita das opções e representação simbólico-numérica), porém obteve resultados diferentes.

O exercício três apresentou situações que envolvem o mesmo número de variáveis, porém com idéias diferentes (arranjo e combinação). O exercício apresentou um índice de acerto de 83,33%. O objetivo da questão acerca da percepção da ordem dos termos como recurso essencial para o cálculo das possibilidades, foi alcançado.

Exercício 3	A	b	c
Certo	11	10	9
Errado	0	2	2
Incompleto	1	0	0
Branco	0	0	1

Quadro 14: Resultado do 3º exercício da 2ª ficha de atividades para sala.

Na letra **a** as onze duplas que acertaram utilizaram a multiplicação das possibilidades como recurso para encontrar as opções. A única dupla que trabalhou com a escrita das opções conseguiu encontrar 19 opções deixando o exercício incompleto.

Na letra **b,** como envolve a idéia de combinação, os alunos foram questionados sobre quantas e quais as opções. Se trabalhassem somente com a quantidade, muitos deixariam passar despercebida a repetição das opções o que justifica a inclusão da pergunta “quais?” para levar os alunos a escreverem as opções e notarem o excesso. Mesmo assim uma dupla desprezou a idéia de quantas são as opções e repetiu o cálculo da letra anterior encontrando 24 opções sendo que deveria encontrar somente 4 opções.

As duas duplas que erraram a letra **b** consequentemente erraram a letra **c**, pois deveriam comparar os resultados encontrados nos itens anteriores. Por outro lado as duplas que acertaram a letra **c** perceberam a diferença associada à ordem dos termos e utilizaram da argumentação pautada na repetição das alternativas como motivo para as respostas serem diferentes. A dupla 5 apresentou a seguinte justificativa:

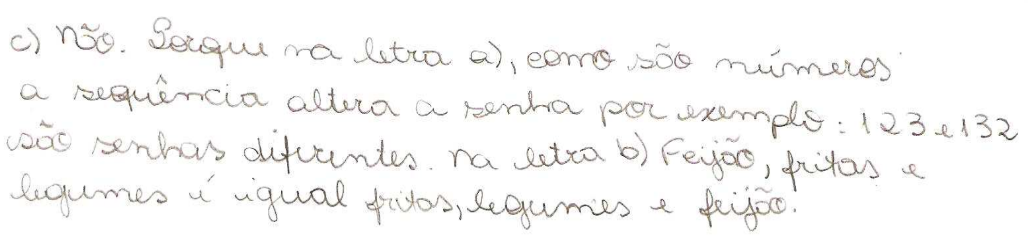

c) Não. Porque na letra a), como são números a sequência altera a senha por exemplo: 123 e 132 são senhas diferentes. na letra b) Feijão, fritas e legumes é igual fritos, legumes e feijão.

Figura 31: Extraída da 2ª ficha de atividades (para sala) da dupla 5.

Diante dos resultados e das justificativas apresentadas pelos alunos podemos concluir que o objetivo foi alcançado à medida que os grupos conseguiram efetuar os cálculos e perceber a diferença existente nos exercícios referente à importância, ou não da ordem dos termos.

No exercício quatro os alunos tiveram contato com os conceitos de arranjo e combinação e mediante a análise dos exercícios resolvidos anteriormente tiveram que classificá-los.

Exercício 4	a	b	c	d
Certo	12	10	10	11
Errado	0	2	2	1

Quadro 15: Resultado do 4º exercício da 2ª ficha de atividades para sala.

Percebemos pelos resultados e pelas justificativas encontradas que os objetivos deste exercício foram alcançados. Das duplas que acertaram todas as letras a maior parte utilizou exemplos como forma de justificar as respostas. Exemplo disto é a dupla formada pelas alunas Gislaine e Natália que usou as seguintes justificativas para as letras **b** e **c**:

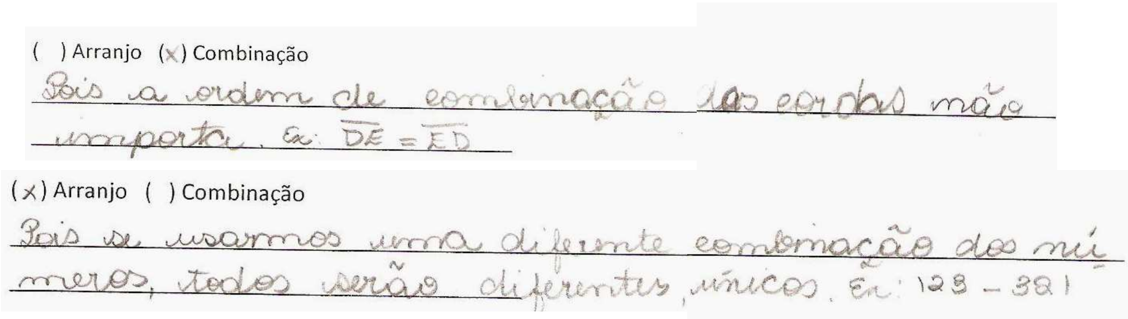


Figura 32: Extraída da 2ª ficha de atividades (para sala) da dupla formada por Gislaine e Natalia.

As duplas que erraram não se preocuparam com a justificativa e por isso não conseguiram perceber a importância da ordem dos termos.

6.2.2 Análise da 2ª Ficha de Atividades para casa

Dos vinte e cinco alunos que participaram da atividade em sala onze não entregaram a ficha de atividade para casa.

Exercício 1	A	b	c
Certo	10	8	6
Errado	3	3	4
Incompleto	1	2	0
Branco	0	1	4

Quadro 16: Resultado do 1º exercício da 2ª ficha de atividades para casa.

Na letra **a** percebemos que a escrita das opções é a alternativa mais utilizada para se encontrar o número de opções. Além disto, alguns alunos utilizaram outras formas de representação como representação figural e representação simbólico-numérica através da multiplicação das possibilidades.

Os três alunos que erraram o exercício utilizaram a multiplicação das opções 6 x 5 = 30 porém não dividiram para retirar as alternativas repetidas e assim utilizaram a idéia de arranjo em um exercício de combinação.

Na letra **b** dos dez que acertaram a letra **a** oito acertaram também a letra **b** inclusive utilizando o mesmo registro de representação da letra anterior

Diante do objetivo de explorar os diferentes registros de representação a letra **c** mostrou a dependência que alguns alunos têm da linguagem natural e por isso quatro alunos que vinham utilizando a escrita das opções como forma de representar as possibilidades deixaram a questão em branco. Os alunos que acertaram a resposta utilizaram a multiplicação das possibilidades, seguida da divisão para retirar as possibilidades repetidas.

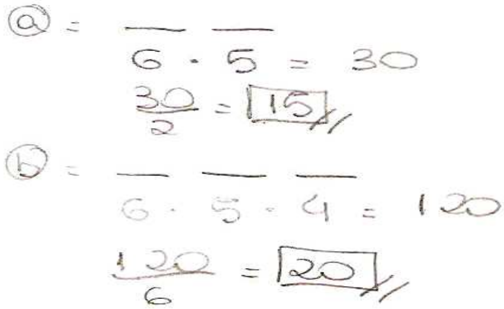


Figura 33: Extraída da 2ª ficha de atividades (para casa) do aluno Rafel.

O exercício número 2 é um exercício semelhante a um dos exercícios aplicados na ficha de atividade para sala.

Exercício 2	a	B
Certo	13	3
Errado	0	10
Incompleto	1	1
Branco	0	0

Quadro 17: Resultado do 2º exercício da 2ª ficha de atividades para casa.

Percebeu-se, pelos resultados, que os alunos entenderam bem a idéia de combinação na resolução da letra **a** e através da utilização de diferentes formas de representação conseguiram chegar à resposta correta.

Diante do resultado alcançado na letra **a**, da possibilidade de trabalhar com a multiplicação das possibilidades e do número reduzido de opções esperávamos que o resultado na letra **b** fosse melhor. As duplas que erraram não conseguiram perceber que a situação apresentada no exercício caracteriza o arranjo e não a combinação. A opção Pedro e Paula é diferente de Paula e Pedro por se tratar de presidente e vice presidente.

O exercício três apresentou um grande índice de erro e de questões em branco.

Exercício 3	a	B	c	d	E	f
Certo	6	0	4	0	0	0
Errado	4	5	5	9	8	8
Incompleto	0	4	0	0	0	0
Branco	4	5	5	5	6	6

Quadro 18: Resultado do 3º exercício da 2ª ficha de atividades para casa.

Podemos perceber neste exercício a dificuldade que os alunos têm de relacionar conteúdos diferentes. Visto que os alunos tinham estudado figuras semelhantes e figuras congruentes e, além disto, o livro texto adotado pela escola trazia as duas definições, esperávamos que os alunos tivessem um resultado bem melhor do que o constatado. Algumas respostas sobre a relação semelhante/congruente foram confusas e outras totalmente incoerentes, como as respostas das alunas Ana e Gislaine:

“As figuras semelhantes tem a mesma medida e as congruentes não tem a mesma medida.”

“A diferença entre as figuras semelhantes e as congruentes é que as congruentes as retas são paralelas e as semelhantes as retas se encontram.”

Quatro alunos deixaram todas as questões em branco, outros simplesmente colocaram respostas sem qualquer tipo de cálculo.

Percebemos que na maior parte dos exercícios, mesmo utilizando os números errados, os alunos souberam trabalhar a idéia de chance seja através da porcentagem ou da razão.

6.3 Análise da Sequência de Atividades 3

6.3.1 Análise da 3ª Ficha de Atividades em sala

A utilização dos diferentes registros de representação e a relação existente entre análise combinatória e probabilidade foi trabalhada nesta parte da sequência. Na realização da ficha de atividades para sala participaram 11 grupos (sendo oito duplas e três trios).

Exercício 1	a	B	c	d	e
Certo	11	10	6	9	6
Errado	0	1	4	2	2
Incompleto	0	0	0	0	1
Branco	0	0	1	0	2

Quadro 19: Resultado do 1º exercício da 3ª ficha de atividades para sala.

O exercício um trabalha as possibilidades de um jogo de roleta. Na letra **a** todos os alunos acertaram a resposta somente comparando os resultados apresentados. Na letra **b**, assim como na letra **a**, a resposta era direta com a divisão do número encontrado na letra **a** (3) pelo total de possibilidades (6).

Na letra **c** os alunos foram questionados sobre o que representava a razão calculada no item anterior. Alguns grupos que acertaram escreveram que a razão é a chance em porcentagem de se calcular as possibilidades enquanto outros grupos escreveram que significa a chance de se ganhar um brinde.

Na letra **d,** a razão e a porcentagem foram as formas mais utilizadas para se calcular as chances propostas. Os grupos que erraram apresentaram as possibilidades e não as chances.

A letra **e,** na qual os alunos deveriam montar o enunciado de um exercício**,** apresentou um número maior de erros e de respostas em branco. Atividades investigativas não se encaixam no processo "mecânico" com o qual os alunos estão habituados, o que gera muitas dúvidas. Uma das duplas elaborou o exercício, mas não o resolveu corretamente, caso de resolução considerada incompleta. Dentre os grupos que acertaram, o enunciado mais comum foi:

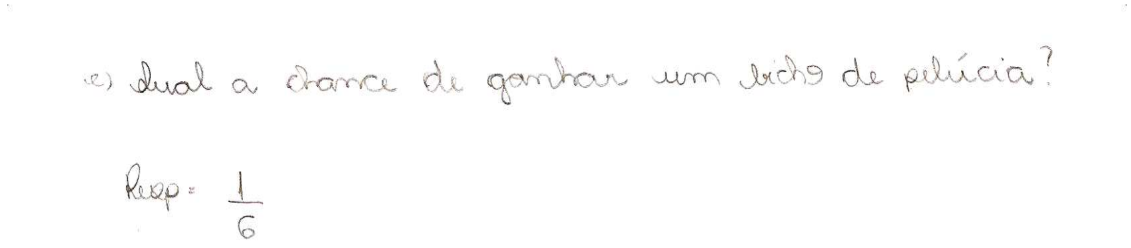


Figura 34: Extraída da 3ª ficha de atividades (para sala) da dupla 8.

Exercício 2	A	b	C
Certo	6	4	2
Errado	4	6	6
Incompleto	1	0	0
Branco	0	1	3

Quadro 20: Resultado do 2º exercício da 3ª ficha de atividades para sala.

Neste exercício a letra **a** propôs aos alunos a utilização da árvore das possibilidades como forma de representar as opções. Seis dos onze grupos conseguiram explorar o registro de representação que os ajudou nas outras questões.

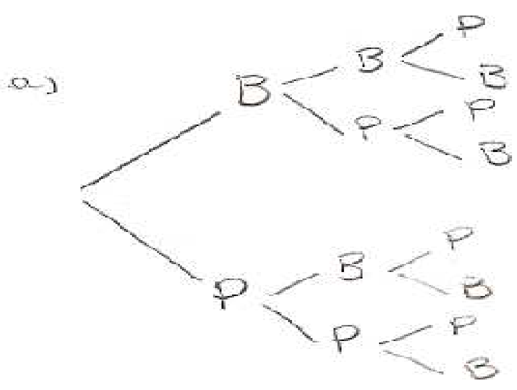


Figura 35: Extraída da 3ª ficha de atividades (para sala) da dupla 4.

Os cinco grupos, que não acertaram a letra **a,** também não conseguiram acertar as letras **b** e **c.**

Como era previsto, a partir das análises prévias feitas, os alunos tiveram uma dificuldade maior no exercício três por explorar a idéia de conjuntos.

Exercício 3	a	b	c	D
Certo	2	6	6	1
Errado	8	5	2	7
Branco	1	0	3	3

Quadro 21: Resultado do 3º exercício da 3ª ficha de atividades para sala.

Neste exercício a letra **a** apresentou o diagrama, que é um registro de representação mais explorado no 1º ano do ensino médio, e por isso somente dois grupos conseguiram chegar à resposta correta. Os grupos que erraram, na sua grande maioria, confundiram o número de pessoas que não faz parte de nenhum dos conjuntos com as pessoas que fazem parte da intersecção dos dois conjuntos.

As letras **b** e **c,** como não dependiam do diagrama foram resolvidas por um número maior de grupos. Exemplo disto é a dupla 5 que apesar de errar a letra **a** acertou as letras **b** e **c**.

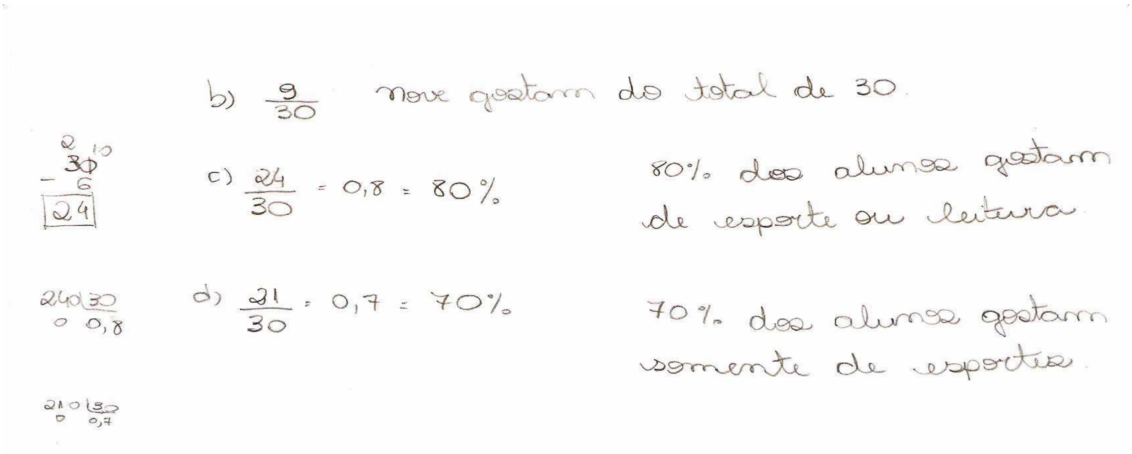


Figura 36: Extraída da 3ª ficha de atividades (para sala) da dupla 5.

Já a letra **d**, como previsto, apresentou um número maior de erros, pois os alunos não diferenciaram “somente esportes” e “esporte” e assim não souberam extrair os valores do diagrama (figura 37) definindo a chance 21/30 ao invés de obter 12/30.

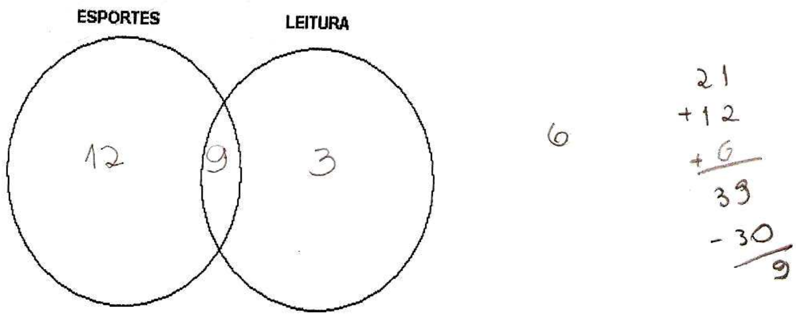


Figura 37: Extraída da 3ª ficha de atividades (para sala) da dupla 3.

O exercício quatro é de extrema importância pela relação estabelecida entre a porcentagem e as chances de um evento acontecer com o termo “probabilidade”.

Exercício 4	a	b
Certo	10	8
Errado	1	1
Incompleto	0	2

Quadro 22: Resultado do 4º exercício da 3ª ficha de atividades para sala.

Dos onze grupos apenas um não soube trabalhar com a tabela para representar as opções e assim não conseguiu chegar ao valor certo das letras **a** e **b**. Os grupos que resolveram de forma incompleta apresentaram a probabilidade somente como razão 2/12. Já os grupos que acertaram a letra **a** e **b** trabalharam com a probabilidade em forma de razão, decimal e porcentagem, como a dupla 2:

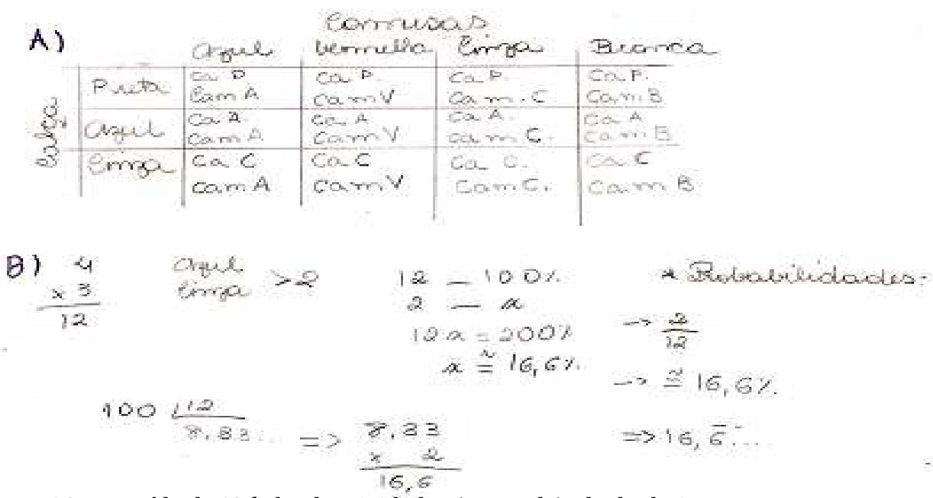


Figura 38: Extraída da 3ª ficha de atividades (para sala) da dupla 2.

O exercício cinco apresentou um grau de dificuldade maior, pois além de trabalhar com algumas variações de probabilidade (condicional e eventos simultâneos) os alunos precisavam justificar suas respostas.

Exercício 5	a	b	c	d
Certo	10	2	1	1
Errado	0	6	5	7
Branco	1	3	5	3

Quadro 23: Resultado do 5º exercício da 3ª ficha de atividades para sala.

Neste exercício as alternativas que não foram justificadas foram consideradas em branco e as que estavam certas, mas com a justificativa errada, foram consideradas erradas. Os erros foram além do esperado neste exercício sendo que o lançamento de mais de um dado gerou dúvida nos alunos e por isso precisou ser bem trabalhado em sala de aula na hora da discussão dos exercícios. Os alunos, mesmo os que não acertaram, utilizaram a multiplicação das possibilidades para calcular as possibilidades.

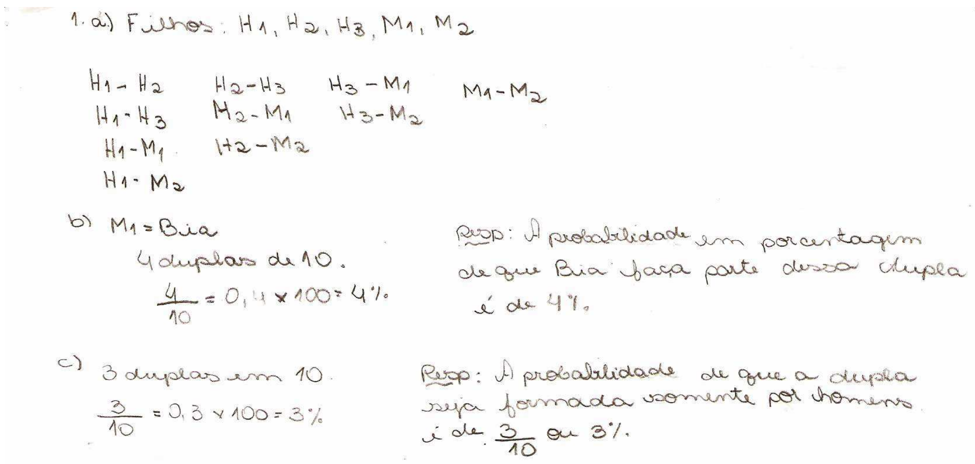
6.3.2 Análise da 3ª Ficha de Atividades para casa

A atividade era composta por cinco exercícios e dos 25 alunos da sala apenas 15 alunos entregaram a atividade. Destes 15 alunos que entregaram é perceptível que uma boa parte copiou as respostas, pois os erros, acertos e as questões em branco são as mesmas. Os alunos aparentemente não se preocuparam com esta última atividade para casa, entregando as respostas desorganizadas e algumas vezes ilegíveis.

Exercício 1	A	b	C
Certo	5	4	5
Errado	6	10	9
Incompleto	2	0	0
Branco	2	1	1

Quadro 24: Resultado do 1º exercício da 3ª ficha de atividades para casa.

Na letra **a** grande parte dos alunos tentou montar a árvore de possibilidades para calcular as possibilidades de duplas, mas esqueceram-se que na dupla a ordem das pessoas não importa e assim calcularam a resposta incorreta. Como as letras **b** e **c** são probabilidades relacionadas coma letra **a** então se justifica o número de erros. Apesar de errarem o resultado os alunos associaram a idéia de probabilidade à divisão do que se deseja pelo total de possibilidades. Uma dificuldade que os alunos encontraram neste exercício é o fato de que os nomes dos filhos não foram citados. Alguns trabalharam com notações que eles criaram como H1, H2, H3, M1 e M2 utilizada por Bárbara.


1. a) Filhos: H_1, H_2, H_3, M_1, M_2

$H_1 - H_2$ $H_2 - H_3$ $H_3 - M_1$ $M_1 - M_2$
$H_1 - H_3$ $H_2 - M_1$ $H_3 - M_2$
$H_1 - M_1$ $H_2 - M_2$
$H_1 - M_2$

b) M_1 = Bia
4 duplas de 10.
$\frac{4}{10} = 0,4 \times 100 = 4\%$
Resp: A probabilidade em porcentagem de que Bia faça parte dessa dupla é de 4%.

c) 3 duplas em 10.
$\frac{3}{10} = 0,3 \times 100 = 3\%$
Resp: A probabilidade de que a dupla seja formada somente por homens é de $\frac{3}{10}$ ou 3%.

Figura 39: Extraída da 3ª ficha de atividades (para casa) da aluna Bárbara.

O exercício 2 trabalha com os alunos que fazem curso de espanhol e de Inglês. Como um exercício similar foi feito em sala, esperávamos que os alunos utilizassem o diagrama como meio para separar as informações. O que não aconteceu.

Exercício 2	A	b	C
Certo	4	8	8
Errado	8	3	4
Incompleto	0	0	0
Branco	2	3	2

Quadro 25: Resultado do 2º exercício da 3ª ficha de atividades para casa.

Um grande número de alunos apresentou a mesma resposta para as três letras. Nenhum dos alunos utilizou o diagrama e os que acertaram trabalharam com o cálculo da probabilidade através de uma regra de três. Como podemos ver na figura 40, muitos alunos apresentaram respostas sem nenhum tipo de cálculo ou totalmente sem sentido.

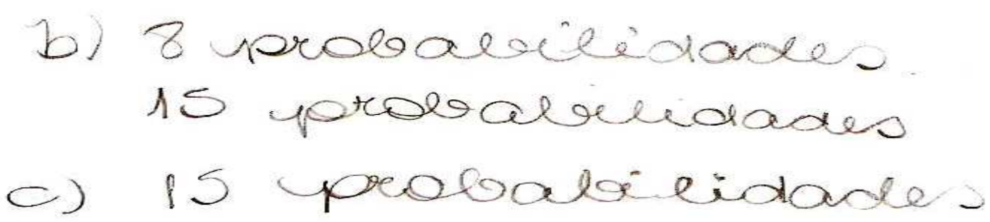


Figura 40: Extraída da 3ª ficha de atividades (para casa) do aluno Guilherme.

Assim como no exercício anterior o exercício três apresentou um grande número de respostas iguais, incluindo repostas sem sentido o que nos leva pensar que houve cópia.

Exercício 3	A	b	C
Certo	5	2	0
Errado	6	8	3
Incompleto	0	0	0
Branco	3	4	11

Quadro 26: Resultado do 3º exercício da 3ª ficha de atividades para casa.

Seis alunos apresentaram a mesma resposta nas letras **a** e **b** (incorreta) e deixaram em branco a letra **c.** Os alunos que acertaram trabalharam com a razão entre as possibilidades favoráveis e o número total de opções

Dos cinco alunos que acertaram a letra **a,** três erraram a letra **b,** pois consideraram valete, dama e rei como cartas maiores que 6 e assim apresentaram a resposta 7/13 ao invés de 4/13. Estes cinco alunos deixaram a letra **c** em branco.

Os alunos destacaram dois motivos para justificar tamanha dificuldade na letra **c,** sendo primeiro, o fato de que foram retiradas duas cartas e não uma. Vimos anteriormente no exercício do lançamento dos dados que a mesma dificuldade é apresentada. O segundo motivo é relacionado à apresentação da união de dois eventos e à percepção de que algumas cartas de copas também são figuras.

Exercício 4	a	b	c	d
Certo	9	8	8	0
Errado	0	5	5	8
Incompleto	5	0	0	0
Branco	0	1	1	5

Quadro 27: Resultado do 4º exercício da 3ª ficha de atividades para casa.

No exercício quatro, referente ao lançamento de moedas, os alunos são induzidos a utilizar, na letra **a,** a árvore das possibilidades para visualizar as possibilidades como o aluno Rafael:

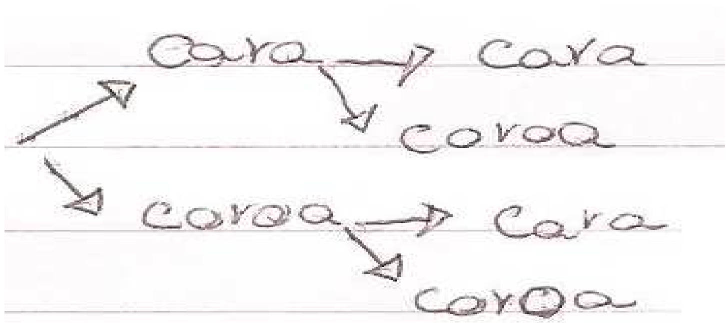


Figura 41: Extraída da 3ª ficha de atividades (para casa) do aluno Rafael.

Os alunos que acertaram a letra **a** utilizaram as possibilidades expressas na árvore de possibilidades para calcular as probabilidades pedidas nas letras **b** e **c**. Já a letra **d** nenhum dos alunos conseguiu, pois como foi mencionado anteriormente os alunos têm dificuldade em trabalhar com eventos simultâneos.

No exercício número cinco tivemos cinco alunos que não resolveram nenhum dos itens propostos.

Exercício 5	A	b	C
Certo	4	0	0
Errado	5	9	4
Branco	5	5	10

Quadro 28: Resultado do 5º exercício da 3ª ficha de atividades para casa.

Esperava-se que na letra **a** todos os alunos acertassem, pois múltiplos de 3 entre 1 e 8 são somente dois e facilmente identificáveis. Porém as respostas iguais, desorganizadas e sem sentido indicam que os alunos fizeram a atividade sem nenhuma preocupação.

Os alunos que acertaram a letra **a** apresentaram dois erros comuns na letra **b**. O primeiro é que consideraram a opção das duas bolas serem iguais a seis, mas se esqueceram que cada número só aparece em uma bola. O segundo erro foi calcular em 8 o espaço amostral e se esquecer que se trata da retirada de duas bolas. Assim como no exercício dos dados, das moedas, das cartas e agora das bolas (letras b e c) os alunos apresentaram uma grande dificuldade para trabalhar com eventos simultâneos e por isso dedicamos um tempo da aula no qual discutimos esta situação.

6.4 Análise da Sequência de Atividades 4

6.4.1 Análise da 4ª Ficha de Atividades em sala

A última atividade em grupo aplicada em sala que explorou a sistematização das idéias até então trabalhadas (Princípio multiplicativo, Arranjo, Permutação, combinação e probabilidade) foi aplicada para um número de 25 alunos distribuídos em onze duplas e um trio. A primeira parte desta atividade, composta por seis exercícios, estava relacionada com o princípio fundamental da contagem e permutação.

1ª Parte	1	2	3	4	5	6a	6b
Certo	6	11	12	9	10	12	12
Errado	6	1	0	0	1	0	0
Branco	0	0	0	3	1	0	0

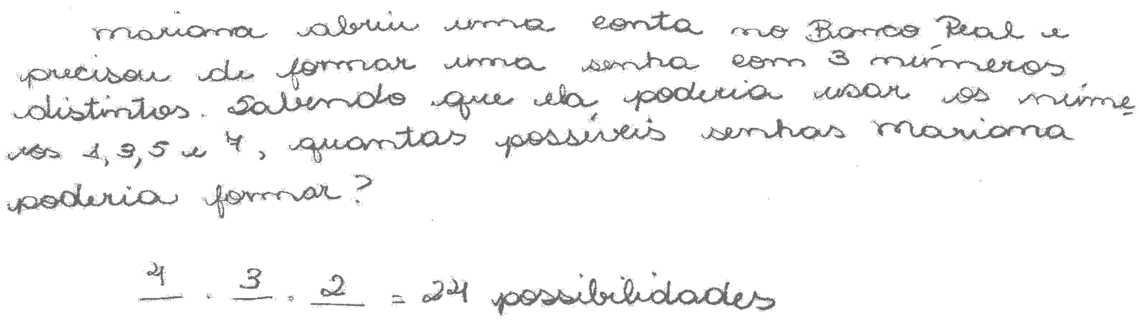
Quadro 29: Resultado do 1ª Parte da 4ª ficha de atividades para sala.

O exercício número um pedia que os alunos enunciassem, com suas palavras, o princípio fundamental da contagem. Alguns grupos copiaram uma frase que é apresentada no texto e por isso as respostas foram consideradas erradas, porém seis grupos apresentaram a idéia da multiplicação das possibilidades como resposta. Um destes grupos é o trio formado por Gislaine, Miqueli e Natália:


É o modo que nos permite saber o número total
de possibilidades multiplicando as opções de escolha.

Figura 42: Extraída da 1ª parte da 4ª ficha de atividades do trio Gislaine, Miqueli e Natália.

O exercício dois explorou a construção do enunciado de um exercício frente a uma resposta dada (4 x 3 x 2). Esta situação foi abordada anteriormente, porém o resultado, agora, apresenta um maior número de acertos pelos alunos como pode ser observado no quadro 29. Diferentes enunciados foram apresentados como formação de senhas (figura 43); escolha de roupa; escolha do presidente, vice e do tesoureiro de uma empresa e outros. A única dupla que errou apresentou um exercício de combinação de 4 termos tomados três a três ao invés de arranjo.


mariana abriu uma conta no Banco Real e
precisou de formar uma senha com 3 números
distintos. Sabendo que ela poderia usar os núme
ros 1, 3, 5 e 4, quantas possíveis senhas mariana
poderia formar?

4 . 3 . 2 = 24 possibilidades

Figura 43: Extraída da 1ª parte da 4ª ficha de atividades da dupla 3.

Os exercícios 3 e 4 trabalharam, respectivamente, o desenvolvimento e a percepção da fórmula de permutação.

O exercício número cinco, assim como o exercício dois, demanda a elaboração do enunciado para um exercício cuja resposta fosse **5!**. Dois tipos de exercícios foram encontrados: exercícios que exploram o cálculo do número de anagramas e o cálculo das possibilidades de se montar um número de cinco algarismos distintos como podemos ver nas figuras 44 e 45, respectivamente:

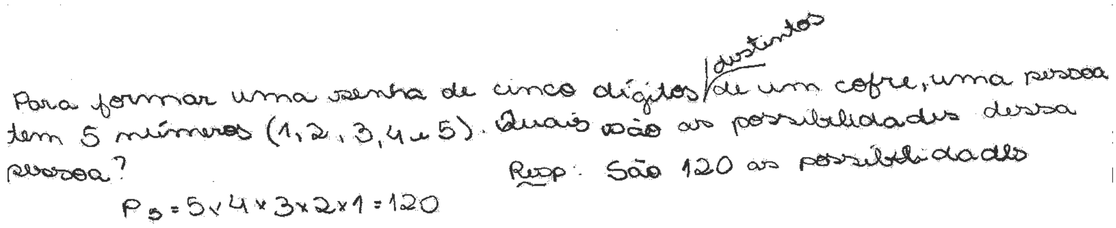


Figura 44: Extraída da 1ª parte da 4ª ficha de atividades da dupla 2.

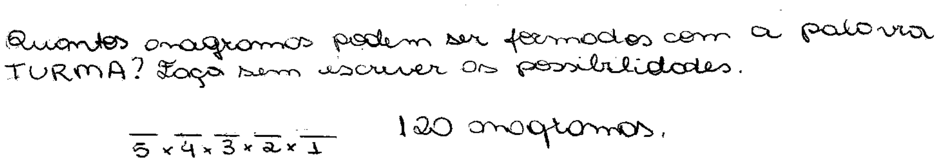


Figura 45: Extraída da 1ª parte da 4ª ficha de atividades da dupla 5.

O exercício seis foi feito sem problemas e as expressões envolvendo permutação foram calculadas corretamente por todos os grupos.

A segunda parte desta atividade era composta de cinco exercícios e foi adequadamente desenvolvida pelos grupos.

2ª Parte	1	2	3	4a	4b	4c	5a	5b
Certo	12	12	10	6	12	11	9	9
Errado	0	0	0	0	0	1	3	2
Incompleto	0	0	1	6	0	0	0	0
Branco	0	0	1	0	0	0	0	1

Quadro 30: Resultado do 2ª Parte da 4ª ficha de atividades para sala.

Neste quadro foi acrescentada a classificação “Incompleto”, pois o exercício número quatro, na letra **a,** pedia que além de efetuar o cálculo o aluno justificasse a resposta. Alguns alunos efetuaram o cálculo e não justificaram a resposta sendo a resolução considerada incompleta.

Nos exercícios 1 e 2 foram abordados, respectivamente, arranjo e combinação de cinco termos tomados dois a dois. Os alunos utilizando as idéias desenvolvidas anteriormente resolveram, sem fórmulas, os dois exercícios através da multiplicação das possibilidades como a dupla 7:

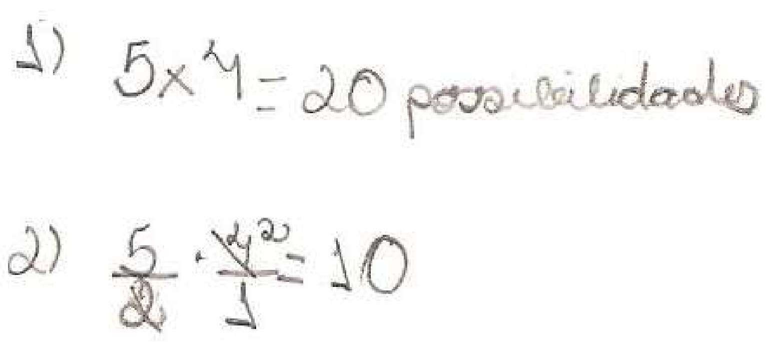


Figura 46: Extraída da 2ª parte da 4ª ficha de atividades da dupla 7.

O exercício três, da mesma forma que os exercícios um e dois, apresentou uma única situação que os alunos resolveram tanto pelo arranjo como pela combinação. Dos grupos que acertaram destacamos a resposta do trio formado por Gislaine e Miqueli e Natália que resolveu utilizando as fórmula, de arranjo e combinação, que foram desenvolvidas nos exercícios 4 e 5.

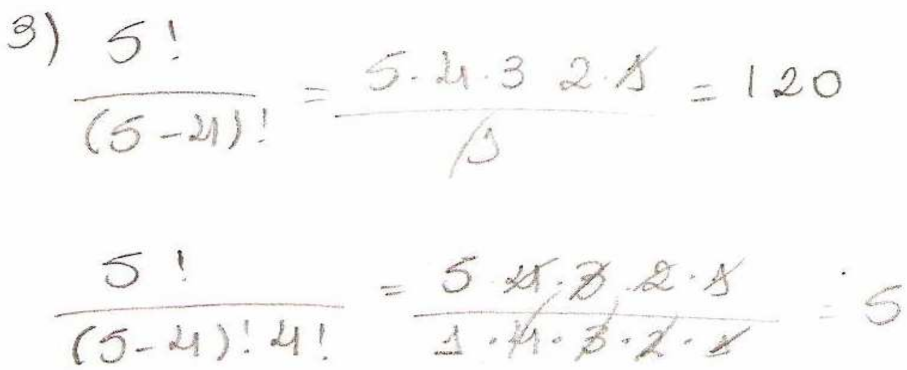


Figura 47: Extraída da 2ª parte da 4ª ficha de atividades do trio Gislaine, Miqueli e Natália.

O exercício número quatro explorou o cálculo de arranjo por meio da fórmula. Na letra **a,** a fórmula, apresentada, expressa o arranjo de cinco termos tomados dois a dois. Os alunos desenvolveram a conta verificando e justificando a resposta através da multiplicação das possibilidades.

Na letra **b** foi calculado o arranjo de cinco termos tomados três a três e na letra **c** explorou-se a generalização desta fórmula na qual os alunos apresentaram a expressão referente a um número **n** de termos organizados **p** a **p**.

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Figura 48: Extraída da 2ª parte da 4ª ficha de atividades da dupla 4.

O exercício número cinco conduziu os alunos, como no exercício quatro, a encontrarem a fórmula de combinação. No geral os grupos resolveram o exercício e os erros foram relacionados à troca de números e a substituição da expressão de combinação pela expressão do arranjo.

A terceira parte desta atividade trabalhou a probabilidade em três exercícios nos quais são apresentados termos como espaço amostral e probabilidade condicional. O quadro abaixo apresenta os resultados encontrados.

3ª Parte	1	2a 1ªparte	2a 2ªparte	2a 3ªparte	2b	3a	3b	3c
Certo	10	10	7	6	4	3	2	1
Errado	1	2	2	6	6	9	0	2
Incompleto	0	0	3	0	1	0	6	6
Branco	1	0	0	0	1	0	4	3

Quadro 31: Resultado do 3ª Parte da 4ª ficha de atividades para sala.

O exercício número 1 apresentou um grande índice de acerto, pois os alunos já estavam trabalhando com a probabilidade e não tiveram dificuldades para escrevê-la como a divisão entre o número de possibilidades desejáveis e o total de possibilidades.

O número dois, letra **a,** apresentou um grupo formado por quatro homens e uma mulher dos quais fossem calculados: 1º- o número de duplas possíveis; 2º- o número de duplas de pessoas do mesmo sexo; 3º - a probabilidade de escolher uma dupla de pessoas do mesmo sexo. A 1ª parte não foi considerada difícil, pois os alunos utilizaram os diferentes registros explorados nos exercícios como representação figural, multiplicação das opções (com divisão, pois se trata de uma combinação) e escrita das opções.

Na segunda parte, na qual foram calculadas as duplas de pessoas do mesmo sexo, alguns grupos trabalharam com a escrita das opções deixando a resposta incompleta. Seis grupos utilizaram o resultado do item anterior para perceber no total de duplas aquelas que apresentavam as pessoas do mesmo sexo e consequentemente calcular a razão entre os valores encontrados para representar a probabilidade.

Dos grupos que erraram a terceira parte dois utilizaram o cálculo de arranjo no lugar da combinação e os outros acabaram errando alguma conta em um dos itens anteriores.

Na letra **b** alguns grupos que trabalharam com a escrita das opções não conseguiram calcular todas as possibilidades de trios, outros utilizaram o cálculo de arranjo e outros não entenderam o exercício apresentando respostas sem sentido. Como nas letras anteriores os diferentes registros foram utilizados, porém não conseguiram o mesmo índice de acerto.

No exercício número três, letra **a,** as duplas que acertaram trabalharam com a multiplicação das possibilidades e os grupos que erraram calcularam a probabilidade de retirada de um cartão ao invés de dois.

A letra **b,** que envolvia o cálculo da probabilidade condicional foi prejudicada por depender do resultado da letra **a**. Os grupos que não conseguiram calcular as opções totais na letra **a** não conseguiram acertar a resposta, porém seis destes grupos apresentaram as possibilidades corretas de acordo com as condições apresentadas no exercício, mas no calculo da probabilidade compararam com o número de cartões (4/12), sendo as respostas consideradas incompletas.

Na letra **c** os alunos deveriam montar um exercício relacionado com os cartões explorando a probabilidade condicional. Dos nove grupos que resolveram o item, dois apresentaram exercícios que não faziam sentido e os demais elaboraram exercícios similares ao anterior. Porém seis destes sete grupos não resolveram o exercício por eles proposto (pelo mesmo motivo da letra anterior), sendo a resolução considerada incompleta como a dupla 8 cujo enunciado apresentado foi “ Queremos calcular a probabilidade que a soma de dois cartões retirados da urna seja menor que 12, sendo que o primeiro cartão retirado seja de número 5. Qual o valor da probabilidade pedida?” A resposta apresentada pela dupla foi:

Figura 49: Extraída da 3ª parte da 4ª ficha de atividades da dupla 8.

6. 5 Avaliação do trabalho desenvolvido

6. 5. 1 A avaliação individual

Depois de aplicadas e discutidas as quatro sequências de atividades os alunos realizaram uma prova individual. Essa prova integrava o sistema de avaliação da escola e o número de questões era definido pela própria instituição, assim como o valor da prova.

A prova foi composta por oito questões sendo três discursivas e cinco de múltipla escolha. Dos vinte e cinco alunos da sala apenas um não fez a prova. O Gráfico 1 ilustra as notas obtidas.

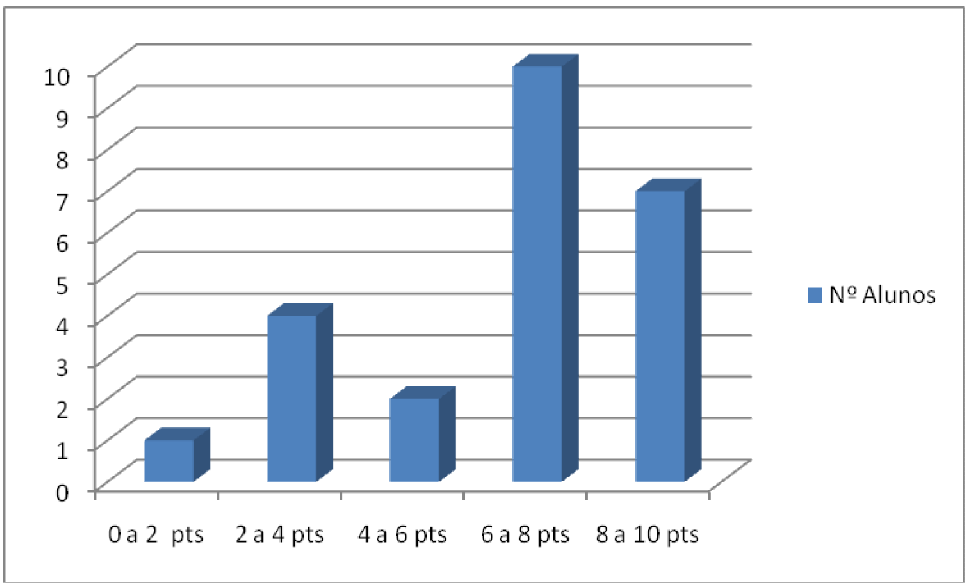


Gráfico 1: gráfico das notas dos 24 alunos

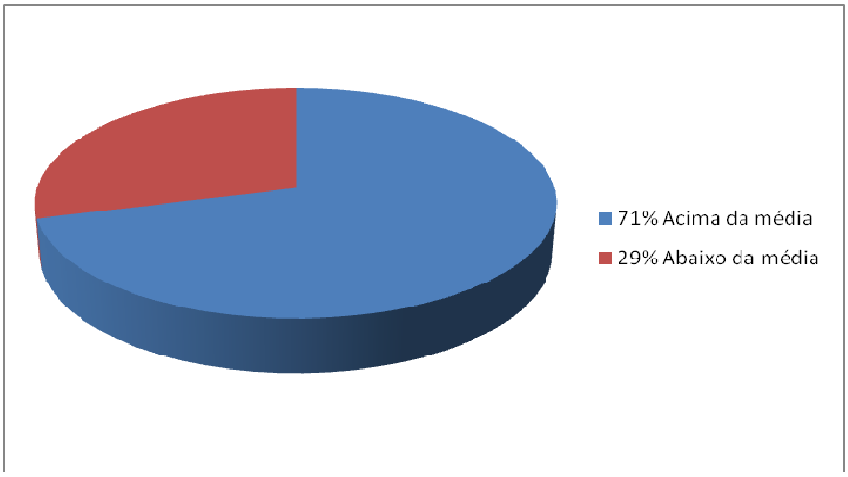


Gráfico 2: gráfico da média das notas dos 24 alunos

Os resultados foram considerados satisfatórios, uma vez que a grande maioria da sala conseguiu compreender a diferença entre arranjo e combinação e as diferentes formas de calcular as possibilidades através dos diferentes registros de representação.

A análise da prova foi feita observando-se a percepção dos diferentes tipos de exercícios de contagem (permutação, arranjo e combinação), a sua ligação com os exercícios de probabilidade e a utilização dos diferentes registros de representação como forma de determinar as possibilidades de ocorrência de um evento.

A questão um explorou o lançamento de dois dados simultaneamente. Este tipo de questão apresentou um grande índice de erro nas atividades aplicadas em sala e por isso os alunos foram conduzidos à utilização de uma tabela, preenchida de forma correta por todos os alunos, como forma de visualizar as possibilidades. Na letra **b**, os alunos utilizaram a tabela da letra **a** e calcularam as possibilidades da interseção de dois eventos (maior que 4 e cor verde). Porém alguns alunos confundiram a interseção com a união e não conseguiram chegar à resposta correta.

Na letra **c** muitos alunos não conseguiram calcular a probabilidade pedida (nº ímpar ou a cor branca). Alguns calcularam as probabilidades separadas, ímpar 18/36 e branca 6/36, porém não perceberam que algumas opções se enquadram nas duas condições (1-branca é contado nos ímpares e também na cor branca) outros apresentaram números bem diferentes da resposta e sem nenhuma justificativa. Nesta questão, mesmo com a utilização da tabela, alguns alunos utilizaram outros registros como a representação figural e a multiplicação de possibilidades.

A questão dois foi a que apresentou o maior grau de dificuldade dentre as oito questões propostas. Os alunos que a acertaram trabalharam com a escrita das opções (Marcos e Bruna - Pedro e Luiza, Marcos e Bruna-Luiza e Pedro,...). Dezesseis alunos erraram a questão, pois calcularam as oito possibilidades de duplas formadas por um homem e uma mulher ocupando duas poltronas, como a aluna Gabriela F.:

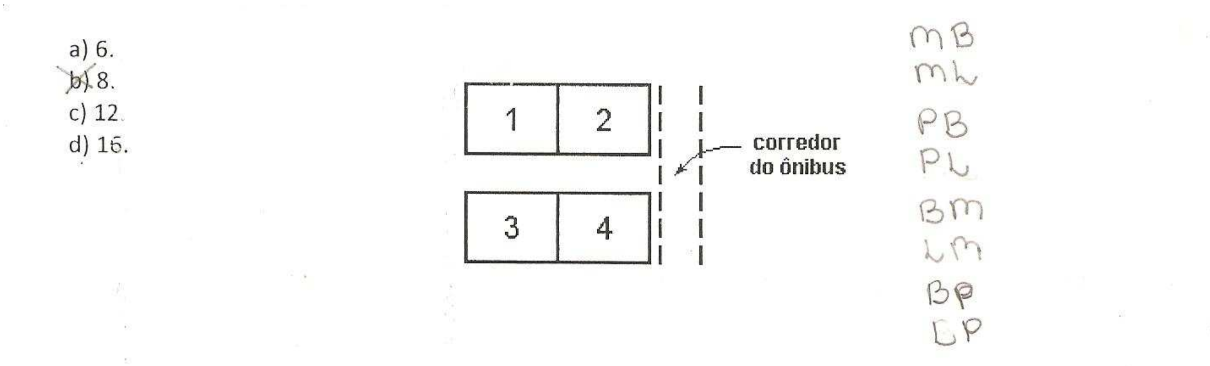


Figura 50: Extraída da prova da aluna Gabrila F.

Todos os alunos que montaram as duplas esqueceram-se de juntá-las duas a duas sendo que cada dupla poderia ser combinada com outras duas (M-B com P-L e M-B com L-P) sendo assim 8 x 2 = 16 possibilidades.

Na questão três, foram exploradas as diferentes opções de roupa que uma pessoa tem para usar. Nesta questão os alunos tinham como sugestão a árvore de possibilidades para visualizar as opções e perceber quais as opções relevantes para a questão. Dos vinte e quatro alunos, dezoito acertaram a questão e em sua grande maioria utilizaram a árvore das possibilidades, como na figura 51, que facilitou a visualização das possibilidades e das alternativas relevantes para a questão.

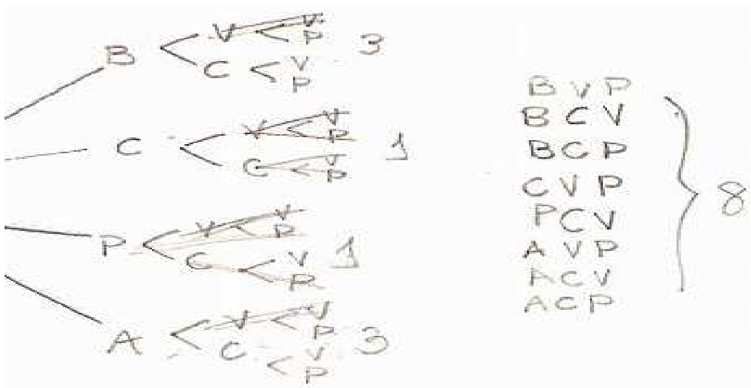


Figura 51: Extraída da prova da aluna Gislaine.

Alguns alunos se esqueceram de retirar as opções repetidas e colocaram a resposta 16.

A questão quatro explorou a permutação de cinco elementos ao calcular os anagramas possíveis da palavra MUNDO. Vinte e dois alunos acertaram a resposta multiplicando as possibilidades. Alguns alunos além de multiplicar as possibilidades associaram o cálculo ao símbolo de permutação, explorado nas atividades em sala como a aluna Fernanda:

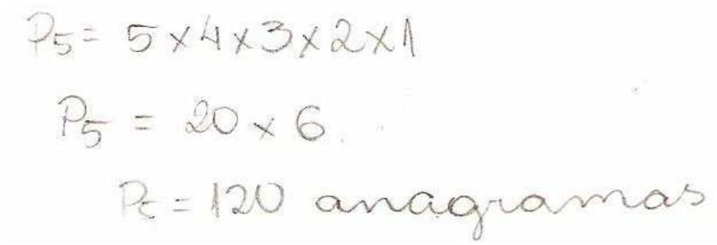


Figura 52: Extraída da prova da aluna Fernanda.

A questão cinco trabalhou o cálculo das possibilidades de um evento na letra **a** e o cálculo de uma probabilidade, na letra **b**, associado ao resultado encontrado anteriormente. Na letra **a** dezoito alunos conseguiram calcular o número total de opções utilizando dois tipos de representação: árvore das possibilidades e a escrita das opções

Apenas o aluno Rafael explorou a multiplicação das possibilidades associada á escrita das opções:

Figura 53: Extraída da prova do aluno Rafael.

Como na letra **a** era necessário escrever todas as opções, os alunos usaram a própria representação para calcular a probabilidade da letra **b.** Assim todos os alunos que acertaram a letra **a** também acertaram a letra **b**.

A questão seis apresentou uma situação que uma loja de salgados oferece três tipos de salgados que devem ser recheados com um tipo de recheio, escolhido entre as quatro opções disponíveis. Nesta questão os alunos, na letra **a**, deveriam montar uma árvore de possibilidades para determinar todas as opções e na letra **b** calcular as opções dadas algumas condições. Apenas dois alunos não acertaram, pois deixaram a questão em branco. Os outros vinte dois alunos não tiveram dificuldade e como a aluna Gabriela acertaram a resposta:

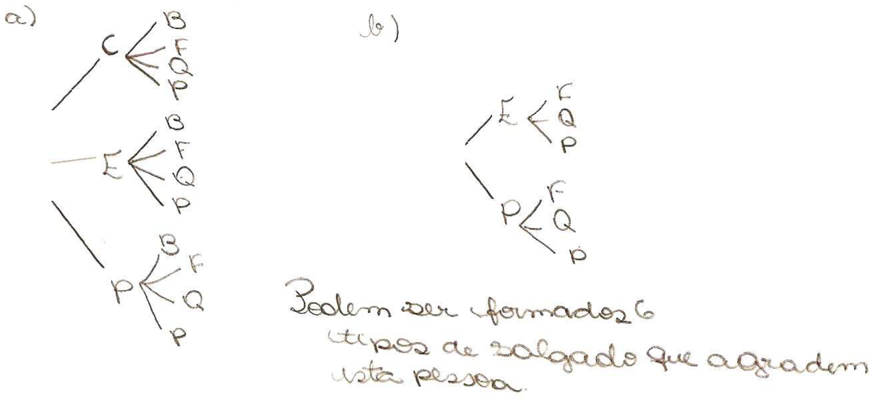


Figura 54: Extraída da prova da aluna Gabriela.

A questão sete explorou o cálculo da combinação de seis elementos tomados três a três. Neste exercício quinze alunos acertaram a resposta correta apresentando o cálculo através de três diferentes tipos de representação: fórmula da combinação (figura 55, multiplicação das possibilidades acompanhada da divisão e pela representação figural:

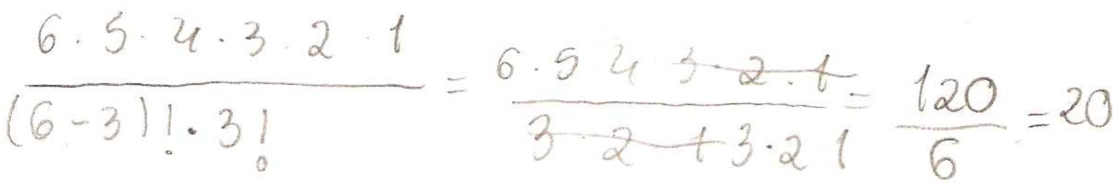


Figura 55: Extraída da prova do aluno Nícolas.

Dos nove alunos que erraram, oito apresentaram como resposta o cálculo do arranjo esquecendo que a ordem dos termos, nesta questão, não faz diferença (carne e palmito = palmito e carne).

A oitava questão explorou a formação de números de telefone. Dos oito algarismos que formam o número quatro já foram escolhidos (3826) faltando escolher os outros quatro. Uma vez definido que o número deveria ser formado por algarismos distintos a questão trabalhou o arranjo dos seis algarismos tomados quatro a quatro. Vinte dois alunos utilizaram a multiplicação das possibilidades para resolver a questão sendo que sete alunos erraram porque não consideraram o zero como algarismo possível e assim trabalharam com os outros cinco algarismos (figura 56). Os outros quinze alunos resolveram a questão corretamente, como a figura 57:

Figura 56: Extraída da prova da aluna Natália.

Figura 57: Extraída da prova da aluna Gislaine.

6. 5. 2 O questionário

Os alunos responderam duas questões, sem se identificarem, que objetivaram uma avaliação do trabalho desenvolvido.

A primeira pergunta indagou acerca da atividade que despertou mais a atenção de cada aluno e a segunda questão solicitou que fizessem algum comentário sobre o trabalho desenvolvido no estudo de Análise Combinatória.

Grande parte dos alunos achou mais interessante o estudo da probabilidade, pois segundo eles é um conteúdo mais útil em nosso dia-a-dia como afirma um dos alunos envolvidos na pesquisa: *"O que mais chamou minha atenção foi probabilidade, pois usamos muito em nosso dia a dia e com esses exercícios pode facilitar a compreensão de situações em nosso dia a dia"*[4].

Os alunos que acharam mais interessante os exercícios de análise combinatória justificaram falando sobre as diferentes formas de resolução e sobre a exploração do raciocínio combinatório. *"Não são exercícios complicados de resolver mais (cic) exige*

[4] Frase extraída do questionário aplicado aos alunos, no qual eles foram orientados a não se identificarem.

mais o raciocínio"[5]. Como já haviam destacado Polya (1995), Ernest (1996) e Ponte (2003).

Esta dificuldade de romper com uma forma de ensino tradicional, centrada na reprodução mecânica de procedimento, é manifestada na dificuldade que os alunos apresentam ao se depararem com exercícios que envolvem interpretação e que fogem da rotina (explicação – exemplo – repetição) como já havia sido apontado por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Roa e Batanero (2001) e Roa e Navarro-Pelayo (2001). A aluna Barbara ao receber a folha da primeira parte da atividade fez o seguinte comentário: "*Nossa, é exercício de raciocínio*". O "raciocínio" mencionado pela aluna não estava ligado às diferentes formas de se resolver ou à necessidade de perceber a diferença entre arranjo e combinação, mas sim ao simples fato de ter que ler e interpretar os problemas para depois calcular o que é pedido. Exemplo disto é a resposta de um dos alunos apresentada no questionário: "*Apesar de não gostar muito porque tem que analisar e pensar mais, gostei e achei um importante conhecimento*"[6]. Para os alunos é mais comum o professor ensinar como se faz para que eles possam reproduzir o mesmo procedimento tornando difícil tudo àquilo que foge desta rotina.

Em contrapartida a este ensino tradicional, centrado na repetição, os alunos perceberam a abordagem diferenciada adotada no módulo de ensino como foi mencionado por um dos alunos: "*Nós aprendemos primeiro a resolver por tentativas, para depois fazermos pela fórmula e isso foi interessante, pois foi diferente"* [7].

Outro aluno relatou a importância da abordagem informal dada aos exercícios de análise combinatória antecedendo a sistematização dos conceitos facilitando a compreensão dos exercícios: *"O uso da fórmula foi a última coisa a ser realizada e o normal é a fórmula vir primeiro. [...] realizar as atividade sem fórmula facilita os exercícios"*[8].

Esta abordagem informal através da utilização dos diferentes registros de representação como forma de perceber as diferenças existentes nos exercícios de contagem antecedendo a sistematização das idéias e o trabalho com as fórmulas é uma forma de valorizar o próprio aluno e toda sua bagagem cognitiva. Isto produz significado para ele, o que geralmente não acontece na reprodução de procedimentos de

---

[5]Frase extraída do questionário aplicado aos alunos, no qual eles foram orientados a não se identificarem.
[6] Ibid.
[7] Ibid
[8] Ibid.

forma mecânica. As fórmulas "*malucas e de difícil compreensão*"[9] como foi mencionado por um aluno devem ser estudadas, mas não podem assumir um lugar de destaque como se o entendimento do conteúdo não tivesse importância.

Podemos perceber que, mesmo diante das dificuldades que os alunos sinalizaram no questionário e que podem ser percebidas na resolução dos exercícios, as atividades foram consideradas "interessantes" e conseguiram fazer com que os alunos aprendessem o conteúdo "*Achei muito bom e me interessei pela matéria. Acho que na prova vou me sair bem*"[10].

A evolução do aprendizado foi gradativa e percebemos que à medida que os alunos iam se envolvendo, cada vez mais conseguiam lidar com os diferentes registros de representação e as diferenças exploradas nos exercícios de contagem. Dificuldades que foram sinalizadas nas fichas de atividade, como a probabilidade de intersecção de dois eventos, foram superadas com a utilização de registros de representação que facilitavam a visualização das opções. Exemplo disto foi a utilização da tabela na questão um da prova que teve um índice de acerto superior aos encontrados nas fichas de exercícios.

Consideramos que a forma com a qual os alunos se envolveram nas atividades e os resultados que foram alcançados são indicativos de que a valorização do conhecimento prévio dos alunos bem como a exploração de atividades que desenvolvam o espírito investigativo são eficientes no processo ensino aprendizagem.

---

[9] Ibid.

[10] Frase extraída do questionário aplicado aos alunos, no qual eles foram orientados a não se identificarem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa procuramos destacar a importância do trabalho com os diferentes registros de representação semiótica e suas transformações no estudo do conteúdo de análise combinatória. Também foi nosso objetivo apontar para a possibilidade do desenvolvimento dos conceitos básicos de análise combinatória e probabilidade, através de um módulo de ensino desenvolvido em um conjunto de aulas, cuja metodologia se apoiou nos métodos de inquirição.

Para a elaboração deste módulo de ensino se fez necessário um estudo do tipo de materiais didáticos que o professor dispõe para trabalhar o pensamento combinatório no ensino fundamental. Diante da análise de quatro coleções de livros didáticos percebemos que o conteúdo é tratado, no ensino fundamental, geralmente vinculado a outros conteúdos, o que pode limitar a sua abordagem.

Percebemos que nos livros do 6º ano do ensino fundamental o pensamento combinatório é associado ao conteúdo de multiplicação. Os livros apresentam três idéias fundamentais de multiplicação: adição de parcelas iguais, proporcionalidade e combinação de possibilidades. Sendo assim, ao trabalhar a combinação os livros apresentam a multiplicação de possibilidades como forma de se calcular as respostas em alguns exercícios de contagem. E, quando novamente o tema é abordado no livro do 9º ano do ensino fundamental, vem associado ao conteúdo de probabilidade, e os cálculos de possibilidades servem como instrumental para calcular as probabilidades de um evento acontecer. Assim, é possível afirmar que pelo fato de o objetivo dos livros não ser a exploração da análise combinatória por si só – mas como ferramenta para outros cálculos - este conteúdo acaba sendo visto de forma superficial, não sendo explorado, portanto, seus conceitos básicos, tais como permutação, arranjo e combinação.

A necessidade de uma abordagem mais ampla do pensamento combinatório no ensino fundamental já foi evidenciada em uma série de pesquisas e documentos, aos quais procuramos recorrer para dar embasamento teórico, bem como para justificar a relevância de nosso trabalho.

Nos PCNs (BRASIL,1998) são destacados dentre os objetivos a necessidade de trabalhar com problemas de contagem que possam “levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório.”

Pesquisadores como Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996); Roa e Batanero

(2001); Roa e Navarro-Pelayo (2001) afirmam que as dificuldades encontradas pelos alunos no ensino básico são refletidas nos alunos do ensino superior, o que evidencia a importância do desenvolvimento destes conceitos ainda nas séries iniciais.

Estudos como o de Esteves (2001) e Costa (2003) apresentam resultados positivos, e estimulam o desenvolvimento da análise combinatória no ensino fundamental através da abordagem dos seus conceitos básicos como permutação, arranjo e combinação.

Diante da análise dos livros didáticos e das pesquisas relacionadas com o pensamento cominatório procuramos meios para responder a pergunta norteadora desta pesquisa, qual seja: *Quais as estratégias de ensino-aprendizagem que podem viabilizar uma introdução dos conceitos básicos de análise combinatória e probabilidade no ensino fundamental?* Nossa resposta à questão se configurou a partir da utilização de quatro estratégias que proporcionassem aos alunos o desenvolvimento do pensamento combinatório.

A primeira estratégia adotada foi a escolha da engenharia didática como metodologia que sustentou toda esta pesquisa. Das análises preliminares até a aplicação e comparação de resultados, as fases da engenharia didática orientaram o desenvolvimento deste trabalho, o que nos possibilitou definir e melhor organizar as tarefas.

A segunda estratégia consistiu no desenvolvimento de um trabalho intuitivo na apresentação do conteúdo de análise combinatória. Os alunos, através da busca de padrões para resolver as situações propostas, desenvolveram métodos que favoreceram a percepção das diferenças existentes nos exercícios de contagem e, consequentemente, elaboraram diferentes estratégias para calcular os resultados sem a utilização das fórmulas.

Podemos notar que os resultados apresentados, além de evidenciarem a participação dos alunos na construção do seu próprio conhecimento, à medida que estes procuravam meios para resolver os exercícios, também deixou claro o envolvimento dos alunos com a atividade proposta. O favorecimento da percepção do aluno, em contrapartida, ao trabalho exaustivo com o algoritmo despertou nos mesmos um maior interesse, como bem relatou um dos alunos envolvidos na pesquisa: *"O uso da fórmula foi a última coisa a ser realizada e o normal é a fórmula vir primeiro. [...] realizar as atividade sem fórmula facilita os exercícios"*.

Tendo por base a teoria de Duval (2003, 2009), nossa terceira estratégia consistiu em explorar os diferentes registros de representação e suas transformações, Nosso objetivo foi que os alunos atribuíssem significado aos objetos matemáticos estudados e, por conseguinte, facilitar a compreensão dos conceitos básicos da análise combinatória. Constatamos que à medida que os alunos são apresentados aos diferentes registros de representação e são induzidos a utilizá-los, eles conseguem perceber melhor as diferentes possibilidades nos cálculos de análise combinatória, bem como discernir sobre a importância ou não da ordem dos termos.

À medida que os alunos resolviam as sequências de atividades propostas, foram se habituando a trabalhar com os diferentes registros e com suas transformações, uma vez que um registro se mostrava mais interessante do que outro. Pudemos observar que alguns alunos, além de utilizarem os registros propostos - como árvore de possibilidades, tabelas, diagramas e outros - também criavam suas próprias representações, misturando registros distintos de forma a facilitar o entendimento.

A terceira estratégia empreendida nesta pesquisa esteve associada à forma como foi elaborado e aplicado o módulo de ensino. Diante da necessidade de explorar o trabalho intuitivo e valorizar os diferentes registros de representação, o módulo de ensino aconteceu através de sequências de atividades que privilegiaram o trabalho com os métodos de inquirição desenvolvidos dentro de uma aula investigativa, tal como proposto por Polya (1995), Ernest (1996) e Ponte (2003).

Assim, depois de concluído o trabalho é possível afirmar que a “liberdade” dada aos alunos no processo de resolução das situações propostas, associada aos métodos de inquirição favoreceu o desenvolvimento de uma atitude reflexiva. Já que a necessidade de analisar as situações, criar hipóteses, testar resultados, questionar, ser questionado, dentre outros mudaram o foco da aula: do *professor* para o *aluno*.

Outro ponto que não podemos deixar de mencionar nestas considerações finais refere-se ao momento reservado para a socialização das idéias. Pois, durante as discussões que foram propiciadas pelas diferentes formas de resolução apresentadas pelos alunos, e também pelas dúvidas que surgiram no desenvolvimento dos exercícios, percebemos a evolução dos discentes na forma de se expressar matematicamente. Assim, as oportunidades de questionar e ser questionado, desenvolvidas na socialização, levou os alunos a refletirem sobre sua forma de resolver os exercícios e, consequentemente, favoreceu a aprendizagem do conteúdo.

Com esta dissertação, portanto, respondemos algumas questões, podemos dizer que aquelas que nos inquietavam de maneira mais eminente, já que nos são impostos limites de tempo, limites profissionais, entre outros. Chegamos a uma conclusão, mas temos consciência de que existem muitas outras repostas a serem dadas para a temática com a qual trabalhamos e que o módulo de ensino elaborado pode ser aperfeiçoado.

Talvez a incompletude seja uma das características mais interessantes do conhecimento, já que o torna infinito, havendo sempre possibilidade de ir além. É, pois, desta perspectiva que entendemos que este trabalho abre possibilidades para novas pesquisas, e ousamos até mesmo sugerir aquelas questões que nos foram suscitadas no decorrer do árduo exercício de escrita da dissertação, quais sejam:

* O estudo intuitivo em análise combinatória pode ser desenvolvido no ensino médio?

*As dificuldades encontradas pelos alunos do ensino fundamental, em relação aos conceitos básicos da análise combinatória, são as mesmas dos alunos do ensino médio?

*Qual o tipo mais comum de erro encontrado pelos alunos do ensino fundamental no trabalho com os conceitos básicos de análise combinatória?

* O módulo de ensino para introdução do pensamento combinatório pode ser ampliado e desenvolvido com alunos do ensino médio?

E, de um ponto de vista mais particular, devo evidenciar que o desenvolvimento deste trabalho consistiu em uma etapa importante de minha vida profissional, já que me levou a refletir sobre a prática docente de forma geral. E, apesar das dificuldades – que são comuns - enfrentadas no decorrer da pesquisa, este trabalho me proporcionou a compreensão de que, como professor, preciso estar atento à capacidade criativa de meus alunos, valorizando sempre o conhecimento que possuem, bem como a importância do papel participativo dos mesmos na construção do conhecimento.

Ao finalizar esta pesquisa quero destacar, portanto, a crescente necessidade de estarmos atentos às pesquisas desenvolvidas no campo educacional, uma vez que as mesmas possibilitam incorporar novas metodologias, repensando a nossa prática docente. E, somente assim, poderemos atuar de forma a favorecer o processo ensino-aprendizagem dos diversos conteúdos matemáticos. Promovendo o desenvolvimento da capacidade reflexiva dos alunos e, consequentemente, proporcionando-lhes a utilização desta atitude reflexiva para o exercício de sua cidadania.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. L. de ; FERREIRA, A. C. **Aprendendo Análise Combinatória: Um estudo com classes de 2º ano do Ensino Médio**. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 4, 2009, Ouro Preto. IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 2009. p. 30-50.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. . **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED**. Revista Eletrônica de Educação Matemática - REDEMAT, 2008, p. 62-77.

ANDRADE, L. S. **Formação de professores em matemática e os registros de representação semiótica.** In: EGEM - ENCONTRO GAUCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2009, Ijuí. Anais do X Encontro Gaucho de Educação Matemática, 2009. v. 1.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M.J. **Novo Praticando Matemática** - 6º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M.J. **Novo Praticando Matemática** - 7º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M.J. **Novo Praticando Matemática** - 8º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M.J. **Novo Praticando Matemática** - 9º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

BARALDI, A.P.; MEDEIROS, C.F. . **Uma investigação sobre as dificuldades no uso de estratégias para a resolução de problemas verbais no campo da análise combinatória**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 3, 2006, Águas de Lindóia, São Paulo. SBEM, Anais do III SIPEM, 2006.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V.. **Razonamiento Combinatorio En Alumnos de Secundaria**. Educación Matemática, México, V.8, p. 26-39, agosto,1996.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática Fazendo a Diferença –** 6º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2006.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática Fazendo a Diferença –** 7º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2006.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática Fazendo a Diferença –** 8º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2006.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática Fazendo a Diferença –** 9º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2006.

BRANDT, C. F.. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração.** Florianópolis, 2005**.** Tese de Doutorado-Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC.

BRASIL, SEF. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática - terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMARGO, S. Registros de representação e números racionais In: MACHADO, S.D.A. (Org), **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**, Campinas(SP): Papirus Editora, 2003, Cap.4, p. 57-69.

CARNEIRO, V.C.G.. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118

CORREIA, P. F. e FERNANDES, J. A.. **Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória.** In: Libro de Actas do Congresso Internacional Galego-português de Psicipedagoxia. 2007. A Coruña/Universidade da Coruña. Revista Galego-portuguesa de Psicoloxia e Educación, p. 1256-1267.

COSTA, C. A. . **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental**. São Paulo, 2003, 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

DANTE L. R. **Tudo é Matemática**- 6º Ano do Ensino Fundamental. 3.ed. São Paulo: Ática 2008.

DANTE L. R. **Tudo é Matemática-** 7º Ano do Ensino Fundamental. 3.ed. São Paulo: Ática 2008.

DANTE L. R. **Tudo é Matemática-** 8º Ano do Ensino Fundamental. 3.ed. São Paulo: Ática 2008.

DANTE L. R. **Tudo é Matemática-** 9º Ano do Ensino Fundamental. 3. ed. São Paulo: Ática 2008.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática In: MACHADO, S.D.A. (Org), **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**, Campinas(SP): Papirus Editora, 2003, Cap. 1, p. 1-31.

DUVAL, R.. **Semiósis e Pensamento Humano.** 1ª Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110p.

ESTEVES, I. . **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental** . São Paulo, 2001, 194f, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ERNEST, P.. Investigações, resolução de Problemas e pedagogia. In: Abrantes, P.; Leal, L.C.; Ponte, J.P. (Orgs), **Investigar para Aprender Matemática**. Lisboa: APM, 1996, Cap. 2, p. 25 – 48

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

FLORES, C. R. **Registro de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem**. BOLEMA. Ano 19, nº 26, Rio Claro, 2006, p. 77-102.

FRANT, J.; CASTRO, M.; LIMA, T.. **Pensamento combinatório: uma análise baseada na estratégia argumentativa.** In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 24, 2001, Caxambu, Minas Gerais. Anais da 24ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação.

FROTA, M.C.R. . **Experiência Matemática e Investigação Matemática**. In:

CONGRESSO ÍBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2005 Porto. Anais, V Cibem, 2005, p.1-10.

GROENWALD, C. L. O. ; ZOCH, L. N.; HOMA, A.I.R. . **Integrando Seqüencias Didáticas e o Uso de Tecnologias de Ensino Eletrônico com o Conteúdo de Análise Combinatórioa.** In: EGEM - ENCONTRO GAUCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Ijuí. Anais do X Encontro Gaucho de Educação Matemática, 2009.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos** – 6º ano do Ensino Fundamental. 2. ed. São Paulo: Editora do Brasil , 2007.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos** – 7º ano do Ensino Fundamental. 2. ed. São Paulo: Editora do Brasil , 2007.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos** – 8º ano do Ensino Fundamental. 2. ed. São Paulo: Editora do Brasil , 2007.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos** – 9º ano do Ensino Fundamental. 2. ed. São Paulo: Editora do Brasil , 2007.

KALEFF, A. M. M. R. .**Da Rigidez do Olhar Euclidiano às (Im)Possibilidades de(Trans)Formação dos Conhecimentos Geométricos do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, 2004. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação - UFF. Niterói. 450 p.

KALEFF, A. M. M. R. . **Noese e Semiose:considerações sobre processos cognitivos e lingüísticos em educação matemática**. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 4, 2006, Macaé. Anais do IV Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

KESSLER, M. C. .**Competências básicas em matemática para o exercício de uma a cidadania ativa**. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 21, 1998, Caxambu. Anais da 21ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação.

MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução.** 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197 a 208.

MAGGIO, D. P.; SOARES, M. A. S. **Representação semiótica e função afim: análise de livros didáticos de matemática do ensino médio**. In: EGEM - ENCONTRO

GAUCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2009, Ijuí. Anais do X Encontro Gaucho de Educação Matemática, 2009. v. 1.

MATOS, J. F. . **A educação matemática como fenômeno emergente: desafios e perpectivas possíveis**. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2003. FURB: Universidade Regional de Blumenau, Santa Catarina, 2003,**Anais...** Disponível em CD-card.

SOARES, M. T. C.; MORO, Maria Lucia Faria. **Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental**. Educação Matemática Pesquisa, v. 8, p. 99-124, 2006.

OLIVEIRA, I.; SERRAZINA, L. . A reflexão e o professor como investigador. In: GTI Grupo de Trabalho de Investigação (org.). **Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional.** Portugal:APM, 2002, p.29-42.

PAIS, L. C.. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 99 - 108.

PEDROSA FILHO, C.. **Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7-8 anos).** São Paulo, 2008**.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PESSOA, C. A. S. ; BORBA, R. . **Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª à 4ª série**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática.

PIAGET, J.; INHELDER, B. . **A origem da ideia do acaso na criança**. Rio de Janeiro: Editora Record. (s/d) (Tradução portuguesa do original de 1951.)

PINHEIRO, C. A. de M.; Sá, P. F. de. **O ensino de Análise Combinatoria: uma pratica pedagogica predominante segundo os docentes**. In: ENCONTRO DE PESQUISA DO NORTE E NORDESTE, 18, 2007, Maceió. Politicas de ciência e Tecnologia e Formação do Pesquisador em Educação. MACEIÒ: EDUFAL, 2007.

POLYA, G.. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.

PONTE, J. P.da.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. . **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. Actas do ProfMat 2003. Lisboa: APM, 2003.(CD-ROM, p. 25-39).
PONTE, João Pedro da; BROCHADO, Joana; OLIVEIRA, Helia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2005.

ROA, R.; BATANERO C. . **Um estudio semiótico Del razionamento combinatório em Estudiantes universitários**, In: SIMPÓSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 5, 2001, Almería . Actas de Quinto simpósio de La sociedad española de Investigación en Educación Matemática, p. 199 – 208.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V.. **Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad**. Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares, 2001.

ROA, R.; BATANERO.C.; GODINO J.D. . **Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios**, Educación Matemática, vol. 15, núm. 2, p. 5-26, 2003.

ROCHA, J. C. . **O ensino de análise combinatória: uma discussão sobre o uso do principio multiplicativo na resolução de problemas**. São Paulo, 2002, 96f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de educação, Universidade de São Paulo.

SARAIVA, M.A.M.F.; PESSOA, C.A.. **Como os problemas de raciocínio combinatório estão sendo abordados nos livros didáticos de matemática das séries iniciais do ensino fundamental?** In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 3, 2006, Águas de Lindóia, São Paulo**.** SBEM, Anais do III SIPEM, 2006.

SKOVSMOSE**,** O.. **Educação matemática crítica: A questão da democracia.** Campinas, SP: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE**,** O.. **Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade.** São Paulo: Cortez Editora, 2007.

SKOVSMOSE, O.. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática**. Campinas, SP; Papirus, 2008.

STURM, W. . **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma**

abordagem alternativa. Campinas 1999, 94f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

VARGAS, A.F. **O Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas.** 2009, 108f. Dissertação (Mestrado em Ensino) -Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.