

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS**  
**Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática**

**BIOLOGIA E MATEMÁTICA:  
DIÁLOGOS POSSÍVEIS NO ENSINO MÉDIO**

**GERALDO BULL DA SILVA JÚNIOR**

**Belo Horizonte**  
**Junho de 2008**

**GERALDO BULL DA SILVA JÚNIOR**

**BIOLOGIA E MATEMÁTICA:  
DIÁLOGOS POSSÍVEIS NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Eliane Scheid Gazire

Co-orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Andréa Carla  
Leite Chaves

**Belo Horizonte  
2008**



Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Biologia e Matemática: Diálogos possíveis no Ensino Médio**

**Candidato: Geraldo Bull da Silva Júnior**

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Eliane Scheid Gazire – Orientadora (PUC Minas)  
Doutorado em Educação (PUC Minas)

Prof. Dr.ª Andrea Carla Leite Chaves – Co-orientadora (PUC Minas)  
Pós-Doutorado em Bioquímica dos Microorganismos (Centro de Pesquisas Rene Rachou,  
CPQRR)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Ferraco – (UFES)  
Doutorado em Educação – (USP)

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda - (PUC Minas)  
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial (PUC Minas)

Belo Horizonte, 13 de junho de 2008.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Silva Júnior, Geraldo Bull da  
S586b            Biologia e matemática: diálogos possíveis no ensino médio / Geraldo  
Bull da Silva Júnior. – Belo Horizonte, 2008.

158 f. : il.

Orientadora: Eliane Scheid Gazire

Co-orientadora: Andréa Carla Leite Chaves

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas  
Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática.

Bibliografia.

1. Matemática – Ensino médio. 2. Biologia – Ensino médio. 3.  
Prática de ensino. I. Gazire, Eliane Scheid. II. Chaves, Andréa Carla Leite. III.  
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós- Graduação em  
Ciências e Matemática. IV. Título.

CDU: 51:373.5

## DEDICATÓRIA

A Ana Carolina, minha filha: presente em todos os dias de minha vida.

## **AGRADECIMENTOS**

A Isaura, a companheira de todos os momentos, conselheira, incentivadora e leitora primeira.

A Eliane Scheid Gazire, amiga e orientadora.

A Andréa Carla Leite Chaves, nova amizade que levo do mestrado, a Co-orientadora.

Ao professor Amauri Carlos Ferreira, pela paciente leitura dos originais.

Aos professores: Agnela, Amauri, Dimas, Eliane, João Bosco, Lídia e Maria Clara, do programa de mestrado em ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, pelo apoio e por contribuírem para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos colegas, pelos laços de amizade que ficam mesmo com o distanciamento.

A Ângela Rocha, secretária do Mestrado pela simpatia e disponibilidade.

A Agnela Silva Giusta: Coordenadora, acolhedora e que adotou todos os alunos contribuindo decisivamente para realização do trabalho.

Aos professores e funcionários do Colégio Sagrado Coração de Maria, pelo apoio e incentivo durante a realização do mestrado.

“É um erro conferir ao conhecimento real um único sentido. Para apreendê-lo em sua função dinâmica, é preciso ter coragem de colocá-lo no seu ponto de oscilação [...]”.

Gaston Bachelard.

“A humanidade é apenas uma dentre as milhões de espécies vivas que vêm surgindo e se extinguindo na Terra [...] já está ameaçada de extinção por meios desenvolvidos por ela própria. Acumulou conhecimentos e capacidade de ação [...] que resultam num enorme poder concentrado em cada um de nós. Tal situação pode definir um paraíso ou um inferno para nossa efêmera existência [...]”.

Ubiratan D'Ambrosio.

“[...] a verdade não é negada, mas o caminho da verdade é uma busca sem fim; cabe a cada um a escolha; os caminhos da verdade passam por tentativa e o erro; a busca da verdade só pode fazer-se por meio da errância e da itinerância [...]”.

Edgar Morin.

“[...] estamos divididos, fragmentados. Sabemo-nos no caminho mas não exactamente onde estamos na jornada [...]”.

Boaventura de Sousa Santos.

## RESUMO

A complexidade das Ciências face à realidade dos indivíduos, aliada ao ensino brasileiro que muitas vezes ainda se baseia na utilização de conteúdos fragmentados, dificulta a possibilidade de articular saberes provenientes de diferentes campos de conhecimento. Os conhecimentos elaborados pela Biologia, Física e Química, a partir, principalmente, da segunda metade do século XIX, estão intimamente relacionados à aplicação da Matemática, que organiza, expressa e analisa resultados em pesquisas científicas. Entretanto, a mesma aproximação entre a Matemática e as demais Ciências não ocorre em sala de aula e na práxis dos professores no Ensino Médio. A partir da necessidade de integração de conhecimentos, busca-se, com este trabalho, articular saberes nas ações didáticas relacionadas aos currículos de Matemática e Biologia no Ensino Médio brasileiro. Partindo desses currículos, instaura-se uma proposta de apontar sugestões concretas como contribuição ao processo de ensino-aprendizagem dessas duas ciências. Diante do panorama de fragmentação de conhecimentos na formulação dos currículos escolares, partiu-se das idéias de Lévy (2006), Machado (2005) e Morin (2004) para a tessitura do referencial teórico em busca de elementos articuladores entre saberes da Biologia e da Matemática em livros didáticos de biologia do Ensino Médio. A partir das reflexões, a metáfora da rede (MACHADO, 2005) apresenta-se como o principal elemento de uma teia de relações que não se esgota nem se fecha em si mesma. A análise dos resultados permitiu a identificação de duas categorias de integração entre Biologia e Matemática no Ensino Médio. Na primeira, verificam-se os fenômenos biológicos que são descritos por meio de instrumentos matemáticos. Na segunda, encontram-se aqueles em que a Matemática é utilizada como instrumento para a resolução de problemas provenientes da Biologia. Por essa caracterização, o trabalho apresenta-se como estudo teórico. Chegou-se à conclusão da possibilidade do estabelecimento de redes entre Biologia e Matemática como elementos articuladores de saberes, abrindo possibilidades de elaborar formas de ação didática que não recorram à fragmentação do conhecimento nem à desvirtuação de contextos científicos. Como encaminhamento, utilizou-se o pensamento complexo apoiado nas redes de significações para indicar essas novas formas de gerar inovações no pensar e agir em Educação. Verificou-se que existem elementos comuns nas práticas de Biologia e de Matemática no nível médio. As funções podem ser utilizadas como elementos descritores de fenômenos biológicos; a Análise Combinatória, as Probabilidades e a Estatística podem ser aplicáveis à resolução de problemas. Conforme as duas Ciências sejam vistas, existem possibilidades de práticas articuladoras entre elas por toda a extensão do Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Biologia; Ensino Médio; Matemática; Práticas; Redes de Saberes.

## ABSTRACT

The complexity of Sciences regarding individuals and also concerning Brazilian teaching, which still has some of its basis on the utilization of fragmented content, shows difficulties when the possibility of articulation of learning coming from different areas is taken into consideration. Knowledge that comes from Biology, Physics and Chemistry (since the 2<sup>nd</sup> half of the 19<sup>th</sup> century) is deeply related to Mathematics` applicability that organizes, states and analyses results in scientific research. However, the same approach among Mathematics and other sciences doesn`t occur in the classroom nor in teachers` practice at High-School. This paper tries to articulate “learnings” through didactic actions related to High-School Brazilian *curricula* concerning Mathematics and Biology. From these *curricula* the purpose of this paper is stated: to point out real suggestion as a contribution to the development of teaching/learning of the two selected Sciences. From the fragmented view on the realization of the *curricula* this paper takes as its theoretical reference the studies of Levy (2006), Machado (2005) and Morin (2004), trying to find articulated elements in didactic Biology books for High-School students. The “metaphor of the network” (Machado, 2005) presents itself as a main element inside a net of “open and unfinalized” relations. The analysis of results identified two categories of integration between Biology and Mathematics at High-School. First, biological *phenomena* can be described by mathematical instruments. Second, Mathematics can become the way to solve Biology problems. Because of such characterization this paper may be considered a theoretical study. As a conclusion, nets were established as possible links between Biology and Mathematics showing possibilities of didactic action considering a non-fragmentation scientific knowledge. The “complex thought” was used to indicate these new ways to form and generate action in education. Common elements of Mathematics and Biology were detected among the actions at High-School. Functions can be utilized as describing elements in biological *phenomena*; Combinational Analysis, Probabilities and Statistics can be applicable to the solution of problems. According to the various points of view towards the two Sciences there will be practical articulated possibilities between Biology and Mathematics throughout High-School.

**Key words:** Biology; High-School; Mathematics; Practice; “Learning Networks”.

## **Abreviaturas**

a. C.: Antes de Cristo.

d. C.: Depois de Cristo.

ed.: Edição.

Fig.: Figura.

p.: página.

v.: volume.

## **Lista de Siglas**

IBILCE: Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

MEC: Ministério da Educação.

PCNs: Parâmetros Curriculares Nacionais.

PCNEM+: Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio.

SBEM: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

SEMTEC: Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação.

UNESP: Universidade Estadual Paulista.

## SUMÁRIO

<b>ABREVIATURAS .....</b>	<b>8</b>
<b>LISTA DE SIGLAS .....</b>	<b>8</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2 O PERCURSO DA PESQUISA .....</b>	<b>19</b>
2.1 Referenciais teóricos .....	19
2.2 O desenvolvimento do trabalho .....	21
2.3 A busca de dados .....	24
2.4 Os livros pesquisados .....	27
2.5 Os temas articuladores encontrados .....	31
<b>3 MATEMÁTICA E REDES DE SABERES .....</b>	<b>33</b>
3.1 Da Grécia Antiga ao século XX: breve histórico .....	34
3.2 Alegoria, metáforas e significados .....	40
3.3 A metáfora da rede e a do hipertexto .....	44
3.4 A Matemática, as outras Ciências e a Educação .....	50
3.5 A fragmentação dos saberes .....	52
3.6 A disciplinaridade .....	55
3.7 A questão do paradigma .....	59
3.8 A importância do contexto .....	65
3.9 A elaboração do conhecimento .....	67
<b>4 TEMAS ARTICULADORES NO ENSINO DE BIOLOGIA E MATEMÁTICA .</b>	<b>71</b>
4.1 Funções .....	72
4.1.1 <i>O Conceito de função e sua evolução</i> .....	72
4.1.2 <i>O plano cartesiano e o par ordenado</i> .....	73
4.2 Fenômenos biológicos descritos matematicamente .....	75
4.2.1 <i>As reações enzimáticas e o conceito de função</i> .....	75
4.2.2 <i>O crescimento vegetal e animal e o conceito de função</i> .....	84

<b>4.2.3 Os processos de respiração e fotossíntese nos vegetais e o conceito de função .....</b>	<b>86</b>
<b>4.2.4 O crescimento de populações e a função exponencial .....</b>	<b>88</b>
<b>4.2.5 O cálculo do pH e o logaritmo .....</b>	<b>90</b>
<b>4.2.6 A transpiração vegetal e a proporcionalidade .....</b>	<b>98</b>
<b>4.3 A Matemática e a resolução de problemas biológicos .....</b>	<b>103</b>
<b>4.3.1 A interação entre conteúdos matemáticos e o estudo da genética ...</b>	<b>103</b>
<b>4.3.2. Análise combinatória e o estudo de genética .....</b>	<b>105</b>
<b>4.3.2.1 Análise combinatória e a primeira Lei de Mendel .....</b>	<b>113</b>
<b>4.3.2.1.1 Genes alelos .....</b>	<b>113</b>
<b>4.3.2.1.2 Alelos múltiplos (polialelia) .....</b>	<b>116</b>
<b>4.3.2.2 Análise combinatória e a segunda Lei de Mendel .....</b>	<b>119</b>
<b>4.3.3 Probabilidade e o estudo de genética .....</b>	<b>121</b>
<b>4.3.4 Estatística e Frequência no estudo de genética de populações .....</b>	<b>128</b>
<b>4.3.5 Binômio de Newton e triângulo de Pascal no estudo de genética .....</b>	<b>134</b>
<b>4.3.6 Cálculo dos fenótipos e a herança quantitativa .....</b>	<b>139</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>144</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>155</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1979, ao iniciar carreira como professor de Matemática, a articulação entre conteúdos do currículo escolar não tinha a mesma importância que atualmente lhe é dada. Nessa época, idéias e termos como articulação de saberes, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade não faziam parte das discussões de cientistas, professores e demais profissionais de Educação.

Fui aluno de graduação em um curso considerado de “Matemática pura”. Durante a minha formação, os fundamentos de cada disciplina foram precisamente apresentados pelos professores, que zelavam pela aprendizagem dos fundamentos da Ciência. Os conteúdos eram expostos e explorados em profundidade e não apenas abordados superficialmente para levar às aplicações numéricas imediatas. Entretanto, não se consideravam as possíveis implicações entre o conhecimento matemático e a realidade fora da Universidade. As disciplinas não guardavam relações entre si, além do fato de serem pré-requisito ou co-requisito de outras (excetuando-se os casos daquelas desdobradas em mais de um período, como por exemplo, Análise Matemática e Álgebra Linear) e nem mesmo eram abordadas de forma a mostrar como elas poderiam se articular.

O fato de passar por um curso que dava especial atenção aos fundamentos científicos foi importante para consolidar um espírito crítico em relação às tentativas de esvaziar os conteúdos matemáticos em função apenas das tecnologias e técnicas de ensino aplicadas. A formação baseada nos fundamentos de cada disciplina possibilitou avaliar e sustentar tanto a crítica quanto a resistência ao aparecimento de diferentes modismos educacionais nas décadas de 1980 e 1990.

Por outro lado, apesar de ter um conhecimento matemático bem estruturado, minha formação inicial para o magistério possuía limitações, como por exemplo, a superficialidade dos conhecimentos em Didática e Fundamentos da Educação. No meu início de carreira, o modelo pedagógico vigente era baseado no planejamento de aulas. Tinham especial destaque os detalhes particulares de cada conteúdo e o funcionamento das propriedades matemáticas em si mesmas, sem vislumbrar formas de articular os saberes matemáticos com os de outros campos. Era usual o professor elaborar uma extensa lista de tópicos a serem ensinados

sem considerar a necessidade de crescimento intelectual do aluno ou o envolvimento da aprendizagem deste último em redes complexas de conhecimentos.

Em 1992, ao cursar a Licenciatura em Matemática<sup>1</sup>, casualmente fui levado ao contato com conteúdos diferentes dos que eram usualmente contemplados nas grades curriculares dos cursos de Matemática da época. Isso influenciou minha percepção das diferenças entre a profissão de Matemático e a de Professor de Matemática. Entre os diversos conteúdos, estudei História e Filosofia da Matemática, além de ter sido aluno de uma professora de Prática de Ensino<sup>2</sup> que atuava no “Projeto Fundão”<sup>3</sup>, ligado à UFRJ. A partir desses fatos, vislumbrei possibilidades de mudar minha abordagem dos conteúdos de ensino, sem necessariamente abrir mão do rigor e dos fundamentos científicos. Inicialmente, busquei novos métodos de abordar os conteúdos tentando tornar meu próprio trabalho mais agradável e a aprendizagem dos alunos mais prazerosa. O passo seguinte foi tentar associar o saber matemático ao de outros campos.

Tive a oportunidade de realizar estudos de pós-graduação na área do magistério na cidade em que moro [Vitória, Espírito Santo], onde obtive o título de especialista em docência do ensino superior, em setembro de 2004, pela Universidade Cândido Mendes, apresentando monografia “O ensino de função do primeiro grau”, sobre o ensino da função afim. No trabalho<sup>4</sup>, foram associados os conteúdos de Física [notadamente a Cinemática: o movimento uniforme e o uniformemente variado] ao conhecimento matemático. Nesse trabalho, a sustentação teórica foi feita a partir de Antunes (1999), Bicudo e Garnica (2001), Carvalho e Gil-Pérez (2001), Dutra (2000), Fonseca (2002), Fontana e Cruz (1997), Giardinetto (1999), Gonçalves e Silva (2000), Imberón (2002), Machado (2001), McLaren e Farahmandpur (2002), Pais (2001) e Perrenoud (1999). Em oportunidade mais recente, obtive o título de especialista em Educação Matemática na Faculdade

---

<sup>1</sup> Licenciatura em Matemática na Faculdade de Humanidades Pedro II, Rio de Janeiro.

<sup>2</sup> Neide Parracho Sant' Anna.

<sup>3</sup> Segundo dados do próprio Projeto Fundão, a sua contribuição principal é a possibilidade de atualização do professor no que se refere à inovação metodológica e o aprofundamento do conhecimento matemático. A ação do Projeto se dá principalmente a partir de grupos temáticos, compostos por professores do Instituto de Matemática da UFRJ, da educação Básica e alunos da licenciatura. Os grupos temáticos são responsáveis por elaborar, testar, reformular e divulgar propostas inovadoras para o ensino de Matemática. Resultaram das ações do Projeto Fundão as publicações de livros, apostilas e também a organização de encontros para professores. O Projeto também oferece cursos de atualização no ensino de Ciências, assessoria a escolas da Educação Básica, cursos de aperfeiçoamento e de Especialização (desde 1993).

<sup>4</sup> SILVA JÚNIOR, G. B. **O ensino de função do primeiro grau**. Monografia (Especialização) - Universidade Candido Mendes, Vitória, 2004.

Saberes em 2006, com o trabalho sobre a necessidade de ligar saberes da Biologia e da Matemática<sup>5</sup>, intitulado “Biologia e Matemática: a necessidade de religar saberes”. Nesse trabalho, procurei apresentar possibilidades de como aproximar o ensino dessas duas Ciências. Dessa vez a sustentação teórica foi feita a partir das idéias de D’Ambrosio (2002), Machado (1995), Morin (2004), Rago e Moreira (1984) e Veiga-Neto e Wortmann (2001).

Entre o primeiro e o segundo trabalho de especialização, ocorreu a leitura de alguns trabalhos que foram importantes para o amadurecimento da idéia de tratar o saber escolar, o conhecimento científico e a possibilidade de realizar articulações entre diferentes campos de estudos. Tais obras foram: de Almeida, Carvalho e Morin (2002), D’Ambrosio (1986), Machado (2005), Maturana e Varela (2001), Morin (2002) e Santos (2004). As obras de Almeida, Carvalho e Morin (2002), tratam da fragmentação do saber científico e da necessidade de encontrar formas articuladas tanto de ação didática quanto o trabalho dos cientistas. D’Ambrosio (1986) me levou a pensar sobre o contexto histórico das criações Matemáticas de acordo com a época em que se efetivaram e a articulação desse conhecimento com a ação didática. Machado (2001 e 2005) são obras que apresentam o conhecimento matemático em suas relações com a Educação. No livro de Machado (2005) chamou a atenção o fato de que o ensino da Matemática sob a ótica da metáfora das redes rompe com a idéia e a prática de organizar e /ou classificar o conhecimento científico em campos excessivamente delimitados. De Maturana e Varela (2001) veio a idéia de que por trás de um procedimento considerado tradicional está uma forma de identificação de um grupo social como também alguma forma de ocultar determinados aspectos sociais. No caso do ensino das Ciências, surgiu a dúvida de quais seriam as tradições por trás da modalidade de ensino fragmentado. Santos (2004) ao tratar do conhecimento disciplinado e com fronteiras a serem respeitadas alertou para a principal conseqüência desse aspecto: o reducionismo cada vez maior que leva à criação de mais disciplinas para tratar de aspectos cada vez mais particulares.

A idéia do trabalho sobre as articulações entre o Ensino da Física e da Matemática foi apenas o início de uma busca que continuou nas ligações da Biologia com a Matemática, aspecto do conhecimento que prossegue no presente trabalho.

---

<sup>5</sup> SILVA JÚNIOR, G. B. **Biologia e Matemática: a necessidade de religar saberes**. Monografia (Especialização) – Faculdade Saberes, Vitória, 2006.

Os dois trabalhos de conclusões das especializações tiveram como principal fruto a ampliação de horizontes em relação à articulação de saberes e à complexidade do conhecimento. A partir desses dois trabalhos, percebi a possibilidade e a necessidade de abordar temas do ensino de diferentes Ciências a partir de ações articuladoras que favoreçam a compreensão de relações complexas e evitem a fragmentação de saberes. Dando continuidade a esta linha de pesquisa, o presente trabalho aborda as relações complexas que existem entre Biologia e Matemática.

Com o passar de milênios, a humanidade elaborou cada vez mais novos conhecimentos, o que é simultaneamente causa e consequência de se estudar os fenômenos com maior profundidade. Uma consequência da chegada ao que hoje se conhece como conhecimento científico foi a sua fragmentação em múltiplos campos de estudos, determinando o aparecimento de diferentes Ciências, tais como a Biologia, a Física e a Química. Elas, assim como a Matemática, também passaram por fragmentações, gerando setores especializados dentro de cada uma. Esta pesquisa aborda a possibilidade de articular temas de Biologia e Matemática e também discute as implicações didáticas que esse fato pode ter para o Ensino Médio.

Se a realidade do mundo é muito complexa para ser analisada apenas pelo senso comum, por outro lado essa mesma realidade também não pode ser analisada a partir dos saberes de um único campo científico. O desenvolvimento do conhecimento científico da Biologia, da Física e da Química são inter-relacionados com a Matemática. Esta, em consequência desse fato, assume a qualidade de instrumento organizador de dados e expressão dos resultados das pesquisas dessas outras Ciências. Porém, o envolvimento da Matemática com outros saberes não resultou na aproximação do seu ensino ao dos conteúdos de diferentes campos e nem fez com que o conhecimento matemático se aproximasse das outras Ciências no panorama escolar.

A aprendizagem de um saber fragmentado não é suficiente para que o estudante entenda relações intra e inter científicas. A realidade das Ciências e do mundo diante do aprendiz é complexa. Todo aprendiz necessita de diferentes instrumentos para interpretar essas realidades. Em relação à complexidade do conhecimento, Giardinetto (1999, p. 8) afirma que:

com a decorrência da evolução do conhecimento científico, tecnológico e a complexificação do conhecimento científico, tecnológico e filosófico e a complexificação cada vez maior da sociedade, a escola surge como um elemento fundamental para a necessária formação do indivíduo enquanto cidadão participante de um determinado contexto social, pois é através dela que esse indivíduo tem a possibilidade de se apropriar de um conhecimento que não lhe é possível apropriar ao plano de vida cotidiana.

Porém, os saberes provenientes de diferentes campos de estudos utilizados na formulação de programas escolares continuam sendo abordados como se não fosse possível encontrar conexões entre eles. A instituição chamada escola, paralelamente ao desenvolvimento das sociedades, também passou por modificações ao longo dos últimos cinco séculos. Atualmente no Brasil, a escola é a instituição encarregada de promover o contato com “Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias” (termos contemporâneos, usados nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs)<sup>6</sup> de maneira organizada, assim como possibilitar que os estudantes elaborarem conhecimento de forma sistemática. Porém, ainda persiste a fragmentação de saberes tanto no que se refere à Educação, quanto nos campos científicos.

Ainda que Biologia e a Matemática situem-se em diferentes campos de estudo separados pela evolução do conhecimento científico, elas guardam entre si possibilidades de ações articuladoras dos seus saberes, como no caso da aplicação da Estatística e da Probabilidade em trabalhos de Genética, que constituem apenas dois exemplos desse fato.

De acordo com Fazenda (2002, p. 26), o conhecimento

sofre um impacto no século XIX, onde a História do Saber é marcada pela expansão do trabalho científico; onde o prodigioso enriquecimento das variadas tecnologias de pesquisa têm por contrapartida a multiplicação de tarefas e o advento da especialização.

Essa orientação científica especializada também se faz sentir na formação para o exercício do magistério e pode levar os professores em formação a considerar saberes de diferentes campos científicos como elementos dissociados e distanciados. Entretanto, avanços significativos nas Ciências da natureza foram obtidos a partir de modelos matemáticos. Sendo assim, existem possibilidades para

---

<sup>6</sup> BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999. Disponível em <<http://www.mec.gov.br>> Acesso em 28/05/2006.

a realização de ações no ensino de Ciências que articulem saberes de campos separados a partir da especialização ocorrida, principalmente após a segunda metade do século XIX. Segundo Fazenda (2002, p. 26), esse quadro de separação seria o “[...] efeito e a causa da dissociação da existência humana no mundo em que vivemos”.

A respeito da ação do professor, D’Ambrosio (2002) alerta que, de forma geral, as ações didáticas são historicamente estruturadas e hierarquicamente organizadas, tendo as disciplinas poucos indícios de articulação a partir da forma como são ensinadas. O autor (2002, p. 88) também aponta para a necessidade de mudança curricular ao afirmar que:

o ponto crítico é a passagem de um currículo cartesiano, estruturado previamente à prática educativa, a um currículo dinâmico, que reflete o momento sociocultural e a prática educativa nele inserida. O currículo dinâmico é contextualizado no sentido amplo.

A estruturação hierárquica do ensino em disciplinas independentes, além de pouco dinâmica, não favorece a apresentação de contextos e vínculos entre diferentes temas e campos de saberes. A forma hierarquizada de estruturar os currículos é fruto das idéias do Positivismo, que influenciou diretamente o trabalho científico e indiretamente o do professor. Sobre a hierarquia positivista, Silva (1999, p. 41) afirma que:

segundo Comte, é possível classificar todos os fenômenos segundo um pequeno número de categorias naturais [...] os fenômenos, os mais simples, são também necessariamente os mais gerais [...] é pelo estudo dos fenômenos, os mais gerais ou mais simples que se deve começar, indo progressivamente para os mais complicados ou particulares [...].

Ainda a respeito da hierarquia positivista, Silva (1999, p. 41) lembra que Comte considerava os fenômenos divididos

em duas grandes classes: a primeira compreende todos os fenômenos dos corpos brutos e a segunda, todos os corpos organizados. A partir dessa subdivisão, a filosofia natural classifica-se em física orgânica e inorgânica. No que diz respeito à física inorgânica, vê-se que ela se divide, por sua vez, em duas: a que diz respeito aos corpos celestes e a dos corpos terrestres. Então, surgem duas físicas: a física celeste, ou astronomia, e a física terrestre. A física terrestre, por sua vez, subdivide-se em duas: a física propriamente dita e a química [...] tem-se, na física orgânica uma subdivisão: a fisiologia e a física social. Portanto, a Filosofia Positiva

achava-se dividida naturalmente em cinco ciências fundamentais: Astronomia, Física, Química, Biologia e Física Social.

A partir das idéias positivistas também foi legitimada a separação entre a realização da pesquisa e o ensino dos saberes de cada campo específico. Além disso, particularmente em relação ao trabalho do professor, a fragmentação que levou à disciplinarização do saber escolar também gerou a separação radical dos conteúdos de ensino das diferentes Ciências. Um exemplo desse fato ocorre no ensino de temas da Matemática necessários ao estudo das outras Ciências. Esses temas são tratados de forma abstrata e sem a apresentação das suas articulações com outros campos.

Com o objetivo de apontar possibilidades de elaboração de ações conjuntas para o ensino de Biologia e Matemática, foram considerados alguns eixos para a pesquisa no Ensino Médio:

- 1) Possibilidades de realizar ações didáticas envolvendo, de forma complexa, a Biologia e a Matemática.
- 2) A verificação de maneiras de articular os temas de Biologia e Matemática, apontando relações complexas entre essas duas Ciências no Ensino Médio.

Em 1995, tive a oportunidade de modificar a seqüência de desenvolvimento dos conteúdos de Matemática no segundo ano do Ensino Médio em uma escola que trabalho na cidade de Vitória, Espírito Santo, tendo em vista dar um melhor suporte matemático ao ensino de Genética. Esse cruzamento de caminhos já dura mais de uma década, com resultados satisfatórios para as duas disciplinas. Hoje, busco o passo seguinte, que é articular, de forma mais ampla, o ensino da Matemática e o de Biologia.

O trabalho especializado do professor das diferentes Ciências no Brasil se fundamenta em currículos fragmentados, sem ligações entre as áreas e caracterizado pela presença de muitos tópicos. Em relação à fragmentação de saberes e o excesso de tópicos de ensino, Aguiar Junior et al (2003, p. 4-5) fazem um alerta sobre o ensino de Biologia que pode ser estendido ao de Matemática, quando afirma que:

a fragmentação é normalmente o resultado de uma tentativa de se promover o ensino de um excesso de conceitos e detalhes que, numa primeira abordagem, impedem o estudante de compreender aquilo que é essencial [...] a abordagem tradicional apresenta, além disso, um excesso

de conteúdos, o que traz uma idéia enganosa de “aprofundamento” [...] trata-se de um falso aprofundamento, na medida em que dificulta a formação de uma visão sistêmica e relacional dos processos [...] faz-se necessário selecionar idéias-chave que melhor organizem a compreensão.

Isso fez com que se mantivessem intactas e praticamente intransponíveis as fronteiras entre campos de saber excessivamente delimitados. Um exemplo disso é a abordagem da Probabilidade, cujas propriedades têm aplicações na Genética, mas a abordagem de ambas é realizada sem que aspectos articuladores desses temas sejam percebidos.

Ao longo dos anos, autores de livros de Biologia, como Soares (1999), cada vez mais têm percebido que os conteúdos da Matemática são de grande aplicabilidade na descrição de fenômenos biológicos. Entretanto, no nível médio, a Matemática ainda é ensinada de maneira formal, abstrata e sem apresentar suas aplicações em diferentes campos de saberes.

A partir de tudo que até aqui foi exposto, o tema e objeto do presente trabalho podem ser direcionados aos seguintes questionamentos: em que aspectos a articulação dos conteúdos de Biologia e Matemática por meio de redes de conhecimentos no nível médio poderia contribuir para o ensino dessas duas? Em consequência disso, discute-se o seguinte: é possível aproximar, contextualizar e articular temas de Biologia e Matemática no Ensino Médio, por meio de redes de conhecimentos, colaborando com o processo de ensino dessas duas Ciências?

O trabalho foi organizado em capítulos e a distribuição é dada a seguir. No segundo capítulo, são apresentados o percurso da pesquisa e os aspectos de sua realização. No terceiro, são apresentados aspectos do desenvolvimento histórico da Matemática e da sua relação com outras Ciências. Nele são abordadas a complexidade do conhecimento, a sua fragmentação e os elementos que constituem a forma de organizar o conhecimento conhecida pelo nome de paradigma da Ciência moderna. No quarto, são apresentados temas de Biologia e de Matemática do Ensino Médio que vinculam essas Ciências. No quinto, nas considerações finais, discutem-se os resultados da pesquisa e apresentam-se propostas de ações articuladoras a partir da ligação de temas da Biologia com a Matemática do Ensino Médio.

## **2 O PERCURSO DA PESQUISA**

O presente capítulo é destinado a descrever como se deu o processo de pesquisa, escolha do material e análise dos dados. Na busca de articulações de saberes da Biologia com outros de origem na Matemática, o conhecimento científico foi considerado uma elaboração complexa, que necessita da articulação das produções de diferentes campos.

### **2.1 Referenciais teóricos**

A pesquisa foi realizada tendo como principais marcos teóricos alguns aspectos da disciplinaridade apontados por Fazenda (1999, 2002), as redes hipertextuais apresentadas por Lévy (2006) e as idéias de Morin (2004) sobre o conhecimento como elaboração complexa. Também foram incluídos aspectos da articulação de saberes no ensino disciplinarizado citados por Machado (2005), que apresenta formas de buscar a atenuação e/ou eliminação de rígidas fronteiras entre diferentes campos de saberes. Esse autor considera que o trabalho do professor é historicamente estruturado e hierarquicamente organizado segundo disciplinas, cujos conteúdos guardam poucos indícios de articulação. As redes hipertextuais apresentadas por Lévy (2006), a princípio, indicam aspectos que favorecem a articulação de saberes na ação do professor de Matemática e das demais Ciências.

Atualmente, alguns autores como Morin (2004), por exemplo, consideram fundamental fazer com que a Educação rume para novos horizontes que permitam o engajamento de estudantes em estudos capazes de articular cada vez mais as disciplinas entre si, de modo a diminuir a rigidez entre as fronteiras que demarcam diferentes campos de saberes. Isso possibilitaria travessias mais suaves e aumentaria os intercâmbios entre as disciplinas. Para que isso se concretize, existe a necessidade de mudar a concepção de currículo, passando da visão que D'Ambrosio (2002) chama de cartesiana [de caráter estático e definitivo] para outra

na qual a elaboração do conhecimento se dê sob uma forma dinâmica e contextualizada.

A passagem do currículo cartesiano para outro de característica dinâmica tem, na elaboração do conhecimento segundo redes de significados, uma possibilidade de inserir o estudante em processos de aprendizagens articuladas. Para Lévy (2006), as redes de significações estão em constante metamorfose e o conhecimento em contínua transformação, com diferentes temas ou objetos, podendo estabelecer novas conexões, originando outros nós nessa teia, que não pára de ser tecida. Fronteiras fixamente determinadas, como as que existem nas Ciências modernas, no conhecimento escolar e no conhecimento técnico podem ter seus contornos revistos e assumidos como relativos a partir da visão de conhecimento elaborado segundo redes de significações.

Machado (2005) apresenta fatores que dão relevância às redes de saberes e fundamentam o presente trabalho. Entre tais fatores, a elaboração do conhecimento por meio de redes e o fato de que o cotidiano escolar está repleto de feixes de significados em permanente tessitura são aspectos relevantes apontados pelo autor. A importância global de propor um ensino segundo redes consiste no fato de que os saberes provenientes de teorias consagradas e suas formas de elaboração podem ser modificados, exercendo influências mútuas. Quando essas modificações e influências acontecem, já não se dão dentro de campos bem delimitados, mas ocorrem de forma a relacionar as teorias existentes.

A possibilidade de ampliar discussões sobre a própria ação profissional dos professores é uma decorrência da importância global do tema da pesquisa, pois a idéia de redes de conhecimentos aponta para uma possibilidade de conexão entre saberes de diferentes campos profissionais.

Morin (2004) foi um pensador que influenciou o presente trabalho. Entre as idéias do autor está a de que se deve

[...] pensar o problema do ensino, considerando, por um lado, os efeitos cada vez mais graves da compartimentação dos saberes e da incapacidade de articulá-los, uns aos outros: por outro lado, considerando que a aptidão para contextualizar e integrar é uma qualidade fundamental da mente humana, que precisa ser desenvolvida, e não atrofiada (MORIN, 2004, p.16).

A afirmativa do autor é uma pista da necessidade de buscar ligações entre diferentes saberes, separados e fragmentados, com objetivo de aumentar a eficiência do trabalho do cientista, fato que se reflete na formação de professores e influencia as suas ações.

Autores contemporâneos como Machado (2005), argumentam que o ensino realizado em pequenas cadeias lineares restringe a elaboração complexa do conhecimento. Além disso, a organização do ensino de Ciências por meio de redes de conhecimentos, na visão desse autor, capacita o estudante a reunir diferentes pontos de vista sobre o mesmo objeto de estudo.

O principal objetivo do presente trabalho foi encontrar suporte para o desenvolvimento de ações didáticas que aproximem e articulem os ensinamentos de Biologia e de Matemática no nível médio. Na busca dessas possibilidades, foi levado em consideração que utilizar Matemática nas pesquisas de outros campos científicos possibilita estudar, descrever fenômenos com maior riqueza de detalhes e resolver problemas fora do alcance exclusivo do conhecimento matemático.

## **2.2 O desenvolvimento do trabalho**

Devido à complexa teia de relações entre temas de Biologia e Matemática, foi necessário adotar um método de pesquisa que faça, de acordo com Flick (2004, p. 21):

[...] justiça à complexidade do objeto em estudo. Aqui, o objeto em estudo é o fator determinante para a escolha de um método e não ao contrário. Os objetos não são reduzidos a variáveis únicas, mas são estudados em sua complexidade e totalidade em seu contexto.

Inicialmente é necessário distinguir dois campos de atuação: o da Matemática científica e o da Educação Matemática. No campo da Matemática científica estão os matemáticos profissionais, que lidam com o conhecimento matemático, pesquisando e buscando produzir novos saberes científicos. Na Educação Matemática estão os educadores matemáticos, que buscam o desenvolvimento do ensino da Matemática. Enquanto a Matemática científica é um campo preocupado com o desenvolvimento

do conhecimento matemático, a Educação Matemática possui objetos e objetivos de estudos próprios, relacionados às funções de ensino e de aprendizagem da Matemática, lidando com saberes matemáticos ao mesmo tempo em que se aproxima das ciências Sociais. A atuação complexa do educador matemático é vista por Fiorentini e Lorenzato (2006, p.4) como a de um indivíduo que realiza

[...] seus estudos utilizando métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas, tendo como perspectiva o desenvolvimento do conhecimento e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor.

O fato de utilizar elementos de ciências Humanas e Sociais dá às pesquisas na Educação Matemática um caráter de elo entre os saberes específicos da Matemática e os de outros campos de conhecimento como, por exemplo, as Ciências ligadas ao ensino, Didática e Psicologia da Educação entre outras.

Dentro do panorama apontado por Fiorentini e Lorenzato (2006), que se basearam em Demo (2000) o presente trabalho pode ser classificado como um estudo teórico, pois a sua realização teve como objetivo desenvolver um quadro de referência na busca de relações entre a Biologia e a Matemática. Estas Ciências foram estudadas dentro de um quadro de possibilidades de aproximar saberes desses dois campos, por meio da busca de elementos capazes de articular as ações didáticas de professores das duas disciplinas.

Muitas vezes os conceitos de Ciências como a Biologia, a Física e a Química são descritos por instrumentos provenientes da Matemática. Com o passar dos anos, por exemplo, os trabalhos de pesquisa em Biologia se apoiaram cada vez mais na utilização da Matemática. Sobre a influência da Matemática nas pesquisas em Biologia, Bevilacqua et al (2003) afirmam que:

são inegáveis os benefícios que vieram na esteira das transformações tecnológicas dos últimos 20 anos, resultado da pesquisa multidisciplinar. E essa proximidade entre pesquisa e aplicação estimula o interesse de estudantes [...] de fato, os problemas multidisciplinares são fascinantes! Entretanto, são problemas extremamente complexos e, para serem solucionados, exigem habilidades especializadas em diferentes áreas que conciliem desde a linguagem até a definição de prioridades na estratégia de resolução. Particularmente, os problemas em Bio-Matemática - aqui o termo é usado com significado bem amplo - têm proporcionado vasto campo de pesquisa como também oportunidades de trabalho fora do meio acadêmico.

Mais adiante, os mesmos autores afirmam que:

[...] é fundamental destacarmos que determinadas características relacionadas à evolução e à progressão da AIDS, provêm da modelagem matemática. Protocolos de tratamento usando uma única droga foram substituídos por aqueles que usam combinações de drogas, como resultado desse entendimento (BEVILACQUA et al, 2003, p.55).

Em relação à influência da Matemática no desenvolvimento da Biologia, Mattiazzo-Cárdia e Moraes (2004, p. 11) afirmam que:

não restam dúvidas de que a Matemática tem função preponderante no desenvolvimento da Biologia, papel que vem se tornando mais expressivo, a cada dia, com o aperfeiçoamento dos modelos matemáticos que têm servido de ferramenta indispensável aos avanços tecnológicos ou científicos.

Em relação à articulação da Matemática com a Genética, Soares (1999), autor de livros didáticos de Biologia, afirma que:

a Genética é uma ciência essencialmente estatística [...] os problemas formulados (em Genética) são apresentados em **proporções** ou **percentuais**. Por outro lado, a Estatística tem toda a sua estrutura na pesquisa quantitativa, matemática, dos fatos e das coisas (SOARES, 1999, p.360, grifos do autor).

Mais um exemplo de que Biologia e Matemática podem ser articuladas é a aplicação de funções ao estudo da evolução de uma população. Aliás, formular modelos matemáticos para interpretar fenômenos é atividade comum à Biologia, à Física à Química. Essas formulações de modelos são indícios da possibilidade de utilizar articuladamente as linguagens desses campos científicos para planejar as ações dos professores. Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio (PCNEM+, 1999) mencionam que:

o conjunto das competências de investigação e compreensão é relativamente mais amplo, também constituído por: identificação de dados e informações relevantes em situações-problema para estabelecer estratégias de solução; utilização de instrumentos e procedimentos apropriados para medir, quantificar, fazer estimativas e cálculos; interpretação e utilização de modelos explicativos das diferentes; identificação e relação de fenômenos e conceitos em um dado campo de conhecimento científico; articulação entre os conhecimentos das várias e outros campos do saber (BRASIL, PCNEM+, 1999, p.29).

Um campo de pesquisa que se desenvolveu a partir do estreitamento das relações entre a Biologia e a Matemática, é a Engenharia Genética. O próprio

desenvolvimento desse campo de pesquisas é uma teia de relacionamentos entre diferentes setores de pesquisa científica. Ao mesmo tempo em que desenvolveu, esse desenvolvimento permitiu avanços dos conhecimentos da Genética, da Bioquímica, da Microbiologia, da Biologia Celular e Molecular. Uma possível definição de Engenharia Genética seria a de uma Ciência cujas técnicas identificam, manipulam e multiplicam genes de organismos vivos. De acordo com Candeias (1991, p.3):

“falar de engenharia genética é caracterizar um conjunto de processos que permitem a manipulação do genoma de microrganismos vivos, com a conseqüente alteração das capacidades de cada espécie. Esta possibilidade de alteração das potencialidades genéticas dos organismos resultou da colaboração íntima e constante entre a chamada ciência básica e a ciência aplicada. Não que tal colaboração tenha sido programada com vistas a tornar realidade aquela intervenção. O que ocorreu foi a aquisição de novos conhecimentos fundamentais, como o esclarecimento da estrutura do ADN, e o ter sido possível decifrar o código genético, depois de serem caracterizados seus padrões fundamentais [...]”.

O progresso dessa Ciência permitiu a manipulação do DNA, a recombinação e alteração de genes por meio de trocas e/ou adições destes de modo a criar novos tipos de seres vivos<sup>7</sup>.

Na ligação da Biologia com a Matemática existente na Genética destaca-se o fato de que os modelos matemáticos, principalmente de caráter estatístico, são utilizados desde a interpretação, passam pela resolução de problemas e chegam até a apresentação dos resultados de pesquisas realizadas. Esse aspecto de impregnação da Biologia pela Matemática é mais um elemento que qualifica o conhecimento matemático como instrumento para resolução de problemas em diferentes campos.

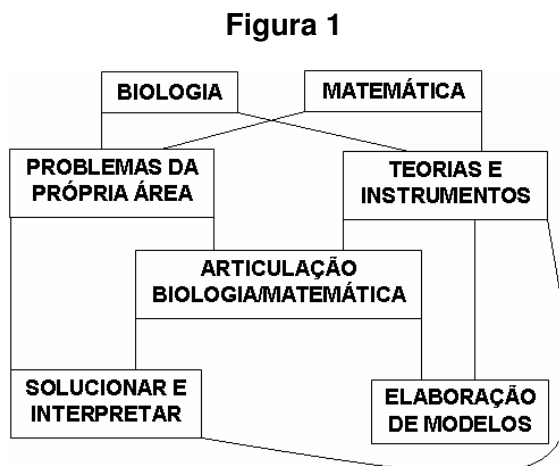
### **2.3 A busca dos dados**

---

<sup>7</sup> Entre as diferentes formas de atuação da Engenharia Genética estão o mapeamento das seqüências dos genes de espécies vegetais e animais, a criação de clones [cópias idênticas de seres vivos], criação de terapias genéticas [intervenções no conjunto de genes de um ser vivo por meio da introdução de genes capazes de gerar proteínas] e a produção de organismos transgênicos.

Neste trabalho, a Biologia e a Matemática foram vistas como objetos de atuação do professor e instrumentos da elaboração de conhecimento do estudante no Ensino Médio. Respeitadas as peculiaridades de cada campo em questão, buscou-se evidências de vínculos entre a Biologia e a Matemática e, a partir dessa perspectiva, foram selecionados temas capazes de desenvolver competências científicas, habilidades de pesquisa e análise, além de favorecer a elaboração de instrumentos de pensamento. A figura 1, a seguir, ilustra uma forma de aproximação entre estas duas Ciências.

Temas específicos onde é possível a articulação entre a Biologia e a Matemática são abordados no capítulo quatro. Como se pode observar no diagrama da figura 1, é apresentado um esquema de uma possível ocorrência de aproximação entre a Matemática e a Biologia.



**Fig. 1:** A aproximação que pode ocorrer entre a Biologia e a Matemática, quando esta última serve de instrumento de análise da primeira.

Ambas as Ciências têm suas teorias e formas de tratar as questões da própria área. A relação entre a Matemática e a Biologia dá-se pelo fato da primeira poder servir de apoio à segunda na resolução de situações durante uma pesquisa, na interpretação e na representação de resultados. A Matemática, com suas teorias e metodologias próprias, aproxima-se da Biologia na elaboração de modelos capazes de solucionar problemas e interpretar situações, podendo favorecer ações articuladoras no tratamento de temas que momentaneamente sejam comuns às duas Ciências.

Diante da necessidade contemporânea de buscar um conhecimento cada vez mais complexo, o presente trabalho foi realizado tendo em vista o atual quadro de

fragmentação das ciências e do seu ensino. A partir disso foram buscados temas de Biologia que utilizassem instrumentos matemáticos adequados a uma abordagem articuladora do ensino das duas Ciências.

Buscou-se temas da Biologia cujos problemas são resolvidos por modelos matemáticos abordados pela Matemática do Ensino Médio. Estes temas possibilitam vencer a fragmentação do ensino dessas duas Ciências e, ao mesmo tempo, apresentam significados para conceitos matemáticos fora do seu campo de abrangência.

Os dados da pesquisa foram obtidos a partir da leitura e da análise de livros didáticos de Biologia para a busca de temas com potencial articulador. Ao mesmo tempo em que esses temas foram levantados nas obras consultadas, escolheram-se outros da Matemática capazes de desenvolver as articulações entre esses dois campos.

A seleção de temas recaiu sobre aqueles que originalmente pertenceriam à Biologia e cujas metodologias de descrição dos fenômenos ou cujos problemas a resolver recebem tratamento matemático. Em função dessa identificação, foram fixadas duas categorias de escolha:

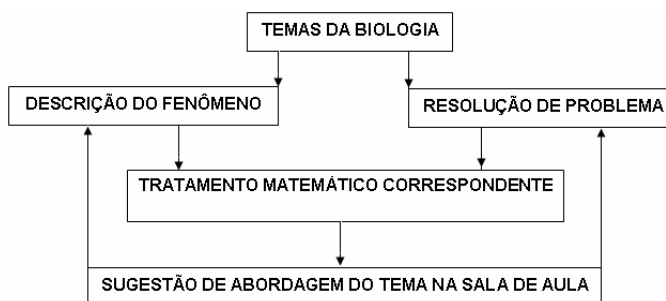
1<sup>a</sup>) A presença da Matemática na descrição dos fenômenos biológicos.

2<sup>a</sup>) A utilização de conhecimento matemático na resolução de problemas oriundos da Biologia.

As categorias utilizadas na classificação dos dados surgiram durante a organização e interpretação dos mesmos, sendo, portanto, tidas como emergentes, de acordo com o critério apresentado por Fiorentini e Lorenzato (2006). Para efeito de organização do capítulo 4, os temas da Biologia em que a presença da Matemática serve para a sua apresentação antecedem os que utilizam o conhecimento matemático na resolução de problemas biológicos. Temas como cinética enzimática, respiração e fotossíntese, crescimento vegetal e animal, pressão osmótica, transpiração vegetal, pH e curva de crescimento são temas da Biologia que normalmente utilizam a Matemática para descrição de fenômenos. A Genética (a árvore genealógica, a primeira e a segunda lei de Mendel, a polialelia, o monoibridismo, a co-dominância, a determinação da possibilidade de ocorrer um genótipo, a Genética de populações e a herança quantitativa) é um campo da Biologia com grande incidência de aplicações matemáticas para a resolução de problemas propostos.

A figura 2 a seguir apresenta o esquema da estratégia adotada para a identificação, categorização e tratamento de temas articuladores entre Biologia e Matemática no Ensino Médio, desde a identificação até a formulação de sugestões para aplicações em sala de aula.

**Figura 2**



**Fig. 2:** Descrição do processo de identificação, categorização e abordagem dos temas de articulação entre Biologia e Matemática.

## 2.4 Os livros pesquisados

A coleta de dados para a escolha dos temas de Biologia deu-se na biblioteca de uma instituição pertencente à rede privada de ensino da Cidade de Vitória, Espírito Santo. Os livros utilizados no levantamento de dados fazem parte do acervo dessa biblioteca e estão disponíveis para manuseio da comunidade escolar da instituição. Foram utilizados livros cujas editoras têm redes de distribuição com amplo alcance no território brasileiro. Na tabela 1 constam as obras de Biologia para ensino médio utilizadas na pesquisa. Na lista estão os nomes dos autores, as obras analisadas, o ano de publicação e os nomes das editoras.

A escolha do livro de volume único de Lopes (2001 e 2004) deveu-se ao fato de que, após pesquisar os temas, essa é a obra cuja apresentação mais explora a matematização na descrição, interpretação dos fenômenos e na resolução de problemas da Biologia. Esse foi um fato que aproxima as duas Ciências que são objetos de estudo do presente trabalho. A escolha da obra em questão foi apoiada por depoimentos informais de professores de Biologia que responderam à seguinte pergunta: “Qual livro de Ensino Médio de Biologia melhor explora a Matemática no

desenvolvimento dos estudos?” Essa pergunta englobava tanto a utilização da Matemática como elemento de descrição dos fenômenos biológicos quanto a sua utilidade como elemento necessário à resolução de problemas da Biologia. Um fato a destacar é a reformulação da edição de 2001, que resultou no livro lançado em 2004. Uma grande parte de elementos da Matemática, principalmente ligados à descrição de fenômenos, foi suprimida.

**TABELA 1:** As obras de Biologia para ensino médio utilizadas na pesquisa.

<b>Nome do (s) autor (es)</b>	<b>Nome da obra</b>	<b>Ano</b>	<b>Editora</b>
AMABIS, J. M.; MARTHO, G. R.	Biologia	2007	Moderna
BIRNER, E.; UZUNIAN, A.	Biologia	2002	Harbra
GEWANDSZNAJDER, F. LINHARES, S.	Biologia hoje	2003	Ática
LOPES, S. G. B. C.	Bio: volume único	2001 e 2004	Saraiva
SASSON, C.; SILVA JUNIOR, S.	Biologia.	2002	Saraiva
SOARES J. L.	Biologia no terceiro milênio v. 2	1999	Scipione

A escolha de Soares (1999) foi devida ao fato de que o autor explora detalhes da Matemática envolvidos com os conteúdos herança quantitativa e Genética de populações, que servem para aplicações de Estatística, Análise Combinatória, Probabilidades e Binômio de Newton.

Também foram incluídos nas análises os livros de Amabis e Martho (2007), Briner e Uzunian (2002), Gewandsznajder e Linhares (2003), Sasson e Silva Júnior (conhecidos nacionalmente como César e Sezar, 2002). Tais obras foram escolhidas por representarem edições mais recentes que incluem conteúdos de Biologia atualmente propostos para o Ensino Médio.

Nos livros didáticos de Biologia analisados foram encontrados temas comuns entre as propostas de conteúdos a serem abordados por autores de livros didáticos, relacionados na tabela 2. Nela, constam os temas abordados por cada autor e as obras de Biologia, indicadas pela legenda. A letra “X” indica a presença do tema na obra analisada.

**TABELA 2:** Temas de Biologia abordados por autor.

<b>Tópico da disciplina</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
Conceito, origens da vida, a química nos seres vivos.	X	X	X	X	X	
Estudo da célula.	X	X	X	X	X	X
Estudo dos tecidos.	X	X	X	X	X	
Reprodução.	X	X	X	X	X	X
Desenvolvimento embrionário.	X	X	X	X	X	
Classificação dos seres vivos.	X	X	X	X	X	
Vírus, procariontes, protocistas e fungos.	X	X	X	X	X	
Botânica.	X	X	X	X	X	
Zoologia.	X	X	X	X	X	
Sistemas e fisiologia humana.	X	X	X	X	X	X
Genética.	X	X	X	X	X	X
Evolução.	X	X	X	X	X	
Ecologia.	X	X	X	X	X	

Legenda:

- (1) AMABIS, J. M.; MARTHO, G. R.;
- (2) BIRNER, E.; UZUNIAN, A.;
- (3) GEWANDSZNAJDER, F.; LINHARES, S.;
- (4) LOPES, S. G. B. C.;
- (5) SASSON, C.; SILVA JUNIOR, S.
- (6) SOARES J. L.

Em relação às fontes de consulta de Matemática, a opção por utilizar os gráficos extraídos de Bianchini e Paccola (1992) na apresentação dos temas de funções deveu-se à clareza e facilidade da leitura dos mesmos. Como a linguagem gráfica é um poderoso elemento de comunicação, ela não poderia ser relegada dentro da própria Matemática ou nas relações dessa Ciência com as outras. Na mesma linha de raciocínio, foi feita a escolha dos gráficos extraídos de Machado (1988). Essa escolha é justificada pela necessidade de complementar o texto e pelo fato de que tais gráficos colaboram na apresentação e visualização dos temas grandezas diretamente proporcionais (associado à função afim) e grandezas inversamente proporcionais (associado à função  $y = k/x$ ), oriundos da Matemática e ligados à Biologia. Os gráficos extraídos de Dolce, Iezzi e Murakami (1991) foram escolhidos por se enquadrarem na apresentação clara das funções exponencial crescente e decrescente, assim como da função logarítmica crescente e decrescente. Além disso, eles têm a mesma clareza na apresentação das funções exponencial e logarítmica como inversas uma da outra. Por sua vez, a função exponencial está ligada ao tema “pH”, presente na Química e na Biologia. Ávila (2005) foi escolhido por esclarecer pontos do desenvolvimento histórico do estudo de funções.

A obra de Morgado et al (2000) foi escolhida por esclarecer fatos históricos de Análise Combinatória, Binômio de Newton e Probabilidades. Já os exemplos extraídos de IEZZI et al (2001) foram escolhidos pela possibilidade de aproximar estatística e probabilidade, que por sua vez têm aplicações dentro da Biologia, notadamente em Genética de populações e herança quantitativa.

A opção por extrair exemplos de Antar Neto et al (1979), tanto em análise combinatória como em probabilidades, deveu-se ao fato de que a referida obra é estruturada com a apresentação de exemplos que ajudam a desenvolver esses temas, que, por sua vez, estão ligados à Genética. Editada no fim da década de 1970, essa obra pode ser considerada de boa qualidade pelos exercícios resolvidos e propostos, além de não ser voltada para a simples apresentação de fórmulas com o objetivo imediato de aplicação.

Na tabela 3 estão as obras de Matemática utilizadas na pesquisa. Nela estão os nomes dos autores, obras analisadas, ano de publicação e as editoras. A obra de Ávila é não foi editada para o Ensino Médio, assim como a obra de Morgado et al.

**TABELA 3:** Obras de Matemática utilizadas na pesquisa.

<b>Nome do (s) autor (es)</b>	<b>Nome da obra</b>	<b>Ano</b>	<b>Editora</b>
ANTAR NETO, A. et al.	Coleção Noções de Matemática. v.1.	1979	Moderna
ÁVILA, G. S. S.,	Análise matemática para a licenciatura.	2005	Edgard Blücher
BIANCHINI, E.; PACCOLA, H.	Matemática. v.1	1992	Moderna
DOLCE, O.; IEZZI, G.; MURAKAMI, C.	Fundamentos de Matemática elementar. v. 2.	1991	Atual
IEZZI et al.	Matemática: Ciência e aplicações. v. 3.	2001	Atual
MACHADO, N. J.	Coleção Matemática por assunto	1988	Scipione
MORGADO, A.C. et al.	Análise combinatória e probabilidade.	2000	IMPA

A tabela a seguir apresenta as obras de Matemática e os temas abordados especificamente em cada uma delas.

**TABELA 4:** Obras de Matemática e os temas abordados com maior ênfase.

<b>Nome da obra</b>	<b>Tópico abordado</b>
Análise combinatória e probabilidade	História da Probabilidade, origens da Análise Combinatória e do Binômio de Newton.
Análise matemática para a licenciatura	História e origem do estudo de funções.
Coleção Matemática por assunto	Conceito de função, gráficos, proporção direta e inversa.
Coleção Noções de Matemática. v.1	Análise Combinatória, Binômio de Newton e Probabilidades.
Fundamentos de Matemática elementar. v. 2	Funções exponencial, logarítmica, gráficos e propriedades.
Matemática. v. 1	Conceitos e gráficos de funções.
Matemática: Ciência e aplicações. v. 3.	Conceitos em Estatística.

## 2.5 Os temas articuladores encontrados

Durante a análise dos dados, buscou-se manter a sintonia com os referenciais teóricos que ligam o conhecimento à complexidade e à articulação de saberes. Os dados foram analisados durante a coleta e agrupados após essa etapa, mantendo, como principal critério, a possibilidade de articulação dos temas de Biologia aos da Matemática no Ensino Médio a partir do momento em que fossem evidenciadas suas ligações. Com isso, foram identificados temas articuladores constantes na tabela 5 a seguir, elementos chave para a elaboração de conceitos que articulam a Biologia à Matemática. Os temas de Matemática escolhidos tanto servem para instrumentos de descrição como de compreensão dos fenômenos da Biologia, sendo utilizados também na apresentação dos resultados de pesquisa e resolução de problemas desta Ciência. Ao lado de cada tema da Biologia encontra-se o da Matemática a ele relacionado. Os temas de Biologia e de Matemática constantes na tabela 5 são capazes de, quando abordados, articuladamente aproximar essas duas Ciências.

**TABELA 5:** Temas de Biologia do Ensino Médio e os de Matemática a eles associados.

<b>TEMAS DA BIOLOGIA</b>	<b>TEMAS DA MATEMÁTICA</b>
Cinética enzimática. Respiração e fotossíntese. Crescimento vegetal e animal.	Funções: crescimento e decréscimo de uma função em um intervalo. Ponto de máximo. Valor máximo. Função com a variável dependente nula. Função constante. Fenômeno em duas etapas. Função descrita por mais de uma sentença. Interseção de curvas.
Pressão osmótica.	Medidas de segmentos de reta.
Transpiração vegetal.	Proporcionalidade.
Crescimento vegetal e Genética.	Porcentagem.
pH e curva de crescimento.	Função exponencial e logaritmo.
Genética: árvore genealógica; Primeira e Segunda lei de Mendel; Polialelia; Monoibridismo e co-dominância: determinação da possibilidade de ocorrer um genótipo.	Análise combinatória: Apresentação de dados sob forma de diagrama de árvore. Trabalho a partir de combinações com repetição de elementos. Probabilidade: Espaços amostrais, cálculos de probabilidades simples, de eventos mutuamente exclusivos, eventos complementares, de probabilidade condicional. Determinação de espaços amostrais sujeitos a condições dadas. Princípio multiplicativo e produto de probabilidades.
Genética de populações.  Herança quantitativa.	Estatística Porcentagem Probabilidades Binômio de Newton Triângulo de Pascal Frequência Aplicações da função afim e estudo de proporções.

### 3 MATEMÁTICA E REDES DE SABERES

A relação do ser humano com a Matemática é antiga. De acordo com Davis e Hersh (1985), os primeiros registros de trabalhos matemáticos datam de aproximadamente quatro mil e quinhentos anos atrás, por volta de 2400 a.C. Nos primórdios da humanidade, segundo Miorim (1998), tanto a produção matemática quanto o ensino do saber acumulado eram simultâneos. Com isso, no mesmo tempo e lugar em que o conhecimento matemático era desenvolvido, os resultados desse desenvolvimento eram disseminados. O afastamento entre a produção e o ensino da Matemática ocorreu posteriormente, devido ao crescimento da quantidade e da complexidade de saberes, além de mudanças nas condições sociais, econômicas e políticas em determinados lugares e períodos históricos. No Antigo Egito, por exemplo, além do Faraó, existiam sacerdotes, funcionários públicos, militares, artesãos, comerciantes, camponeses e escravos, cada um desses personagens exercendo papéis específicos dentro da sociedade da época. A partir da separação entre atividade manual e intelectual, passou a existir entre os povos da antiguidade [como no Antigo Egito e Mesopotâmia], de forma intencional, uma diferenciação entre o ensino voltado para a prática cotidiana e o direcionado para a formação de uma elite dirigente.

Considerada desde o início da sua evolução, a Matemática tanto pode ser analisada como um conjunto de saberes em constante mutação quanto pela sua característica de campo de saberes cumulativo.

A Geometria pode ser um exemplo da constante evolução da Matemática. Conceitos da Geometria passaram pela reorganização de Euclides [aproximadamente trezentos anos antes de Cristo], que foi aceita durante quase dois mil anos, até meados do século XIX. Nessa época, quando outro movimento de revisão dos fundamentos da Matemática levou à reestruturação de conceitos, foram modificados postulados e teoremas euclidianos, até então estabelecidos e aceitos como verdade absoluta.

Pela evolução e ampliação de suas estruturas, a Matemática também se caracteriza como conhecimento cumulativo. A cada novo trabalho, os matemáticos agregam saberes aos já existentes e essa ampliação cria novos conceitos dentro de uma rede que vem sendo tecida há milhares de anos. O crescimento e

desenvolvimento da Matemática têm a característica de, em princípio, não vincularem o estabelecimento de novas estruturas abolindo todas as construções antigas, como bem apontam Davis e Hersh (1985, p. 44), quando afirmam que:

conceitos são ampliados e têm suas possibilidades preenchidas [...] novos objetos matemáticos são delineados e trazidos para a luz dos refletores. São encontradas novas interconexões, exprimindo assim novas unidades. São procuradas e encontradas novas aplicações enquanto isso ocorre, o que é velho e verdadeiro é preservado - pelo menos em princípio. Tudo o que uma vez foi matemática permanece matemática - pelo menos em princípio. Desta maneira, pareceria que o assunto é um organismo vasto e crescente.

A cumulatividade da Matemática, por sua vez, leva ao problema de crescimento da quantidade de saberes e à impossibilidade de alguém percorrer sozinho todos os campos da Ciência, conhecendo detalhadamente cada nova propriedade estabelecida. Com isso, diferentes setores da Matemática podem crescer guardando ou não relações entre si.

### **3.1 Da Grécia Antiga ao século XX: breve histórico**

Com a consolidação das cidades-estado gregas (por volta do século VIII a.C.), leitura e escrita passaram a interessar seus nobres e dirigentes, mudando o foco da Educação, antes voltada à preparação do guerreiro, para a formação do cidadão intelectualizado, capaz de sustentar discussões políticas ao invés das armas. A separação entre a atividade intelectual e a manual também existiu na Grécia Antiga.

Ainda que a escrita e a Matemática passem a despertar o interesse das elites, o saber matemático na Grécia Antiga era de caráter eminentemente teórico, não se voltando para aplicações práticas. Nessa mesma época, surge uma importante oposição de caráter filosófico: o contraste Matemática Algorítmica X Matemática Dialética, que coloca de um lado os que defendem a possibilidade de criar soluções particulares para problemas e, do outro, os que vêm a resolução desses mesmos problemas a partir de padrões rígidos e pré-estabelecidos por uma teoria. A origem da Matemática Dialética, segundo Davis e Hersh (1985), é devida aos antigos gregos, que deram a esse campo de estudos o caráter lógico-dedutivo, processo de

impregnação dialética que passou a ser utilizado na justificativa da validade dos algoritmos aplicados. A partir desse atributo dialético, os temas matemáticos passaram a fazer parte dos currículos na Grécia Antiga, mas restritos à apreciação filosófica, constituindo-se em um instrumento de desenvolvimento do raciocínio abstrato. A presença da Matemática nos currículos da época tinha um valor elitista e criava uma dicotomia: para se desenvolver o raciocínio era necessário abstrair; para relacionar-se com o mundo concreto realizava-se o desenvolvimento da prática desvinculada da teoria.

O conflito e a impossibilidade da convivência entre quantitativo/qualitativo, teoria/prática e abstrato/concreto fazem parte das discussões teóricas desde a Grécia Antiga. Entre os mais conhecidos pensadores da Grécia Antiga, destaca-se Pitágoras<sup>8</sup>, que procurou traduzir em números as propriedades do universo. Posterior a Pitágoras, Platão<sup>9</sup> considerava a existência de um universo matemático ideal e nele procurava as qualidades ausentes nos objetos reais, julgados como cópias de entes ideais, inexistentes no mundo material que cerca o indivíduo. Para Platão, a aprendizagem básica da Matemática deveria ser estendida apenas à infância. Posteriormente, poucos indivíduos bem dotados espiritualmente poderiam ser selecionados para a aprendizagem da Matemática superior e formalizada. Aristóteles, discípulo de Platão, também buscava analisar as qualidades dos objetos, porém de forma diferente de seu antecessor. Se para Platão existiam objetos perfeitos e com propriedades ideais em um mundo que não era humano, Aristóteles<sup>10</sup> buscava categorizar os objetos reais ligados à experiência humana segundo as suas qualidades.

Fora dos círculos de discussão filosófica na Grécia Antiga e sem ligações com as escolas do pensamento grego estavam os sofistas<sup>11</sup>, indivíduos que se dedicaram ao ensino de forma profissional e remunerada. Mesmo não tendo propostas didáticas comuns, eles foram os primeiros a atribuir explicitamente valor pedagógico ao conhecimento matemático, incluindo-o de forma regular nas suas práticas educacionais. O ensino de Matemática dos sofistas se concentrava na Educação Superior, limitado às elites com condições financeiras de acessar esse nível de ensino.

---

<sup>8</sup> 582a.C a 497a.C.

<sup>9</sup> Aproximadamente de 427 a.C. a 347 a.C.

<sup>10</sup> 384 a.C. a 322 a.C.

<sup>11</sup> Auge no século V a.C.

A Matemática na Grécia Antiga teve seus méritos e suas limitações. Os antigos matemáticos gregos são considerados responsáveis pelo estabelecimento do rigor lógico-dedutivo e pela criação da demonstração, mas por outro lado, não foram capazes de chegar ao conceito de variável, que prejudicou o desenvolvimento da noção de função. Devido à influência da postura filosófica dos Pitagóricos<sup>12</sup>, os antigos gregos tiveram problemas em relação aos números irracionais e isso os levou a separar a Aritmética da Geometria e possivelmente retardou o desenvolvimento da Álgebra.

Durante o predomínio do Império Romano, posterior à antiguidade grega, a Matemática continuou a ser ensinada, competindo em grau de importância com os estudos literários.

Durante a Idade Média<sup>13</sup> ocorreu o predomínio do ensino de caráter religioso e o conhecimento matemático foi colocado em plano inferior. Nessa época, alguns mosteiros foram locais de preservação do ensino da Matemática, mas destacava-se uma Educação de caráter religioso, voltada principalmente para a aprendizagem do latim e da leitura de textos sagrados. O ensino da Matemática foi praticamente limitado aos elementos necessários à compreensão das escrituras sagradas e manipulação do calendário litúrgico, quase desaparecendo juntamente com os originais das obras do período clássico grego.

Passada a Idade Média, na época das grandes navegações, a retomada do comércio e o incremento de algumas atividades industriais deram novo impulso ao desenvolvimento e ao ensino da Matemática. O renascimento da Matemática na Europa coincide com o Renascimento artístico e cultural<sup>14</sup>. Nessa época, aspectos práticos e ligados ao comércio e às artes em geral ganharam relevância.

As mudanças dessa época são associadas às necessidades de uma classe social em ascensão: a burguesia. A Europa revia suas noções de sociedade, religião e poder político. Um ensino de Matemática de caráter laico passou a ser realizado em áreas urbanas, desenvolvido individualmente e no próprio local de trabalho dos instrutores, muitos deles indivíduos autodidatas e ligados a diferentes profissões.

---

<sup>12</sup> Para os Pitagóricos, a noção de número se restringia aos que contemporaneamente são conhecidos como naturais e inteiros. Os números irracionais surgidos na época constituíram um grande obstáculo epistemológico que não foi vencido. Na expressão “tudo são números” ou equivalente, os números em questão são os inteiros e as frações.

<sup>13</sup> Iniciada com a desintegração do Império Romano do Ocidente, no século V d. C. e termina com a queda de Constantinopla em 1453 d.C.

<sup>14</sup> Entre os séculos XIV e XVI.

Segundo Miorim (1998, p. 33) as aulas ocorriam em “[...] escolas práticas [...]” nas quais se ministravam aulas de “[...] aritmética prática, álgebra, contabilidade, navegação e trigonometria [...] por meio de um ensino individualizado, ministrado por um mestre prático em determinada atividade produtiva [...]”. Durante o Renascimento, apareceram os primeiros livros que utilizavam os símbolos hindu-árabicos de numeração e as primeiras tentativas de ensinar geometria utilizando aplicações práticas de forma independente da que é exposta em *Os Elementos*, de Euclides.

De acordo com Miorim (1998), se por um lado ocorriam mudanças no ensino de Matemática na Europa, por outro, as matemáticas de caráter especulativo e de origem platônica ainda eram privilegiadas nos estudos clássicos direcionados à formação da aristocracia. Quando incluída nessa modalidade de ensino, a Matemática era vista sob o ponto de vista platônico, abordando objetos ideais e sem vislumbrar aplicações práticas. A Matemática voltada para a prática e a que era orientada para a especulação conviveram na Europa até a virada do século XIX para o XX, quando a coexistência entre ambas mostrou-se inviável. As escolas de ensino médio técnico e estabelecimentos de ensino superior demandavam um tipo de Matemática que pudesse ser aplicada ao desenvolvimento de projetos como também no mundo real.

Com o advento da Ciência moderna, foi a vez de pensadores como Galileu<sup>15</sup>, Descartes<sup>16</sup>, Leibniz<sup>17</sup> e Newton<sup>18</sup>, com seus trabalhos, abrirem de vez as portas para a análise quantitativa nos trabalhos científicos. Na época da revolução científica, a Matemática assumiu definitivamente o aspecto de ferramenta para o desenvolvimento de outras Ciências. Ainda segundo Miorim (1998, p. 41):

com o início da ciência moderna, que combinou pela primeira vez os métodos experimental e indutivo com a dedução matemática, ou seja, que rompeu com a barreira existente entre a tradição artesanal e a culta, entre a razão e a experiência, [...] as matemáticas passaram a desempenhar um novo e importante papel: o de ferramenta necessária à explicação dos fenômenos [...] como elemento fundamental para a formação, comprovação e generalização de resultados que podem, ou não, ser confirmados na prática.

---

<sup>15</sup> Pisa, 1564; Florença, 1642.

<sup>16</sup> La Haye, 1596; Estocolmo, 1650.

<sup>17</sup> Leipzig, 1646; Hanôver, 1716.

<sup>18</sup> Woolsthorpe, 1643; Londres, 1727.

Para Henry (1998), o conhecimento que existia na fase anterior à revolução científica, antes do surgimento daquilo que hoje é chamado de Ciência, é denominado “filosofia natural”. Os “filósofos naturais” eram pessoas que buscavam explicações abrangentes para os fenômenos do mundo e a filosofia natural passou por uma série de modificações que resultaram progressivamente em uma nova forma de ver o mundo, chamada de Ciência.

O que se convencionou chamar de revolução científica é o conjunto de acontecimentos com auge no século XVII, na Europa ocidental, época e local em que ocorreram mudanças na filosofia natural, gerando modificações nos métodos de estudo e nas formas pelas quais os saberes passaram a ser legados. Parte do mundo mudou seu modo de olhar o universo a partir dos trabalhos de homens que, a princípio, eram filósofos da natureza. Entre eles destacam-se Galileu, Descartes e Newton. A Matemática especulativa, sem supostas aplicações práticas, foi gradualmente substituída nos círculos de pensadores por um conjunto de saberes a serviço da descrição do universo.

Com a revolução científica, as aplicações da Matemática aos estudos de diversos fenômenos se sobrepuseram à especulação filosófica qualitativa, de origem aristotélica, que dominou o ensino durante milênios. Com o advento da modernidade e a perda da hegemonia do pensamento aristotélico, abriram-se perspectivas para a universalização do discurso científico matemático. Nessa época, a Matemática passou a instrumento de representação do mundo, tornando-se elemento responsável pela precisão na descrição dos fenômenos e de certificado na validação das novas teorias que se estabeleceram. Sobre o progressivo aumento do espaço ocupado pela Matemática e a irreversível perda de prestígio do pensamento aristotélico, Henry (1998, p.28) comenta que:

cada vez mais [...] vemos matemáticos envolvidos com mecânica terrestre que não se satisfaziam em apresentar seu trabalho como meramente descritivo ou subserviente a uma filosofia natural aristotélica tradicional [...] a separação entre teoria e prática, imposta pelos professores universitários de filosofia natural, foi repetidamente declarada insustentável.

O envolvimento progressivo do saber matemático em diferentes estudos ajudou o seu próprio desenvolvimento: os matemáticos passam a ser considerados não mais como elementos secundários nos estudos das Ciências mecânicas e da filosofia da natureza, mas são qualificados como pertencentes a uma elite

intelectual. Galileu, por exemplo, afirmava que a natureza pode ser compreendida a partir de aplicações do saber matemático. A obra que Henry (1998) considera o marco da Matemática como instrumento de descrição do mundo é o livro de Isaac Newton intitulado “*Princípios matemáticos de filosofia natural*”, publicado em 1687. Segundo Henry, por meio dessa obra, Newton demonstra matematicamente as leis dos movimentos dos planetas anteriormente postuladas por Kepler. A publicação dos “Princípios”, no fim do século XVII, representa o fechamento de um ciclo de desenvolvimento da Matemática iniciado pelos filósofos da natureza no século XVI.

A Matemática que serviu ao modelo científico moderno como elemento para desenvolver o conhecimento, também tornou-se instrumento de uniformização e hegemonia. O lugar de destaque da Matemática dentro das práticas científicas modernas e as formas pelas quais o conhecimento se tornou instrumento de dominação é criticado por autores como D’ Ambrosio (1986 e 2002) e Santos (2004).

Para Santos (2004), a relação entre Matemática e Ciência moderna Matemática vai além do fato desta última servir de instrumento para desenvolver a anterior. Segundo esse autor

a matemática fornece à ciência moderna, não só o instrumento privilegiado de análise, como também a lógica da investigação, como ainda o modelo de representação da própria estrutura da matéria [...] deste lugar central da matemática na ciência moderna derivam suas conseqüências principais. Em primeiro lugar, conhecer significa quantificar. O rigor científico afere-se pelo rigor das medições. As qualidades intrínsecas do objecto são, por assim dizer, desqualificadas e em seu lugar passam a imperar quantidades em que eventualmente se podem traduzir. O que não é quantificável é cientificamente irrelevante. Em segundo lugar, o método científico se assenta na redução da complexidade [...] conhecer significa dividir e classificar para depois poder determinar relações sistemáticas entre o que se separou [...] (SANTOS, 2004, p. 26 e 27).

Dentro do que é conhecido como Ciência moderna, tem-se nessa perspectiva a Matemática servindo como elemento centralizador do discurso científico. Além de elemento quantificador, a Matemática sob o ponto de vista descrito por Santos (2004) é vista como elemento de reducionismo. A Matemática entra no discurso científico moderno como instrumento de simplificação das “leis da natureza”, levando o conhecimento científico moderno a ser um instrumento de procura de regras fixas.

De acordo com D’ Ambrosio, existe uma presença da ideologia nas Ciências, que se tornaram instrumentos de dominação ideológica inseridas na Educação, o que pode ser notado na seguinte passagem:

é suficientemente provocativo para estimular [...] questionamentos [...] para a discussão principal, que em linhas gerais tem a ver com a mentalidade de ciência, em particular de Matemática. Esta questão pode ser reformulada da seguinte maneira: há alguma ideologia implícita na Matemática? Isto é, no assim chamado raciocínio matemático? [...] o projeto ocidental começou pela fusão do pensamento grego ao judaico, e a ciência ocidental e seu mais importante produto, a tecnologia, são resultantes desta fusão. Elas estão implícitas no que podemos chamar de modo de pensamento ocidental [...] estaríamos enganando a nós mesmos não examinando a Ciência e a Tecnologia como ideologia [...] e seria ainda mais ingênuo de nossa parte não reconhecer na educação uma importante componente ideológica (D'AMBROSIO, p. 56).

Ainda na linha de crítica ao pensamento ocidental, o conhecimento classificado como científico, a tecnologia e as influências desses elementos sobre a Educação, D' Ambrosio (2002, p. 66 e 67) afirma que o modelo educacional do ocidente

pretende cuidar prioritariamente do intelecto, sem qualquer relação com as funções vitais. Graças a isso, que se firmou na filosofia ocidental desde Descartes, dicotomiza-se o comportamento do ser humano entre corpo e mente [...] saber e fazer [...] desenvolvem-se, com base nisso, teorias de aprendizagem que distinguem um saber fazer/fazer repetitivo do saber/fazer dinâmico, privilegiando o repetitivo. Há expectativas de resultados que respondam ao padrão e essa expectativa vem por sua vez privilegiar o saber como conhecimento e o fazer como produção [...] confrontada com o padrão por *controle de qualidade* e o conhecimento por *avaliação*. Na verdade, ambos estão na mesma categoria de confronto com um padrão e são estáticos e inibidores [...] a idéia de "gerenciamento científico" introduzida no sistema de produção industrial por F. W. Taylor [...] tem um paralelo muito importante na educação. Ao se introduzir o sistema de massa em educação, o aluno é tratado como um automóvel que deverá sair pronto ao final da esteira de montagem, e esse é o objetivo do processo [...] o análogo do taylorismo em educação é a primazia do currículo, com seus componentes *objetivos, conteúdos e métodos* (grifos do autor).

Sob o ponto de vista de D' Ambrosio a Ciência moderna [na qual a Matemática está inserida] as tecnologias dela derivadas servem como instrumento de simplificação, fragmentação e dominação, via modelos educacionais. Em tais modelos não se leva em consideração a presença dos sujeitos, supostos agentes e nem as finalidades desses mesmos modelos.

### **3.2 Alegoria, metáforas e significados**

De acordo com Machado (2005), a constante evolução do conhecimento levou ao refinamento das técnicas científicas. Tal evolução deslocou as atenções dos entes matemáticos, primeiramente considerados como objetos de conhecimento, para as relações em que eles se acham enredados.

A alegoria é, para Machado (2005, p. 159), uma transferência de “[...] relações significativas de um contexto para outro”, correspondendo a “[...] uma metáfora continuada, ou o encadeamento de metáforas” com o objetivo de esclarecer significados na elaboração de uma narrativa. Machado considera que:

- 1) A partir da metáfora, é possível trabalhar o sentido figurado de determinado objeto.
- 2) A alegoria serve para a elaboração de um cenário favorável ao encadeamento das idéias.

As metáforas e alegorias permitem o deslocamento de significados já estabelecidos, dando novos sentidos às situações de elaboração de outros feixes de significados.

Para Machado (2005), ao lançar mão de metáforas e alegorias, é possível utilizar analogias e recursos de uma língua para articular imagens e propriedades dos objetos e/ou relações, coordenando raciocínios, ao mesmo tempo em que se transita em uma rede de significados. Com isso, é possível relacionar diferentes imagens e significados necessários à estruturação do pensamento e à compreensão de conceitos. A metáfora pode ter caráter de mobilização didática, como elemento de referência, quando serve a processos de elaboração de significados.

Segundo Machado (2005), em relação à Matemática, as metáforas e alegorias agem no desenvolvimento e coordenação de idéias, servindo para ligá-las em contextos diferentes. O uso de metáforas não é uma simples escolha, mas um ato importante e inevitável. Porém, deve-se ter cuidado ao exercitar essa utilização, pois cada metáfora é capaz de conduzir à compreensão de um fenômeno específico.

A alegoria e o desempenho docente, segundo Machado (2001, p. 10) são elementos que guardam importantes ligações, pois “[...] a metáfora [...] é importante, de uma maneira geral, na caracterização do estilo; é um instrumento essencial aos que se dedicam à Matemática, sobretudo ao seu ensino”. Nas construções das metáforas que visam à elaboração de novas relações e à concepção de novos contextos e significados a partir da fusão daqueles que já são familiares, usam-se

imagens com as quais se tem mais intimidade. Para Machado (2001, p. 13), “[...] a metáfora emerge como um poderoso instrumento para a construção analógica de pontes entre os temas considerados”. O pensamento figurado pode ser explorado em Matemática por meio de metáforas e alegorias. A partir desse aspecto do pensamento figurado, o emprego do saber matemático em outros campos científicos pode se dar de forma a explorar diferentes significados do mesmo objeto.

Um exemplo de utilidade didática da aplicação de metáforas é o da balança, apresentada com os dois pratos no mesmo nível em relação a uma superfície considerada horizontal, para representar os dois membros de uma equação. No caso, a metáfora funciona como indicação de que os dois membros da igualdade devem passar por transformações que visem à manutenção do equilíbrio entre os dois “lados”. Se os dois pratos forem apresentados desnivelados, a balança é utilizada para representar uma desigualdade matemática que caracteriza a inequação.

Algumas representações alegóricas contribuíram para a fragmentação do conhecimento e até hoje influenciam tanto o trabalho científico quanto a ação didática. Para a o discurso científico da modernidade, a metáfora que representava o funcionamento do universo era a do relógio, máquina bem ajustada, com cada peça responsável por induzir o funcionamento de outra. A Ciência após a modernidade tende a ver o universo como uma rede em que o desempenho de determinado elemento não é conseqüência imediatamente induzida por outro já existente. Ao invés da imagem de uma obra bem acabada, com fundações, pavimentos e telhado, a evolução do conhecimento científico, nessa visão após a modernidade, assemelha-se à tessitura de uma teia irregular. Nessa trama, todos os elementos encontram-se enredados e não sobrepostos como tijolos em uma parede ou mesmo justapostos como os ladrilhos de um pavimento. Entre as alegorias que imperaram na constituição do discurso científico moderno, destacam-se os modelos de Descartes e de Comte.

A concepção moderna de conhecimento atinge seu auge com o estabelecimento da filosofia positivista, elaborada por Comte, que apresenta uma hierarquia necessária entre as Ciências. De acordo com esse filósofo, a construção do edifício do conhecimento deve ser iniciada com a aprendizagem da Matemática, pré-requisito principal das aprendizagens posteriores. Comte via a Matemática como Ciência a ser estudada antes da Astronomia, da Física, da Química, da Biologia e da

Sociologia, estabelecendo, nesta ordem, uma hierarquia entre esses campos científicos, escolha que resultou em uma organização disciplinar rígida. O Positivismo colocou a Matemática como pré-requisito universal das outras disciplinas, o que levou os estudos dessa Ciência a poucas aplicações práticas, além de desligar os tópicos matemáticos das outras disciplinas. As aplicações práticas deveriam ser apresentadas posteriormente, ao estudar outras Ciências, mas o ensino da Matemática assim concebido acabou isolando esta disciplina de outras modalidades científicas.

Anteriormente à concepção positivista, a idéia da árvore cartesiana estabeleceu-se como modelo do conhecimento. Para Descartes, um dos inspiradores de Comte na elaboração do Positivismo, o conhecimento assemelhar-se-ia a uma árvore, cujas raízes estariam na Metafísica e cujo tronco seria a Filosofia Natural. A Astronomia e as outras Ciências seriam os ramos e a Matemática assumiria o papel de seiva, encarregada de irrigar e alimentar todas as partes dessa árvore. Nessa alegoria, a Matemática não tem identidade própria como Ciência, já que se encontra distribuída por todo o organismo. Tanto a concepção comteana como a cartesiana colocaram a Matemática no destaque de pré-requisito ao estudo científico.

Segundo Machado (2005), a Matemática tende a ser caracterizada como uma linguagem precisa, por definir seus termos não deixando margem para dúvidas no que se refere à interpretação de enunciados. Partindo de tal pressuposto, essa linguagem distinguir-se-ia das outras pelo fato de não admitir estilos individuais para quem a utiliza. Tal fato a torna diferente da língua local, usada de forma corriqueira e rica de sentidos para os mesmos elementos. Entretanto, quando a utilização da linguagem matemática no Ensino Básico é feita de maneira excessivamente formal, ela pode constituir-se em obstáculo para a compreensão dos próprios conceitos, que podem se transformar em elementos obscuros e de difícil compreensão. Sem uma devida iniciação à linguagem simbólica é difícil para alguém compreender, por exemplo, que a sentença matemática

$$\begin{array}{l} f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \\ x \rightarrow 2x \end{array}$$

significa trabalhar com uma função de primeiro grau, que a partir de um número real  $x$  obtém um segundo número também real, multiplicando o elemento dado por dois.

Excessos de artificialismo ao usar a linguagem matemática podem se tornar obstáculos à aprendizagem e o saldo dessa utilização excessiva de termos técnicos pode ser a não aprendizagem. De acordo com Machado (2005), a metáfora no ensino de Matemática possibilita fugir dos excessos cometidos na utilização dos conceitos da própria Ciência em situações iniciais de aprendizagem. Como exemplo de excesso na utilização formalizada da linguagem, está a da *Teoria dos Conjuntos*, que no apogeu da Matemática moderna era elemento presente na redação de enunciados de diferentes temas da Matemática, constituindo muitas vezes um obstáculo à comunicação de conteúdos específicos.

### **3.3 A metáfora da rede e a do hipertexto**

Segundo Machado (2005) a idéia de redes tem início provável no estudo do sistema nervoso e sua configuração na forma de sinapses. O autor também cita o conexionismo, Ciência cognitiva que busca compreender o funcionamento não linear do cérebro humano e as formas segundo as quais esse órgão processa informações paralelamente, umas em relação às outras.

Uma das características de uma rede é a possibilidade de abertura em relação aos sentidos de uma palavra ou à amplitude e possibilidades de determinado saber a ser desenvolvido. Também é possível considerar a rede como objeto usado em capturas e, nesse caso, sua imagem se associa à idéia de domínio de temas e métodos de investigação. Neste sentido, a idéia de rede passa por deturpações dos sentidos originais, que na opinião de Machado (2005, p. 135):

[...] tanto no que se refere à organização interna de uma teoria quanto no estabelecimento de relações interteóricas, a relativa flexibilidade [...] dá lugar, algumas vezes, à expectativa de um tratamento formal que pode conduzir a simplificações ou desvios deformadores.

Machado (2005) vê os campos semânticos constituídos na forma de redes de relações dos significados de uma palavra. Embora não se esgote com o estabelecimento de um campo semântico, a idéia de rede também é associada às diversas formas de compreender diferentes significados de uma palavra.

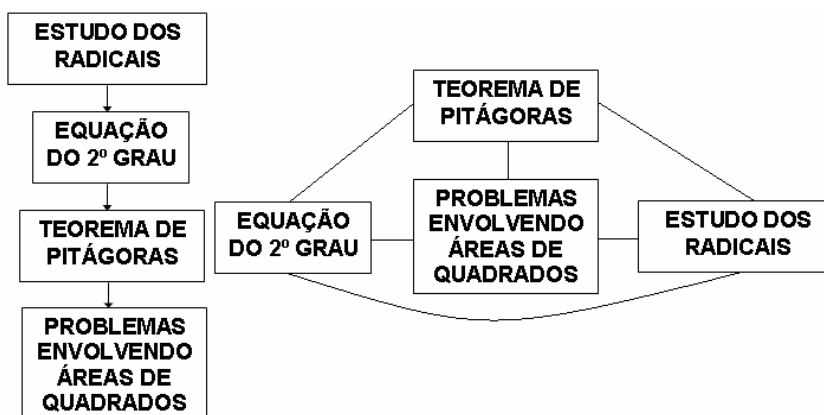
Machado vê a idéia da rede como articuladora de saberes e promissora para a Educação, tendo em vista que o confronto do estudante com diferentes situações é importante para elaborar campos conceituais. A associação da metáfora da rede à ação docente pode ser elemento importante na mudança de paradigma educacional, privilegiando o significado como elemento da elaboração do conhecimento. A visão do conhecimento elaborado segundo correntes de causalidade tem na metáfora da rede uma alternativa epistemológica e didática. A concepção do conhecimento como enredamento de significados e saberes legados pelos antepassados, a partir de diferentes imagens e linguagens socialmente partilhadas, é oposta àquela em que o ato de conhecer se dá por meio de seqüências assemelhadas a correntes.

Apesar de não ser possível desenhar uma rede de significados em toda a sua plenitude, pode-se representar partes da mesma, com cada objeto [ou relação] simbolizado por um nó, do qual ou para o qual partem [convergem fios que interligam esses diversos nós]. As redes de significados não são dispostas de acordo com fluxogramas de hierarquias, como no caso de uma empresa em que existe a diretoria, a gerência e os subalternos. Isso dá à elaboração do conhecimento o aspecto de uma teia, modificada ao percorrê-la. Cada feixe de relações é tão importante quanto os demais componentes da rede. Essa ausência de hierarquia deve também se dar entre as disciplinas do currículo, nós que podem ser conectados de diferentes maneiras. Devido ao caráter dinâmico das relações entre seus componentes, a elaboração da rede não está destinada a se esgotar com o tempo. A representação do conhecimento como rede implica em constantes revisões do ensino da Matemática e suas relações com as outras disciplinas no currículo. A diversidade dos nós e fios da rede constituem uma forte imagem metafórica. Os caminhos seguidos são determinados pelos fios e nós da rede, podendo levar a percursos diferentes, não invalidando formas particulares de elaborar o conhecimento, já que inexiste padrão fixo para transitar na trama.

Um exemplo de como alguns temas de Matemática podem ser encarados como formadores de uma cadeia cartesiana [corrente de pré-requisitos] ou de uma rede pode ser visto na figura 3, a seguir. Na figura da esquerda, as setas indicam a ordem a ser seguida a partir do estudo de radicais. A cadeia que se inicia no estudo dos radicais esgota-se ao chegar aos problemas envolvendo áreas de quadrados. Na figura da direita os elementos da rede não guardam relação hierárquica entre si.

Os temas são interligados e pode-se recorrer a cada um deles no momento de abordar os outros.

**Figura 3**



**Fig. 3:** Duas formas de encaminhar o ensino de radicais, equação do segundo grau, teorema de Pitágoras e problemas envolvendo áreas de quadrados - na forma de uma corrente de pré-requisitos ou assumindo que os temas podem formar uma rede.

Devido à grande possibilidade de caminhos, é necessário dar importância às escolhas iniciais de temas e estratégias a serem seguidas para o percurso na rede não se tornar um labirinto. Deve-se atentar permanentemente às simplificações exageradas de temas e metodologias, o que pode levar ao retorno à corrente de pré-requisitos, própria da visão cartesiana de conhecimento. Os detalhes técnicos inerentes a cada saber não podem ser o objeto último da tessitura de uma rede, devendo ser privilegiadas as relações entre eles. A rede de significados não é tecida a partir de um único centro, pois ser acêntrica é uma de suas características marcantes, devido à variedade de nós e fios que podem ser percorridos, inexistindo qualquer percurso rigidamente estabelecido e seguido obrigatoriamente. No caso da figura 3, por exemplo, a parte da direita tem os problemas envolvendo áreas de quadrados em uma posição aparentemente central, mas em seu lugar poderia estar qualquer outro elemento da trama e a mudança de localização não faria diferença no percurso estabelecido.

Também é importante o fato de que a rede não se fecha em si mesma, como um círculo, não fazendo sentido dizer que o conhecimento é definitivamente estabelecido e acabado, sem possibilidades de re-elaboração. De acordo com Machado (2005), compreender, conhecer, significar e re-elaborar são aspectos importantes da rede e não devem ser esquecidos. Nesse sentido, segundo o autor:

- . compreender é apreender o significado;
- . apreender o significado de um objeto ou de um acontecimento é vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos;
- . os significados constituem, pois, feixes de relações;
- . as relações entretecem-se, articulam-se em teias, em redes, construídas social, e individualmente, e em permanente estado de atualização;
- . em ambos os níveis - individual e social - a idéia de conhecer assemelha-se à de enredar (MACHADO, 2005, p.138).

As relações em uma rede são estabelecidas a partir da multiplicidade de pontos a percorrer, levando à diversidade de caminhos. Cada ponto tanto pode ser um tema em si como também outro feixe de significados obtido com o caminhar na rede. Para se obter um ponto na rede, dois ou mais caminhos se interceptam, não existindo caminho único entre os diferentes pontos e feixes da rede, o que torna a trama ainda mais irregular. Os feixes podem se relacionar das mais diversas formas e esse relacionamento em rede é descrito por Machado (2005, p. 139) como algo que:

[...] subsiste em um “espaço de representações”, constituindo uma teia de significações. Os pontos (nós) são significados [...] as ligações são relações entre nós, não subsistindo isoladamente, mas apenas enquanto pontes entre pontos. Desenha-se, assim, desde o início, “uma reciprocidade profunda”, uma dualidade entre nós e ligações, entre interseções e caminhos, entre ou objetos e relações ou propriedades: os nós são feixes de relações; as relações são ligações entre dois nós [...] tais relações englobam tanto as de natureza dedutiva, as dependências funcionais, as implicações causais, quanto as analogias ou certas influências e interações sincrônicas que não podem ser situadas no âmbito da causalidade em sentido estrito.

Aceitar que a metáfora da rede de significados seja um guia ao elaborar currículos contribui para o abandono da idéia de cadeia e linearidade na ação didática. A partir daí, a noção de pré-requisito perde o sentido como forma de ligar temas de aprendizagem, devido à inexistência de uma seqüência fixa para percorrer a rede. Essa diversidade dos percursos e o fato de não ser necessário passar obrigatoriamente por algum nó geram múltiplas possibilidades para ir de um tema a outro, sendo os percursos regulares dentro da rede considerados casos particulares.

O surgimento do termo hipertexto antecede em anos o aparecimento do micro-computador de mesa. Segundo Lévy (2006, p. 28), “[...] a idéia de hipertexto foi enunciada pela primeira vez por Vannevar Bush em 1945 em um célebre artigo intitulado ‘*As We May Think*’” (grifos do autor). Continuando com a história do surgimento do termo hipertexto, Lévy situa a época em que o termo passa a ser

utilizado com maior frequência em relação ao acesso não linear de dados. Lévy (2006, p. 29) narra que:

[...] no início dos anos sessenta, os primeiros sistemas militares de teleinformática acabavam de ser instalados, e os computadores ainda não evocavam os bancos de dados e muito menos o processamento de textos. Foi contudo nesta época que Theodore Nelson inventou o termo hipertexto para exprimir a idéia de escrita/leitura não linear em um sistema de informática [...].

O hipertexto, de acordo Lévy (2006), consiste em uma rede de informações com os nós interligados não linearmente, tendo o aspecto de uma teia irregular. Ao percorrer um hipertexto, o trajeto de um nó a outro não é necessariamente feito em linha reta, podendo se dar através de um ou mais nós. Cada nó em si pode ser uma outra rede e os nós de um hipertexto podem ser elementos de diferentes espécies, tais como palavras, representações gráficas, registros sonoros e até mesmo os próprios hipertextos.

Para Lévy (2006), as redes de significados podem ter a aparência de um hipertexto, idéia que ele tirou dos programas de computador que têm esse nome. Ele ainda ressalva que, quando as significações estão em jogo, acessar os significados é ato que ocorre como nos hipertextos, pois o cérebro não busca linearmente as informações e os significados que armazena. Lévy (2006) caracteriza o hipertexto a partir de seis princípios por ele chamados de básicos, que são os seguintes:

*1) Princípio de metamorfose* - A rede está em constante construção e negociação. Ela pode permanecer estável durante um certo tempo, mas esta estabilidade é em si mesma fruto de um trabalho. Sua extensão, sua composição e seu desenho estão permanentemente em jogo para os atores envolvidos, sejam eles humanos, palavras, imagens, traços de imagens ou contexto, objetos técnicos componentes destes objetos, etc. *2) Princípio de heterogeneidade* - os nós e as conexões de uma rede hipertextual são heterogêneos [...] o processo sociotécnico colocará em jogo pessoas, grupos, artefatos, forças naturais de todos os tamanhos, com todos os tipos de associações que pudermos imaginar entre estes elementos. *3) Princípio de multiplicidade e de encaixe de escalas* - O hipertexto se organiza de um modo "fractal" [...] qualquer nó ou conexão [...] pode revelar-se como sendo composto por uma rede [...] indefinidamente, ao longo da escala dos graus de precisão. Em algumas circunstâncias críticas, há efeitos que podem propagar-se de uma escala a outra [...] *4) Princípio de exterioridade* - A rede não possui unidade orgânica, nem motor interno. Seu crescimento e sua diminuição, sua composição e sua recomposição permanente dependem de um exterior indeterminado: adição de novos elementos, conexões com outras redes, excitação de elementos terminais [...] na constituição da rede sociotécnica intervêm o tempo todo elementos novos que não lhe

pertenciam no instante anterior [...] 5) *Princípio de topologia* - Nos hipertextos, tudo funciona por proximidade, por vizinhança. Não há espaço universal homogêneo onde haja forças de ligação o separação, onde as mensagens poderiam circular livremente. Tudo que se desloca deve utilizar-se da rede hipertextual tal como ela se encontra, ou então será obrigado a modificá-la. A rede não está no espaço, ela é o espaço. 6) *Princípio de mobilidade dos centros* - A rede não tem centro, ou melhor, possui permanentemente diversos centros [...] trazendo ao redor de si uma ramificação infinita de pequenas raízes, de rizomas, finas linhas brancas esboçando por um instante um mapa qualquer com detalhes delicados, e depois correndo para desenhar mais à frente outras paisagens do sentido (LÉVY, 2006, p.25-26).

A partir dos seis princípios de Lévy (2006), alguns exemplos relacionados à Educação Matemática podem ser apresentados. O princípio da metamorfose na Matemática existe na noção de número, modificada ao longo dos séculos. Das contagens discretas de quantidades positivas, o conceito de número se estendeu aos números fracionários, negativos, irracionais e complexos. A ligação entre a Genética e o estudo de probabilidades é um exemplo do princípio de heterogeneidade, com esses dois campos de estudos a princípio desconexos entre si realizando novas conexões. Para o princípio da multiplicidade de encaixe de escalas, a própria re-elaboração gradual do significado de número serve como exemplo. Ao longo da vida de um indivíduo, as palavras passam a englobar novos significados, permitindo generalizações de elementos que transcendem o significado original. Uma implicação do princípio de topologia no campo da Educação é a revisão da distância entre os saberes da Matemática e das outras Ciências, gerando novos feixes de relações ao aproximar diferentes campos e permitir que troquem mensagens de forma livre. Influências mútuas entre os saberes de Matemática e da Genética contribuíram para desenvolver um novo campo de estudos mais estruturado do que inicialmente se vislumbrou. Ao mesmo tempo, a Biologia se tornou um campo de investigação para a Matemática. Com a busca de novas relações, a Biologia se transformou em fonte de situações a serem modeladas. Uma Ciência tornou-se motor da outra em determinadas circunstâncias, gerando o crescimento de redes tecidas entre ambas, além de uma grande composição e recomposição do conhecimento nas duas, caracterizando o princípio de exterioridade. A partir da associação entre conhecimentos da Matemática e da Biologia, os significados gerados por uma puderam ser transferidos para a outra, criando enraizamentos e novos feixes de significados para ambas. O encadeamento

cartesiano é um modelo de hierarquias entre diferentes campos e não é condizente com o princípio de mobilidade dos centros.

### **3.4 A Matemática, as outras Ciências e a Educação**

Desde a Grécia Antiga a Matemática tem mostrado que o conhecimento inicialmente gerado de forma utilitária pode ser pleno de regularidades a ponto de gerar modelos matemáticos capazes de descrever fenômenos e inspirar a criação e aprofundamento de teorias. Como exemplo, Davis e Hersh (1985, p. 120) citam a origem da teoria das probabilidades, que “[...] ingressou na Matemática por meio do jogo”. Davis e Hersh (1985) consideraram a importância e o alcance dos modelos matemáticos, afirmando que estes são limitados, devendo sempre ser levado em consideração que:

[...] a utilidade de um modelo está precisamente em seu sucesso de imitar ou prever o comportamento do universo. Se um modelo é de alguma maneira inadequado, procura-se um modelo melhor, ou uma versão melhorada do já existente (DAVIS; HERSH, 1985, p.99).

Os modelos matemáticos são adotados enquanto forem eficazes nas descrições que proporcionam e abandonados a partir do momento em que não servem mais para tal fim. A partir das estruturas e modelos elaborados para descrever fenômenos, a Matemática impregnou a Física, a Química, a Biologia e as engenharias. Além das Ciências citadas, a Matemática também serve de instrumento para campos de conhecimentos chamados de Ciências “Sociais”, o que inclui a Sociologia e a Economia. Porém, o papel do modelo matemático na descrição de fenômenos não pode ser confundido com a idéia de que estes são governados matematicamente. Aceitar a Matemática como regente dos fenômenos naturais é compartilhar uma visão platônica de conhecimento, aceitando as leis descritoras dos fenômenos como frutos de descobertas; assim, as propriedades que comandariam esses fenômenos já existiriam desde a criação do Universo e anteriormente ao ser humano.

O período compreendido entre o Renascimento e o século XVIII foi uma época de desenvolvimento e elaboração de conhecimento matemático, que no século XIX passou por uma nova fase de sistematização. A partir da revisão de fundamentos ocorrida no século XIX, buscou-se fugir dos vestígios temporais e materiais do conhecimento matemático, via uso exclusivo da razão. Nessa época, foi reforçada outra dicotomia aparentemente irreconciliável, mantendo a idéia de que a Matemática tem um ramo “aplicado” e outro “puro”, dedicado à busca da perfeição teórica. O ramo “aplicado” seria dedicado à produção de conhecimento útil em meio às experiências do mundo concreto, guardando vestígios de concretude e temporalidade, sendo por isso considerado menos nobre que o ramo “puro”.

A Matemática tanto pode ser vista como um grande conjunto de teoremas demonstrados, como também uma “caixa de ferramentas” para cientistas de outros campos. De acordo com Davis e Hersh (1985, p. 115), a Matemática também pode ser comparada a uma obra de arte: “[...] a mais alta aspiração em Matemática é a aspiração a conceber uma obra de arte duradoura. Se, ocasionalmente, uma parte bela da Matemática se revela útil, tanto melhor”.

Se hoje existe a primazia do pensamento abstrato no que diz respeito à ação sobre os objetos reais, tanto no campo científico quanto no ensino de Matemática que é classificado como tradicional, ela é sustentada pela idéia da Ciência pura, superior e distinta da aplicada. A Matemática, diante deste quadro, assume aspecto de Ciência com duas formas díspares de desenvolvimento, levando à distinção artificial entre dois grupos de matemáticos. Partindo dessa idéia, deixa-se de considerar a Matemática como um grande corpo de conhecimentos e, como todo corpo, deve começar a ser examinado a partir de cada uma de suas partes.

Outra controvérsia diante da Educação e da Ciência é o julgamento feito apenas sob o aspecto da aplicabilidade. Nesse julgamento não é considerado o fato de que, se todo conhecimento matemático fosse produzido para aplicações práticas, temas como as frações já teriam sido abandonadas no ensino básico, pois “na prática” ou no “dia a dia” os números decimais são utilizados com muito mais intensidade. Na verdade, são diferentes os usos dessa Ciência. Um engenheiro, ao planejar uma obra e aplicar elementos de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, utiliza propriedades que um matemático profissional já demonstrou. O que para esse último é elemento a ser demonstrado, o engenheiro considera algo a ser aplicado. Porém, os mesmos fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral são

objetos de aplicações didáticas em aulas dessa disciplina, não sendo necessariamente utilizados imediatamente diante da realidade de uma profissão.

Outro aspecto da mesma discussão é a existência de uma Matemática científica, estudada e desenvolvida apenas por cientistas, considerados os verdadeiros especialistas, e outra que serve apenas para satisfazer os interesses de cidadãos comuns em seu dia-a-dia. Para Davis e Hersh (1985) a busca de fundamentos que orienta o trabalho dos matemáticos profissionais também influenciou o ensino da Matemática e a importância dessa Ciência diante do conhecimento humano. Tanto em relação aos seus desdobramentos científicos quanto aos pedagógicos a Matemática é capaz de lidar com uma realidade própria, considerada ideal. Porém, esse fato não pode servir de motivo para tentar reduzir o trabalho científico e o didático ao ponto de vista platônico nem ao formal. Ao contrário, ao ser apresentada tanto do ponto de vista científico quanto das suas aplicações ao mundo real, ao invés de reduzida a poucos aspectos, a Matemática deve servir para a ampliação de horizontes do pensamento humano.

### **3.5 A fragmentação dos saberes**

Uma das formas de entender a realidade é pela mediação realizada com auxílio de diferentes saberes e, para Morin (2004, p. 16), "[...] a aptidão para contextualizar e integrar é uma qualidade fundamental da mente humana, que precisa ser desenvolvida, e não atrofiada". No caso de uma Educação estritamente disciplinar, os processos de conhecer ocorrem como se diferentes saberes não pudessem interferir e ampliar as possibilidades um do outro.

O pensamento científico moderno se fundamentou na separação dos diferentes aspectos de um mesmo objeto e na simplificação de raciocínios. Esse paradigma acabou influenciando a Educação. De acordo com Almeida, Carvalho e Morin (2002, p. 58-61), esse paradigma, se fundamenta:

sobre três pilares de certeza: o primeiro pilar era a ordem, a regularidade, a constância e, sobretudo, o determinismo absoluto [...] o segundo pilar era o da separabilidade [...] o terceiro pilar era o valor de prova absoluta fornecida pela indução e pela dedução [...] esses três pilares encontram-se hoje em

estado de desintegração, não porque a desordem substituiu a ordem, mas porque começou-se a admitir que [...] existia na realidade um jogo dialógico entre ordem e desordem simultaneamente complementar e antagônico [...] é preciso religar o que era considerado como separado. Ao mesmo tempo é preciso aprender a fazer com que as certezas interajam com a incerteza. O conhecimento é, com efeito, uma navegação que se efetiva num oceano de incerteza salpicado de arquipélagos de certeza.

No transcurso do século XX, o conhecimento fragmentado e simplificado mostrou-se insuficiente frente à complexidade do mundo. Cada vez mais, os problemas enfrentados são de natureza complexa, com os casos particulares assim classificados devido ao contexto em que são percebidos. Subdividir e fragmentar problemas complexos possibilitam explicar e entender bem as suas partes, mas não garantem que o todo seja compreendido a partir da simples junção dos fragmentos obtidos. Com o tempo, a separação das partes, o fracionamento e a análise unidimensional de aspectos dos fenômenos tornaram-se insuficientes frente às necessidades de um conhecimento cada vez mais complexo.

Outro paradigma dentro do discurso científico moderno, a relação entre sujeito e objeto com a distinção radical entre ambos, é uma idéia atualmente confrontada. Um dos motivos dessa contraposição, para Lévy (2006), é que esses dois elementos não são livres de influências das linguagens, das formas de armazenar e captar informações e dos modos como o conhecimento é elaborado. Além de não fazer sentido separar radicalmente sujeito e objeto, também deve ser considerado que o pensamento não se dá de forma isolada no indivíduo, mas sob influência coletiva. Na visão de Lévy (2006, p. 135):

a inteligência ou a cognição são resultado de redes complexas onde interagem grande número de atores humanos, biológicos e técnicos. Não sou “eu” que sou inteligente, mas “eu” como grupo humano no qual sou membro, com minha língua, com toda a herança de métodos e tecnologias intelectuais [...] fora da coletividade, “eu” não pensaria. O pretendo sujeito inteligente nada mais é que um dos micro atores de uma ecologia cognitiva que engloba e restringe [...] não há mais sujeito ou substância pensante, nem “material” nem “espiritual”. O pensamento se dá em numa rede na qual neurônios, módulos cognitivos, humanos, instituições de ensino, línguas, sistemas de escrita, livros e computadores que se interconectam, transformam e traduzem as representações.

O conhecimento individualizado é uma imagem que faz sentido diante do pensamento científico e pedagógico moderno que consideram a atividade cognitiva como privilégio individual. Diante do atual estágio da civilização ocidental, Lévy (2006) considera que o conhecimento é elaborado pelos diferentes sujeitos na/da

História, munidos de suas tecnologias de informação. Esse aspecto levantado é mais um argumento que pode ser utilizado na tentativa de superar a idéia de que cada disciplina, em seu isolamento cognitivo e epistemológico, é capaz de sozinha revelar a realidade. Ciência e pedagogia devem então caminhar e não competirem entre si, receando que a cooperação entre diferentes campos resulte na diminuição da importância de algum deles.

Da mesma forma que sujeito e objeto não devem ser radicalmente separados no ato de conhecer, também não é possível separar a Ciência do universo ao redor do cientista. A Ciência moderna tentou isolar o objeto e o observador dos processos históricos que ocorrem fora do local de pesquisa, visando tornar o conhecimento fruto da elaboração de um indivíduo particular, separado do resto do universo por uma “cortina de ferro epistemológica”, segundo Lévy (2006).

Além da separação radical entre sujeito e objeto e da tentativa de separar o pesquisador do universo ao seu redor, a Ciência moderna também operou a exclusão do sujeito munido de seu conhecimento diante da experimentação. Segundo Santos (2004, p. 80):

a ciência moderna consagrou o homem enquanto sujeito epistémico mas expulsou-o, tal como a Deus, enquanto sujeito empírico. Um conhecimento objectivo, factual e rigoroso não tolerava a interferência dos valores humanos ou religiosos. Foi nesta base que se construiu a distinção dicotômica sujeito/objecto [...] a distinção epistemológica entre sujeito e objeto teve de se articular metodologicamente com a distância empírica entre sujeito e objecto.

Ao separar as descobertas científicas das suas justificativas e do sujeito cognoscente, ocorreram divisões cada vez maiores, reduzindo os saberes a fragmentos cada vez menores e distanciados de seus contextos próprios. Em uma rotina de aprendizagem fragmentada, o indivíduo passa por simples rotinas de treinamentos, sendo preparado para dominar poucas técnicas, procurando cercar-se, ao máximo, de dispositivos que evitem os erros. Essa fuga dos erros, de acordo com Dutra (2000), é herança do pensamento Cartesiano. Segundo o autor, ao conceber

[...] a mente como um domínio privado das idéias, como um mundo à parte, distinto do mundo físico [...] com Descartes [...] a epistemologia tradicional tem dificuldades em lidar com o contexto de descoberta [...] a separação entre os contextos de descoberta e de justificação leva a outras separações importantes que decorrem da concepção tradicional de conhecimento e da tarefa a ser realizada pela epistemologia. Uma delas é que conhecer e aprender são consideradas atividades diferentes. Aprender é tomar

conhecimento de alguma coisa já sabida, já conhecida de outros. Assim, podemos errar ao aprender (DUTRA, 2000, p.36).

A partir do que destaca Dutra (2000), a Ciência Moderna passa a considerar dois tipos de sujeitos diante do conhecimento:

- 1) o especialista que descobre e divulga suas descobertas.
- 2) o não especialista, que deve aprender o que foi descoberto pelo outro, ao invés de formular o próprio conhecimento.

### **3.6 A disciplinaridade**

Segundo Almeida, Carvalho e Morin (2002, p. 37), a organização e a fragmentação do conhecimento em disciplinas

[...] instituiu-se no século XIX, principalmente com a formação das universidades modernas e, depois, desenvolveu-se no século XX, com o progresso da pesquisa científica. Isso significa que as disciplinas têm uma história: nascimento, institucionalização, evolução, decadência.

A princípio, segundo Almeida, Carvalho e Morin (2002), a função da organização das disciplinas seria dar agilidade ao trabalho de cientistas e professores, além de facilitar a transmissão de saberes. A organização da pesquisa científica e do ensino por disciplinas teve como conseqüências a divisão do trabalho e a especialização, tanto do aspecto científico quanto do didático, tendendo à formação de fronteiras entre especialidades. Essa ocorrência possibilitou maior autonomia aos pesquisadores dos diversos campos em relação à escolha de assuntos, linguagens, teorias e modos de agir.

O desenvolvimento científico e o surgimento de diferentes tecnologias a partir do século XIX resultaram na multiplicação de campos de pesquisa e especialização cada vez maior dos cientistas. Em relação à Ciência Moderna, Santos (2004) afirma que os exageros na fragmentação e especialização levaram a um ponto que, para ser considerado mais rigoroso, mais se fragmenta o objeto estudado, pois:

[...] o conhecimento é tanto mais rigoroso quanto mais restrito é o objecto sobre que incide [...] sendo um conhecimento disciplinado, isto é, segrega

uma organização do saber orientada para policiar fronteiras entre as disciplinas e reprimir os que quiserem transpor [...] os males desta parcelização do conhecimento e do reducionismo arbitrário que transporta consigo são hoje reconhecidos, mas as medidas propostas para os corrigir acabam em geral por os reproduzir sob outra forma. Criam-se novas disciplinas para resolver os problemas produzidos pelas antigas e por essa via reproduz-se o mesmo modelo de cientificidade (SANTOS, 2004, p.73-75).

Sobre a fragmentação das Ciências e estabelecimento de rigor científico, Le Moigne e Morin (2000, p. 107) comentam o que se sucedeu à Biologia. Segundo eles, “a pesquisa obsessiva do primeiro elemento, indivisível [...] conduz na Biologia à descoberta da célula; a seguir, de seus constituintes moleculares; depois, dos genes”. Porém, cada ser vivo não pode ser identificado apenas a partir das suas moléculas constituintes.

Entre vários pontos a serem destacados na discussão da fragmentação do conhecimento, Fazenda (1991, p. 19) analisa o papel da academia como responsável por erguer barreiras e estimular a uniformidade de procedimentos, afirmando que a instituição “[...] em certos casos, passa a ser camisa-de-força. Estrutura, formaliza, rotula e direciona em uma única, mas restrita direção”.

A especialização que levou ao grande desenvolvimento das Ciências foi a mesma que abriu caminho para a perda de identidade das suas partes. A formação de professores também seguiu o rastro dessa especialização. A disciplinaridade, tradição na educação brasileira, tornou-se obstáculo às tentativas de mudança nas formas de ação didática, pois estabeleceu raízes nas modalidades de ensino desde o início da escolarização até o término da pós-graduação. A partir dessa formação, é difícil conseguir que profissionais acostumados à fragmentação trabalhem de forma articulada.

A divisão dos saberes de grandes campos científicos em tópicos de ensino de acordo com a área de formação científica de cada professor consolidou a fragmentação que dura até os dias atuais. De acordo com Le Moigne e Morin (2000, p. 100), a fragmentação decorrente do pensamento simplificador levou à criação de “[...] um Universo mecânico, sem acidentes, sem inovações, sem indivíduos, sem seres, dissolvendo os conceitos de cosmos, de natureza, de indivíduo [...]”. Os autores afirmam ainda que:

[...] o paradigma que sustenta o nosso conhecimento científico é incapaz de responder a essa questão, e isso porque a ciência se baseou na exclusão

do sujeito [...] o retorno do sujeito constitui hoje um problema fundamental, que se encontra na ordem do dia (LE MOIGNE; MORIN, 2000, p.52).

Da mesma forma que as Ciências foram fragmentadas para a pesquisa e desenvolvimento, a formação de professores seguiu essa forma de fracionamento de saberes e ensino mecânico dos tópicos das disciplinas. No caso da Matemática, por exemplo, o funcionamento das propriedades operatórias dos logaritmos assumiu o papel de elemento central no ensino. Passou-se a ensinar tais propriedades como importantes em si mesmas, ao invés de ligar a existência dos logaritmos aos fenômenos da natureza.

De acordo Davis e Hersh (1985), a fragmentação de saberes levou às disputas entre diferentes campos científicos e mesmo dentro da Matemática, com a divisão entre cientistas puros e aplicados. Profissionais de diferentes campos tentam fazer com que o seu domínio se sobressaia em relação aos outros e, nessa tentativa de preservação de domínios, elaboram linguagens próprias, o que reflete na formação dos professores.

O sujeito na qualidade de agente foi excluído da Ciência e também do cenário na Educação, favorecendo o surgimento da Ciência impessoal, rigorosa e neutra, além das pedagogias tecnicistas, nas quais a principal preocupação é conceber modelos didáticos controláveis, sem levar em conta o aprendiz, objeto das suas aplicações. Tudo isso teve conseqüências educacionais, pois a aprendizagem tende a ser considerada um ato impessoal decorrente da aplicação de técnicas precisas, com a finalidade de levar ao conhecimento sem interferências externas ao seu próprio ambiente. O aluno, submetido a essas técnicas de ensino, também é tornado um indivíduo fragmentado, aprendendo temas sem ligá-las necessariamente a outros além dos pré-requisitos existentes.

Pautado na fragmentação, o ensino disciplinarizado desenvolve cada disciplina em si mesma, sem considerar possibilidades de articular temas de áreas distintas, não observando as necessidades da contextualização na formação do estudante engajado nesse regime escolar. De acordo com Japiassú (2002) o ensino no Brasil é fundamentado em um modelo pedagógico “da certeza”. Como conseqüência, as verdades provenientes das Ciências tendem a ser aceitas sem contestações, pois são proferidas por especialistas. Em contrapartida à pedagogia “da certeza”, Japiassú propõe instalar a “pedagogia da incerteza”, fundamentada na articulação de saberes que segundo o autor seria elemento capaz de expor a dúvida

que sempre acompanha o ato de conhecer. Assim, afasta-se do conhecimento científico a qualidade de elemento de segurança assumido sem contestações.

Portanto, assumir a necessidade de articular saberes pode ser o início do enfrentamento de incertezas e inseguranças com maior determinação, sem temer a retirada de portos seguros garantidos pelo ensino disciplinarizado, possibilitando que cada indivíduo tome consciência de suas limitações em relação ao ato de conhecer. Reconhecer limites pode inicialmente desiludir o indivíduo pela perda da segurança, mas é melhor do que viver na certeza que não serve à independência de pensamento. Japiassú (2002, p.12) afirma que:

é doloroso descobrirmos os limites de nosso pensamento. Mas é preciso que o façamos. Do contrário, cultivaríamos em nós a paranóia. E nosso sistema de ensino pode cultivar esse tipo de paranóia. Sobretudo, na medida em que tenta inculcar nos alunos a expectativa louca de poder fornecer-lhes um templo sagrado do saber, os meios ou instrumentos de superação dos erros e de conquista da chave da história.

A conjugação entre pedagogia da certeza e ânsia pelo conhecimento infalível, para Japiassú (2002), causa deformação e ilusão do pensamento. Ações que visem a articular saberes são formas de interação entre conceitos, metodologias, procedimentos de trabalho, organização e planejamento do ensino de diferentes disciplinas. Esse tipo de ação pode se dar no relacionamento entre campos de saberes, levando à atenuação de barreiras e permitindo que cada área se intere dos objetos e objetivos de conhecimento das outras.

É necessário, então, que Ciência e Educação troquem o paradigma da simplificação por outro capaz de responder às necessidades de associar diferentes aspectos da realidade, garantindo que um objeto não seja reduzido a itens inconciliáveis de análises unidimensionais.

Assunto debatido com mais intensidade a partir da década de 1990, quando começou a ganhar a evidência que possui nos dias de hoje, a necessidade de articular saberes se configura como possibilidade de resgatar a complexidade do conhecimento, cada vez mais fragmentado a partir da segunda metade do século XIX.

Pesquisadores e professores vivem momentos de mudanças e busca da superação da fragmentação de saberes e da integração de diferentes aspectos dos objetos de estudo. Segundo Fazenda (1991, p. 14), os professores estão em uma

“[...] *fase de transição*, e bastante divididos entre um passado que negamos, um futuro que vislumbramos e um presente que está muito arraigado em nós” (grifos da autora). Machado (2005, p. 180), aponta entre diversas possibilidades, a interdisciplinaridade como forma de articular saberes e diz que ela “[...] tende a transformar-se em bandeira aglutinadora na busca de uma visão sintética, uma reconstrução da unidade perdida, da interação e da complementaridade nas ações envolvendo diferentes disciplinas”. Em relação à habilidade de estudar os fenômenos na sua totalidade, o modelo disciplinar forma deficientemente os indivíduos e, de acordo com Fazenda (2002, p. 20), ficou evidente que “[...] a necessidade de se responder a essas preocupações conduziu inicialmente à elucidação da questão epistemológica: interdisciplinaridade como exigência do conhecimento”. Como a realidade se apresenta sob múltiplos aspectos, a divisão de saberes em campos excessivamente demarcados não viabiliza a explicação global dos fenômenos para quem aprende, pois não possibilita o alcance de uma visão do todo.

Mesmo sendo objeto de debates e tentativas de implantação na Educação Básica, a articulação de saberes não pode ser adotada da mesma forma em todos os casos devido à multiplicidade de aspectos a enfrentar, sendo necessária uma avaliação prévia dos métodos utilizados e adequação deles aos objetos de estudo. Segundo Fazenda (2002), as disciplinas têm identidades próprias por tratarem de campos com formas próprias de desenvolvimento; contudo, não devem agir isoladas, pois tratam de um mesmo mundo, devendo, portanto, interagir. Como as diferentes disciplinas são formas distintas de olhar o mundo, elas são variáveis em suas formas de agir e capazes de gerar múltiplas conseqüências a partir de suas ações. Assim, a proposta de articular saberes não deve ser tratada como teoria geral, mas sim na qualidade de possibilidade de aproximação entre campos de saberes com características particulares e que, ao mesmo tempo, tenham potencialidades de trocar experiências e perspectivas de trabalho.

### **3.7 A questão do paradigma**

Ao fim do século XX, os cientistas se depararam com um grande problema: os saberes de cada área, assim como metodologias de trabalho estavam radicalmente

especializados, gerando dificuldades de interlocução entre profissionais até do mesmo campo. O paradigma científico da modernidade, fundamentado na separação de aspectos do mesmo fenômeno/objeto, sua simplificação e posterior síntese, é herança do pensamento de René Descartes<sup>19</sup> divulgado no livro de sua autoria, conhecido no Brasil pelo nome de “*discurso sobre o Método*”. Nessa obra, entre os itens do seu método, o autor mostrou a necessidade de dividir o estudo do fenômeno (a análise), para, posteriormente, reunir as respostas parciais em um quadro que permitiria a apresentação do resultado do estudo (a síntese). Porém, levar essa linha de raciocínio ao extremo gerou fragmentações que chegam a impossibilitar a visão do todo.

A pulverização da realidade em um processo extremo de fragmentação impede que ela seja vista em seus múltiplos aspectos, excluindo-se até mesmo a possibilidade da crítica do saber acumulado. A partir dessa situação de fragmentação, na visão de Almeida, Carvalho e Morin (2002, p. 51), deve ser colocada a seguinte interrogação: “[...] o saber existe, primordialmente, para ser refletido, meditado, discutido, criticado [...] ou para ser armazenado em bancos internacionais e computado por instâncias anônimas e superiores aos indivíduos?”.

Segundo Morin (2004), conhecer é resultado de traduções, elaborações e interpretações, pois o conhecimento novo depende dos fundamentos já estabelecidos. Para ele, o conhecimento é ecológico, tendo três princípios fundamentais, chamados de viáticos: ecologia da ação, estratégia e desafio. O primeiro viático, a ecologia da ação, abrange dois princípios. De acordo com Morin, o primeiro princípio (2004, p.61), “[...] toda ação, uma vez iniciada, entra num jogo de interações e retroações no meio em que é efetuada, que podem desviá-la de seus fins e até levar a um resultado contrário ao esperado”.

Sobre o segundo viático, a estratégia, o autor afirma (2004, p. 61-62) que ela:

[...] se opõe ao programa, ainda que possa comportar elementos programados. O programa é determinado *a priori* de uma seqüência de ações tendo em vista um objetivo. O programa é eficaz, em condições externas estáveis, que possam ser determinadas com segurança [...] a estratégia, como o programa, é estabelecida tendo em vista um objetivo [...] a estratégia procura incessantemente reunir as informações colhidas e os casos encontrados durante o percurso. Todo o nosso ensino tende para o programa, ao passo que a vida exige estratégia e, se possível, serendipidade e arte (grifo do autor).

---

<sup>19</sup> Nascido em La Haye, em 1596; falecido em Estocolmo, em 1650. Publicou o “discurso sobre o Método” em 1637, na Holanda.

Sobre o terceiro viático, o desafio, Morin afirma (2004, p. 62) que “uma estratégia traz em si a consciência da incerteza que vai enfrentar e, por isso mesmo, encerra uma aposta. Deve estar plenamente consciente da aposta, de modo a não cair em uma falsa certeza”.

Esses três viáticos estabelecidos por Morin podem servir a trabalhos na Educação Matemática, mas o profissional que resolva trilhar o caminho de um ensino a partir da articulação de saberes deve estar preparado para mudanças de rumo que porventura aconteçam. Também deve-se considerar que, ao eleger como estratégia de trabalho a articulação de saberes, o professor necessita estudar detalhada e antecipadamente os temas das disciplinas que lançará mão. Nesse caso, ao definir os temas de sua proposta, os conteúdos das disciplinas devem ser capazes de facilitar a geração de significados ao serem articulados, evitando que o estudante se perca por falta de elementos que conduzam o seu raciocínio. Mesmo com todos esses cuidados, o professor deve estar preparado para acompanhar os rumos que os estudantes possam tomar no processo de aprendizagem. As ações dos estudantes podem fazer com que as estratégias de ensino, que são elaboradas quando se consideram as articulações entre diferentes disciplinas, possam alcançar resultados que fogem aos estáveis objetivos usuais, previamente definidos nos planejamentos convencionais para a ação do professor.

As disciplinas possuem autonomia, sendo importante conhecer seus temas e compreender os processos pelos quais elas são aprendidas. Além de aprender os saberes de uma disciplina, também é importante compreender como é possível ligá-los aos de outras e assim modificar as redes em que eles inicialmente se encontram. As relações de causalidade que se restringirem aos aspectos lineares de relacionamento dentro de uma só disciplina podem ser expandidas para uma rede, alcançando temas de outras disciplinas e impregnando as relações entre campos anteriormente demarcados.

Para a realização de práticas educacionais que favoreçam a articulação de saberes, Morin (2004) propõe uma reforma no/do pensamento científico, começando por avaliar a condição em que este se encontra após a primazia dada à separação e à redução do objeto como forma de guiar o pensamento. Sobre o princípio da redução, Morin (2004) analisa dois aspectos que ele considera excessivamente limitante do conhecimento. Nas suas palavras:

[...] a primeira é a da redução do conhecimento do todo ao conhecimento adicional de seus elementos. Hoje em dia, admite-se cada vez mais que [...] o conhecimento das partes depende do conhecimento do todo, assim como o conhecimento do todo depende do conhecimento das partes. Por isso, em várias frentes do conhecimento, nasce uma concepção sistêmica, onde o todo não é redutível às partes. A segunda ramificação do princípio de redução tende a limitar o conhecimento ao que é mensurável, quantificável, formulável, segundo o axioma de Galileu: os fenômenos só devem ser descritos com a ajuda de quantidades mensuráveis. Desde então, a redução ao quantificável condena todo conhecimento que não seja traduzido por uma medida (MORIN, 2004, p.87-88).

No pensamento fragmentado criticado por Morin (2004) existe a tendência de separar diferentes aspectos do objeto para analisar separadamente cada um de seus fragmentos, sem que isso leve necessariamente a complexão do todo após a junção das partes estudadas. O pensamento complexo se distancia do disjuntivo pela proposição do estudo de um objeto não de forma fragmentada, mas buscando perceber as múltiplas relações dos diferentes aspectos encontrados nesse mesmo objeto.

Segundo Morin (2004), são necessárias novas vias para abordar e relacionar os saberes, de modo que se consiga modificar as atuais formas de elaboração do conhecimento científico. No primeiro passo, ao invés de isolar radicalmente todas as partes do objeto estudado, deve-se tentar analisá-lo de maneira multidimensional. Em contraposição ao isolamento e à separação irremediável dos diferentes aspectos do mesmo objeto, o que deve ser feito é tratá-los como fases distintas, porém imbricadas, utilizando o pensamento complexo em substituição ao pensamento disjuntivo. Para a reorganização do trabalho científico, Morin (2004, p. 93-96) propõe alguns princípios de direção do pensamento, que são:

1) *O princípio sistêmico ou organizacional*, que liga o conhecimento das partes ao conhecimento do todo [...] 2) *O princípio "holográfico"*, põe em evidência este aparente paradoxo das organizações complexas, em que não apenas a parte está no todo, como o todo está inscrito na parte [...] 3) *O princípio do circuito retroativo*, [...] permite o conhecimento dos processos auto-reguladores. Ele rompe com o princípio da causalidade linear: a causa age sobre o efeito, e o efeito age sobre a causa [...] 4) *O princípio do circuito recursivo* ultrapassa a noção de regulação com as de autoprodução e auto-organização. É um circuito gerador em que os produtos e os efeitos são, eles mesmos, produtores e causadores daquilo que os produz [...] 5) *Princípio da autonomia/dependência (auto-organização)*: os seres vivos são seres auto-organizadores, que não param de se auto-produzir [...] 6) *O princípio dialógico* [...] une dois princípios ou noções que deviam excluir-se reciprocamente, mas são indissociáveis em uma mesma realidade. Deve-se conceber uma dialógica ordem/desordem/organização [...] a dialógica permite assumir racionalmente a inseparabilidade de noções contraditórias para conceber um mesmo fenômeno complexo [...] o pensamento deve

assumir dialogicamente os dois termos, que tendem a se excluir um ao outro [...] 7) *Princípio da reintrodução do conhecimento em todo conhecimento*. Esse princípio opera a restauração do sujeito e revela o problema cognitivo central: da percepção à teoria científica, todo conhecimento é uma reconstrução/tradução feita por uma mente/cérebro, em uma cultura e época determinada [...] a reforma do pensamento é de natureza não programática, mas paradigmática, porque concerne à nossa aptidão para organizar o conhecimento [...] permitiria o pleno uso da inteligência. Precisamos compreender que nossa lucidez depende da complexidade do modo de organização de nossas idéias.

A necessidade de separar para ordenar os tópicos dos programas escolares pode ser reavaliada à luz desses princípios e a possibilidade de ação conjunta entre disciplinas deve ser posta como elemento da re-ligação de saberes. Para a mudança de paradigma na Educação, é necessário encontrar pontos de mútua influência entre diferentes saberes separados pela exacerbação da forma cartesiana de conceber o ato de conhecer, buscando novas possibilidades de ligar o que se encontra separado, baseado nos princípios de 4 a 6 formulados por Morin (2004) para a direção do pensamento.

Se as ações em Educação Matemática na escola básica continuarem restritas às aplicações de cada conjunto de saberes dentro de si mesmo, corre-se o risco de continuar a trabalhar pautado na mesma divisão que, de acordo com Morin (2004, p.17), gera:

[...] dois blocos. A grande separação entre a cultura das humanidades e a cultura científica [...] a cultura científica, bem diferente por natureza, separa as áreas do conhecimento; acarreta admiráveis descobertas, teorias geniais, mas não uma reflexão sobre o destino humano e sobre o futuro da própria ciência. A cultura das humanidades tende a se tornar um moinho despossuído do grão das conquistas científicas.

Partir de uma abordagem das Ciências como campos historicamente desenvolvidos pode ser uma forma de não acumular saber científico de forma estéril e sem reflexão. Esse desenvolvimento ocorreu paralelamente ao desenrolar da história de uma parte da humanidade e que somente após algum tempo foi formalizado.

Seguindo as idéias de Morin (2004), para deixar de lado o paradigma da simplificação e adotar o da complexidade, o professor de Matemática, por exemplo, deve pensar se os temas que ensina e os métodos adotados estão em consonância com os de seus colegas das outras áreas. As disjunções e reduções do ato de conhecer, guiadas pelo paradigma científico moderno, podem dar lugar a ações

baseadas em temas escolhidos para exploração de forma sistêmica por diferentes disciplinas, levando não apenas a uma simples conjugação de interesses, mas à articulação de ações para vencer resistências e instalar o diálogo entre áreas. Assim, ao invés da preocupação apenas com a escolha de tópicos a serem ensinados, o professor se concentrará também na articulação de saberes e problematização de situações nas quais disciplinas escolares deixam de ser aglomerados de temas e técnicas aplicadas sem aparente nexos.

Ao invés de estudar uma Ciência como pré-requisito de outra, a convergência de interesses das disciplinas pode ser utilizada como norteadora da ação do professor e guia na elaboração do conhecimento não necessariamente simplificado e ordenado, mas resultante de articulações entre disciplinas aparentemente sem conciliação. Entretanto, essa reunião de diferentes elementos em torno de um objetivo comum não logrará sucesso se o profissional de cada disciplina insistir na predominância da sua. É necessária uma permanente interação de todos os envolvidos, buscando a troca de experiências e novas formas de agir. Em relação às disciplinas, Almeida, Carvalho e Morin (2002, p. 49) observam que:

[...] são as redes complexas de inter, poli e transdisciplinaridade que operam e desempenham um papel fecundo na história das ciências [...] não se pode jogar fora o que foi criado pelas disciplinas, não se pode quebrar todas as clausuras. Este é o problema da disciplina, da ciência e da vida: é preciso que uma disciplina seja ao mesmo tempo aberta e fechada [...] pensemos também que o que está além da disciplina é necessário à própria disciplina, isso se não se quer que ela seja automatizada e finalmente esterilizada.

Porém, não se pode exigir que os professores educados no paradigma disciplinar da fragmentação e simplificação mudem imediatamente para a complexidade, sem compreender quais temas e aspectos dos saberes poderão ser explorados. Em articulações mal planejadas pode não ocorrer o tratamento integrado dos temas. Um exemplo desse fato é o estudo da função afim, de grande utilidade para modelar a resolução de diferentes situações da Física, Economia e outras áreas. As propriedades dessa função podem ser tratadas fora de contextos puramente matemáticos. Ao tentar articulações desse tema com outros que não se conheça previamente algumas formas de aproximação, existe o risco de tornar a aprendizagem ainda mais empobrecida, resultando em mais fragmentos desconexos.

### 3.8 A importância do contexto

Conforme já exposto, a redução do complexo ao simples e a separação de aspectos originalmente ligados entre si, transformam o ato de conhecer em uma elaboração de cadeias lineares, cujos elementos ordenados levam à homogeneização de práticas científicas e educativas. Essa prática elimina a subjetividade e aliena o sujeito da elaboração do conhecimento, separando o elemento que formula conhecimento do que aprende determinados conteúdos estabelecidos no programa de ensino. De acordo com Almeida, Carvalho e Morin (2002, p. 16):

[...] nossa formação escolar [...] nos ensina a separar os objetos de seu contexto, as disciplinas umas das outras para não ter que relacioná-las. Essa separação e fragmentação das disciplinas é incapaz de captar [...] o complexo [...] a tradição do pensamento que forma o ideário das escolas elementares ordena que se reduza o complexo ao simples, que se separe o que está ligado, que se unifique o que é múltiplo, que se elimine tudo aquilo que traz desordens ou contradições para nosso conhecimento.

Para Almeida, Carvalho e Morin (2002), a separação radical das disciplinas torna o profissional formado sob o paradigma da simplificação alguém que reduz e fragmenta cada vez mais os saberes e os organiza mecanicamente. Com isso, o ensino de uma determinada disciplina pode se dar segundo seqüências de formalidades a serem assimiladas e posteriormente avaliadas de forma quantitativa e despersonalizada, a partir de instrumentos que não levam em consideração os aprendizes envolvidos no processo. Uma conseqüência do ensino sob esse reducionismo é a incapacidade do indivíduo dar tratamento multidimensional a questões complexas e lidar com o pensamento em sua forma complexa. O rompimento do/com o mundo em fragmentos leva à perda das relações complexas na elaboração do conhecimento e também à redução das análises à linearidade mecânica.

Diante do panorama atual das Ciências, no qual se percebe a impossibilidade de retorno ao modelo da época anterior à revolução científica, quando um pensador dominava diferentes saberes, é necessário que professores e pesquisadores de diferentes disciplinas encontrem meios de conviver com a diversidade de temas. Para estabelecer essa convivência, no caso das Ciências, é necessário recuperar a

capacidade de produzir contextos de elaboração do conhecimento, o que por sua vez influenciará o ensino. Na contextualização, é necessário que se use a inteligência de formas diferentes daquelas enfatizadas na fragmentação dos saberes, pois conforme afirmam Almeida, Carvalho e Morin (2002, p. 18-19):

[...] a atitude de contextualizar e globalizar é uma qualidade fundamental [...] que o ensino parcelado atrofia [...] o complexo requer um pensamento que capte relações, inter-relações, implicações mútuas, fenômenos multidimensionais, realidades que são simultaneamente solidárias e conflitivas [...] que respeite a diversidade, ao mesmo tempo em que a unidade, um pensamento organizador que conceba a relação recíproca entre rodas as partes.

Inicialmente a contextualização em todos os níveis de ensino serviria para restaurar o diálogo das Ciências “humanas” com as “exatas” e as “biológicas”. Santos (2004, p. 19-20) traça “[...] o perfil de uma nova ordem científica emergente”. Nessa nova ordem, segundo o autor:

[...] começa a deixar de fazer sentido a distinção entre naturais e sociais [...] esta síntese não visa uma ciência unificada nem sequer uma teoria geral, mas tão só um conjunto de galerias temáticas onde convergem linhas de água que até agora concebemos como objetos teóricos estanques (SANTOS, 2004, p.19-20).

Ao sair do ensino secundário, por exemplo, o estudante deve ser capaz de perceber que as Ciências “biológicas” e as “exatas” resultam do trabalho da mesma espécie que produz as Ciências “humanas” e a História. De acordo com Fazenda (1996 e 2002), no campo científico é necessário que o professor aprenda a lidar ao mesmo tempo com elementos de Biologia, Física, Geografia, e Matemática, entre outros. Como o profissional de cada uma dessas áreas não é formado em um curso superior que abranja todos esses campos de estudo, ele deve ser capaz de procurar o diálogo com os professores responsáveis por outras áreas.

Segundo Morin (2004), as disjunções realizadas pela mente acostumada à fragmentação desde a escola elementar não favorecem a contextualização e com isso a aprendizagem desarticulada e compartimentada não desenvolve a capacidade de ligar saberes. O conhecimento cada vez mais especializado gera competências restritas, é facilmente desestabilizado e o aprendiz torna-se um elemento especialista no domínio de poucas técnicas, perdendo a noção da globalidade dos fenômenos. Desenvolver aptidões generalizadas permite que elas

sejam utilizadas em casos específicos, na resolução de problemas especializados, ao passo que aptidões especializadas não servem em casos gerais. De acordo com Morin (2004, p. 24):

[...] todo conhecimento constitui, ao mesmo tempo, uma tradução e uma reconstrução, a partir de sinais, signos, símbolos, sob a forma de representações, idéias, teorias, discursos [...] comporta, ao mesmo tempo, separação e ligação, análise e síntese. Nossa civilização e, por conseguinte, nosso ensino privilegiaram a separação em detrimento da ligação, e a análise em detrimento da síntese. Ligação e síntese continuam subdesenvolvidas [...].

A partir dessa declaração de Morin é possível perceber que não basta isolar um objeto em relação ao seu contexto original para estudo de determinadas características. Esse isolamento deve ser seguido pela ligação desse objeto em outra situação que favoreça a elaboração de novos significados durante a aprendizagem.

Morin (2004), por sua vez, considera que desenvolver a capacidade de contextualizar leva à modalidade de pensamento denominada “ecologizante”, “[...] no sentido em que situa todo acontecimento, informação ou conhecimento em relação de inseparabilidade com seu meio ambiente - cultural, social, econômico, político e, é claro, natural [...]”. Nessa forma de pensar, o conhecimento além de situado no seu contexto inicial de elaboração mobiliza o pensamento na procura de relações, interações e retroações. A partir dessa mobilização, o pensamento ecologizante se realiza de forma complexa, pois além de ser capaz de determinar os elementos que constituem a explicação de um fenômeno, ainda possibilita a verificação das relações entre eles e as repercussões das modificações de cada parte sobre o todo.

### **3.9 A elaboração do conhecimento**

Mesmo que se resolva o dilema entre a função da escola projetar-se como uma instituição encarregada de formar ou informar, segundo Machado (2005), ainda falta considerar o papel dos dados, das informações, do conhecimento e da inteligência, além das relações entre esses elementos. Tendo em vista que a simples transmissão de dados não se constitui em formulação de informação, é necessário que os dados originais passem por processos que lhes dêem sentido. De

acordo com Lévy (2006, p. 21), a transmissão de informações é a primeira função da comunicação e “[...] em um nível mais fundamental o ato de comunicação define a situação que vai dar sentido às mensagens trocadas”.

Na elaboração de sentido, o contexto é o núcleo da comunicação e a compreensão de cada mensagem se constitui no realinhamento de sentidos anteriores elaborados pelo seu receptor. No ato de comunicar, além de uma língua comum aos elementos envolvidos no processo, segundo Lévy (2006, p. 23):

[...] os atores de comunicação produzem [...] continuamente o universo de sentido que os une ou que os separa [...] se o assunto em questão é, por exemplo, comunicação verbal, a interação das palavras constrói redes de significados transitórios na mente de um ouvinte. Quando ouço uma palavra, isto ativa imediatamente em minha mente uma rede de outras palavras, de conceitos, de modelos, mas também de imagens, sons, odores, sensações proprioceptivas, lembranças, afetos, etc.

Tanto o contexto pode influenciar na determinação de sentido das palavras, como estas podem modificar o sentido do contexto inicialmente estabelecido. Dessa forma, o contexto pode levar à criação de uma rede em que os significados são articulados, tomando a forma de uma teia de significações ao invés do formato de uma corrente. Um exemplo é a elaboração dos conceitos em torno de uma palavra, o que não acontece de forma natural nem imediata em um indivíduo. Na infância, a palavra tem a simples função de nomear e está ligada às situações em que é ouvida e imediatamente usada. A generalização de conceitos ligados a uma palavra é desenvolvida ao longo da vida do indivíduo em situações de abstração e generalização. Na opinião de Lévy (2006, p. 24):

[...] cada palavra transforma, pela ativação que propaga ao longo de certas vias, o estado de excitação da rede semântica, mas também contribui para construir ou remodelar a própria topologia da rede ou a composição de seus nós [...] cada vez que um caminho de ativação é percorrido, algumas conexões são reforçadas, ao passo que outras caem aos poucos em desuso. A imensa rede associativa que constitui nosso universo mental encontra-se em metamorfose permanente. As reorganizações podem ser temporárias e superficiais [...] ou profundas e permanentes.

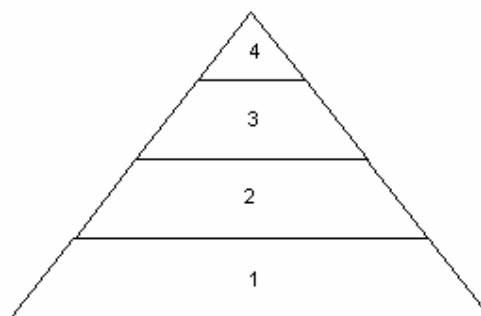
Para ocorrer comunicação ao se trocarem mensagens, é necessária a existência de contextos comuns aos indivíduos envolvidos. Em vista disso, os sentidos atribuídos, o contexto, as mensagens recebidas e emitidas não são elementos estáticos. Esse aspecto da comunicação tem valor didático, pois a

formulação de sentido na aprendizagem ocorre quando o objeto em estudo pode ser compreendido em um contexto, que por sua vez serve para o aluno situar o que aprende.

Uma metáfora para representar a elaboração do conhecimento apresentada por Machado (2005) é a pirâmide informacional em uma sociedade cuja informação tem papel destacado.

**Figura 4**

**Nível 1:** dados (qualitativos/quantitativos).  
**Nível 2:** Informações (significados, organização).  
**Nível 3:** Conhecimento (compreensão, teorias).  
**Nível 4:** Inteligência (projetos/valores).



**Fig. 4:** A pirâmide informacional e seus diferentes níveis (adaptada de MACHADO, 2005).

Na pirâmide informacional, dados, informações, conhecimento e inteligência são incluídos na sua edificação. Os elementos da pirâmide são de livre movimentação entre si e, ao estabelecerem suas relações, constituem uma estrutura articulada e sem hierarquias.

A elaboração do conhecimento escolar, por exemplo, se realiza a partir de fatos ocorridos e de informações geradas no exterior das escolas, como é o caso de Geografia e Física. Dados são os elementos gerados e registrados de forma contínua, estando no primeiro nível da pirâmide, podendo ou não ser acumulados. Porém, de forma isolada, os dados não garantem a geração de informações. Para isso ocorrer é necessário organizá-los e atribuir significados.

As informações resultam dos dados que foram analisados e processados, passando a possuir significados e articulações entre si, formando o segundo nível da pirâmide informacional. As informações em si são materiais para trabalho na escola, mas a função desta última não deve se restringir a viabilizar o acesso às informações. Segundo Machado (2005), apenas o acúmulo de dados e informações não constitui elaboração de conhecimento e o papel destas é o de servir para o estabelecimento de relações entre si e com o que já é conhecido pelo aprendiz. Sob

esse enfoque, o processo de elaboração do conhecimento deixa de ocorrer se o indivíduo não ultrapassar a fase de transformação dos dados em informações. A elaboração do conhecimento não ocorre se informações não forem suficientemente significativas e/ou o indivíduo não conseguir organizá-las. Para elaborar conhecimento é necessário desenvolver as capacidades de analisar, relacionar, avaliar as informações e destacar a sua relevância diante do quadro no qual elas se encontram.

Especialistas em Educação podem ficar satisfeitos quando as ações pedagógicas possibilitam a elaboração do conhecimento, considerando que essa é a mais importante função da escola. De acordo com Machado (2005), mesmo sendo a escola definida como um local essencial para elaboração do conhecimento, a atividade educacional não se encerra nesse estágio. O processo como um todo pode ultrapassar as fronteiras da simples aprendizagem bem ordenada de temas e elaboração de novos conhecimentos e levar ao desenvolvimento da inteligência que Machado (2005) considera como o próximo estágio de desenvolvimento do estudante.

Em referência à pirâmide informacional de Jéquier e Dedijer (1987), que explicita os níveis de elaboração do conhecimento, Machado (2005, p. 68) afirma que:

muitas vezes pretende-se que o cerne da atividade escolar deveria situar-se neste nível da pirâmide, identificando-se vocação formativa da escola com uma opção nítida pelo conhecimento [...] tal opção, no entanto, não passa de um mal entendido, [...] o conhecimento associa-se simbioticamente a uma base de informações, ao mesmo tempo em que se articula necessariamente com o nível seguinte da pirâmide informacional [...] o da inteligência [...] este nível da pirâmide informacional constitui, dentre todos, a característica mais especificamente humana.

A função da educação escolar ultrapassaria, portanto, a coleta de dados, a preparação de informações e até a elaboração do conhecimento, tendo sua culminância no desenvolvimento da inteligência. Por sua vez, o desenvolvimento da inteligência permitiria ao indivíduo realizar com mais habilidade a coleta de dados, as formulações de informações, a elaboração de conhecimento e a conseqüente coordenação autônoma de tudo isso.

#### **4 TEMAS ARTICULADORES NO ENSINO DE BIOLOGIA E DE MATEMÁTICA**

No ensino de diferentes Ciências, uma das incumbências do professor é buscar sentidos para os conteúdos abordados e criar possibilidades para que os alunos, ao elaborar conhecimento possam desenvolver suas capacidades de refletir, analisar, criticar e argumentar, relacionando saberes.

Para tanto, neste capítulo, são apresentados temas para articular os ensinoss de Biologia e Matemática no Ensino Médio. O objetivo foi catalogar e relacionar os temas da pesquisa de modo a servirem como fonte de pesquisa e suporte teórico para professores que pretendam aproximar o ensino dessas duas Ciências. Além disso, foi procurada a valorização dos saberes das duas áreas, que a princípio seriam consideradas campos de atuação distintos em relação às suas teorias e métodos de pesquisa. O diálogo e respeito aos diferentes saberes das áreas foram elementos também considerados na elaboração deste capítulo.

A análise realizada buscou explorar o papel da Matemática na descrição de fenômenos e/ou resolução de problemas da Biologia, sendo desenvolvida em duas partes que necessariamente não são desarticuladas entre si: a Matemática como elemento para descrição de fenômenos e como resolução dos problemas de outra Ciência. A pesquisa apontou a existência de elementos comuns na prática do ensino da Biologia e da Matemática no nível médio, como, por exemplo, elementos de Análise Combinatória, Probabilidades, Estatística e Funções. Além disso, conforme as duas Ciências sejam vistas, podem ocorrer práticas articuladoras entre elas por todo o Ensino Médio. Buscou-se, portanto, a articulação entre os seus conteúdos como possibilidade de dar significados reais a ambos os campos de saberes, o que permitiu a quebra de ordens e seqüências consagradas no ensino da Biologia e da Matemática no Ensino Médio. Isso permite que o professor tenha maior liberdade na articulação dos trabalhos, já que as duas Ciências estarão ligadas, o que ampliará o alcance didático de ambas.

A articulação entre as duas disciplinas não foi feita apenas com a busca de encadear conteúdos ou associar significados, mas trata-se de buscar, ao máximo, compartilhar saberes de dois campos científicos, de maneira a enriquecer a atividade de ensino da Biologia e da Matemática.

## 4.1 Funções

### 4.1.1 O Conceito de função e sua evolução

O conceito de função é um dos mais importantes para a Matemática. Na opinião de Machado (1988, p. 71), entre todos os conceitos já elaborados pelos matemáticos esse “[...] é dos mais importantes e profícuos, (pois) em Matemática e fora dela [...] pode expressar uma relação de interdependência, [...] de causa e efeito ou uma correspondência bem definida [...]”.

No século XIV aparecem as primeiras idéias sobre função, mas é a partir do século XVII, com o surgimento da Geometria Analítica, que os estudos sobre funções tiveram maior desenvolvimento. A partir dessa época, segundo Ávila (2005, p. 133) “[...] muitos problemas matemáticos puderam ser convenientemente formulados e resolvidos em termos de variáveis ou incógnitas que podiam ser representadas em eixos coordenados”. A palavra função foi utilizada originalmente pelo matemático Leibniz no século XVII, designando as variáveis que determinam uma curva. Com o passar do tempo, o conceito de função passou a designar uma relação de dependência entre variáveis. Ainda segundo Machado (1988, p. 71), uma grandeza está relacionada com a representação de sua quantidade, expressa necessariamente por um número, e “[...] em geral, quantidades que se expressam por números são chamadas de grandezas. Uma característica fundamental de muitos ramos do conhecimento científico é o fato de que eles procuram lidar com grandezas [...]”.

Dentre as formas de apresentar uma função está a utilização de um gráfico. A palavra gráfico normalmente lembra a idéia de uma figura utilizada para transmitir informações. A comunicação de dados utilizando gráficos pode ser feita com a utilização de diferentes mídias, na tentativa de deixar claro o que se procura apresentar. Um dos fatores que leva à utilização dos gráficos é a possibilidade de simplificar a apresentação e visualização de dados, que pode ser feita sem a necessidade de longos textos explicativos. Além disso, a figura geométrica presente no gráfico de uma função muitas vezes permite que sejam tiradas conclusões a respeito do comportamento de um fenômeno a ser descrito, tal como crescimento e

decréscimo de quantidades. Em Matemática, a palavra gráfico é utilizada em referência a uma figura cujos pontos satisfazem a determinadas condições. As representações gráficas mais usuais e de maior importância para a Matemática são os gráficos de funções.

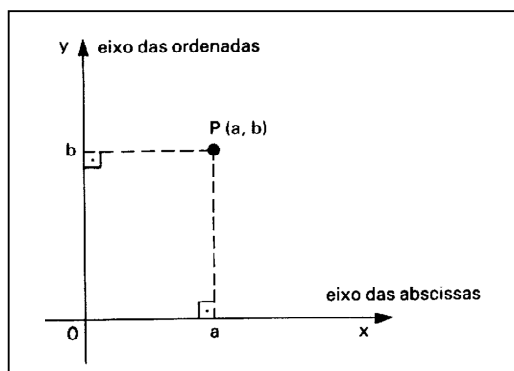
#### 4.1.2 O plano cartesiano e o par ordenado

A análise da variação de determinada quantidade pode ser apresentada com mais comodidade por meio da utilização de gráficos. Em Biologia, por exemplo, eles podem ser aplicados desde a citologia até o crescimento de populações, passando por estudos de zoologia e botânica.

Os gráficos associados aos estudos de Biologia descrevem fenômenos referentes à vida e, em determinados momentos, as variáveis assumem valores reais de caráter contínuo. Assim, a definição de função utilizada neste trabalho será a de função de variável real.

Os gráficos são construídos a partir da noção de par ordenado, composto por coordenadas associadas a pontos no plano cartesiano. A figura 5, extraída de Bianchini e Paccola (1992, p. 37), apresenta um **par ordenado de coordenadas reais a e b** e a sua representação geométrica, o ponto P.

**Figura 5**



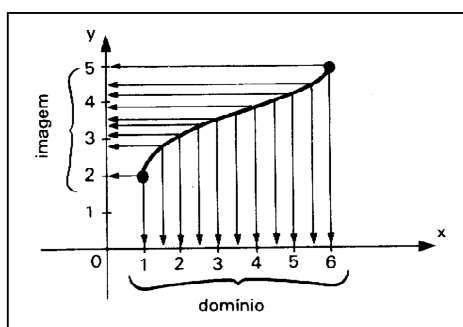
**Fig. 5:** Um ponto no plano cartesiano retangular. A representação geométrica do par ordenado (a, b) é o ponto P (BIANCHINI E PACCOLA, 1992).

No par ordenado referente ao ponto  $P$ , o valor  $a$  é chamado de **abscissa** e o valor  $b$  é chamado de **ordenada**. Por convenção, os valores das abscissas à direita da **origem**  $O$  são considerados positivos. Analogamente, os valores das ordenadas acima da origem  $O$  são considerados positivos. O sentido do crescimento numérico em ambos os eixos é indicado pelas setas.

Para definir uma função é necessária a existência de dois conjuntos: o domínio e a imagem. Nos gráficos cartesianos utilizados para representar funções [inclusive nos que representam fenômenos biológicos], o conjunto domínio está contido no eixo das abscissas e o conjunto imagem no eixo das ordenadas. No caso da função apresentada por meio do gráfico, a cada elemento do eixo das abscissas [eixo “ $x$ ”], corresponderá apenas um elemento do eixo das ordenadas [eixo “ $y$ ”]. Assim, o domínio estará contido no conjunto dos números reais e a imagem também. Daí dizer-se que as funções dessa forma são definidas como funções reais de variáveis reais.

Dada uma função  $f$ , ao representar os seus pontos no plano cartesiano, os pares ordenados  $(x, y)$ , com  $x$  pertencendo ao domínio e  $y$  à imagem, o conjunto obtido por todos esses pontos será o gráfico de  $f$ . O gráfico da figura 6, extraído de Bianchini e Paccola (1992, p. 52), representa uma função particular, com domínio e imagens reais definidos sobre os eixos coordenados.

**Figura 6**



**Fig. 6:** O gráfico de uma função, destacado o domínio formado pelos números reais no intervalo de 1 a 6 e a imagem, formada pelos números de 1 a 5. Note-se que para cada valor do eixo das abscissas ( $x$ ) corresponde apenas um valor no eixo das ordenadas. (BIANCHINI e PACCOLA, 1992).

## **4.2 Fenômenos biológicos descritos matematicamente**

### ***4.2.1 As reações enzimáticas e o conceito de função***

A quantificação em Biologia evoluiu no sentido de apresentar os fenômenos estudados por essa Ciência a partir também de dados descritivos. Um elemento que facilita a compreensão de um fenômeno é a sua descrição feita a partir de tabelas e/ou gráficos cartesianos. A opção da Biologia por representar o desenvolvimento de determinados fenômenos utilizando essa forma de comunicação constitui um recurso didático.

As reações orgânicas são processos nos quais a energia envolvida pode ser considerada uma função do tempo. A existência de um valor máximo para a energia de uma reação em função do tempo serve como exemplo da abordagem contextualizada, feita de maneira simultânea pela Biologia e pela Matemática. A maioria dos gráficos encontrados nos livros de Biologia para o Ensino Médio e que foram analisados refere-se às relações e funções cujos valores das variáveis são positivos. Assim, os gráficos apresentados nos livros de Biologia restringem-se na sua maioria aos casos de relações e funções definidas em intervalos reais com imagens reais positivas.

Nos estudos de cinética enzimática, por exemplo, os gráficos servem para assinalar e analisar a velocidade da reação que ocorre na presença de um catalisador biológico [enzima]. São relacionadas variáveis, tais como variação de energia livre, concentração de substrato, pH e temperatura. Nos casos das reações catalisadas por enzimas, o tema pode ser abordado de maneira articulada envolvendo a Química [as reações químicas], a Biologia [as reações moleculares em organismos vivos], a Física [os conceitos de energia e da calorimetria], além da Matemática [construção e análise de gráficos além de cálculos referentes às reações]. Assim, o tópico de cinética enzimática pode ser abordado em conjunto pelos professores de todos os campos de conhecimentos envolvidos.

No caso das reações químicas, a energia de ativação é definida como a quantidade de energia necessária para iniciá-la. Nos seres vivos, inclusive nos humanos, existe um patamar de temperatura considerado ótimo para a ocorrência

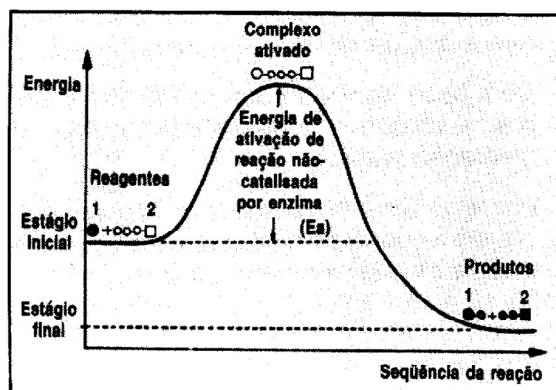
de reações. Porém, a temperatura da reação não deve alcançar valores altos, pois colocaria a vida em risco, podendo acarretar a desnaturação das proteínas do organismo. Como a temperatura considerada ótima para a ocorrência de determinadas reações químicas em alguns seres vivos fica em torno de 45° C [37° C no caso específico dos humanos], é necessário que existam recursos para a ocorrência de reação sem grandes variações de temperaturas capazes de inviabilizar a vida.

Os catalisadores são substâncias capazes de acelerar a velocidade das reações sem alterar os produtos, mantendo a variação de temperatura dentro de patamares considerados ideais. Os organismos vivos possuem catalisadores, representados pelas enzimas. Em relação ao papel das enzimas na manutenção da temperatura durante as reações químicas em um ser vivo, Lopes (2001, p. 22) afirma que:

[...] devem ocorrer com velocidade adequada, mas sem grandes aumentos de temperatura. Isso é possível graças à presença de substâncias que diminuem a energia de ativação necessária para que ocorra a reação. Essas substâncias são as enzimas. As enzimas são proteínas que atuam como **catalisadores biológicos**, pois aumentam a velocidade das reações. Podemos mesmo dizer que sem as enzimas não seriam possíveis as reações necessárias à vida (negrito da autora).

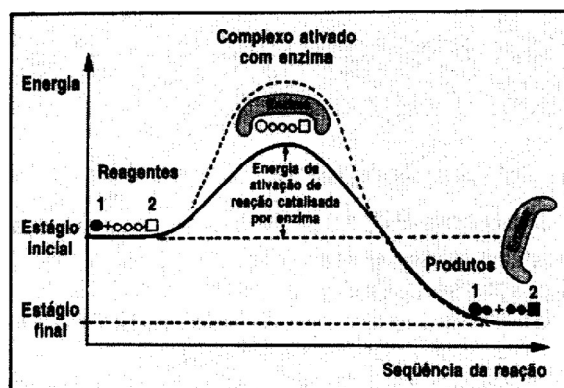
A associação entre Matemática e Biologia no estudo das reações enzimáticas pode ser ilustrada pelas figuras 7 e 8 extraídos de Lopes (2001, p. 22). Na figura 7 está representada a variação de energia livre necessária para a ocorrência de uma determinada reação química durante um intervalo de tempo, sem a presença da enzima [catalisador]. Na figura 8, o gráfico mostra que a variação de energia livre para que a reação ocorra é menor na presença de enzima e, por isso, a velocidade de reação é aumentada na presença do catalisador.

Figura 7



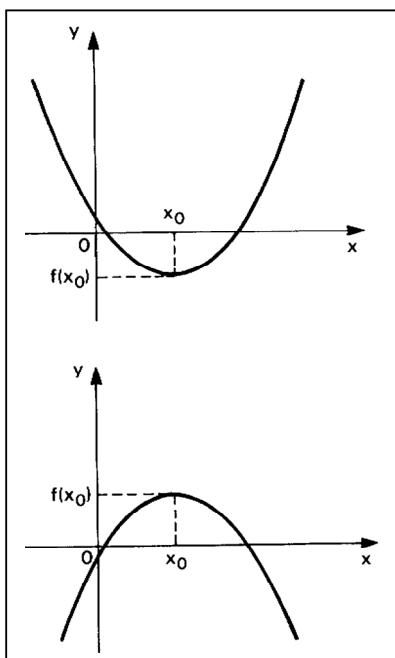
**Fig. 7:** Gráfico apresentando a energia de ativação necessária à realização de uma reação química sem presença de enzima catalisadora (LOPES, 2001).

Figura 8



**Fig. 8:** Gráfico apresentando a energia de ativação necessária para a realização de uma reação química com presença de enzima catalisadora (LOPES, 2001).

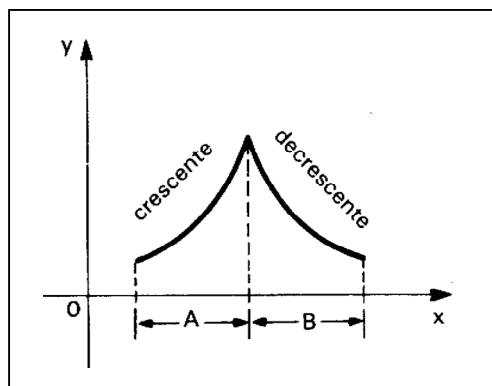
Figura 9



**Fig. 9:** Nos dois gráficos existem pontos chamados de extremos. O primeiro gráfico apresenta um ponto mais “baixo”, de menor ordenada que os demais, denominado ponto de mínimo, com coordenadas  $(x_0, f(x_0))$ . O ponto é determinado pelas duas ordenadas, o valor mínimo está no eixo das ordenadas e corresponde a  $f(x_0)$ . O segundo gráfico apresenta um ponto mais “alto”, de maior ordenada que os demais, denominado ponto de máximo, com coordenadas  $(x_0, f(x_0))$ . O ponto é determinado pelas duas ordenadas, o valor máximo está no eixo das ordenadas e corresponde a  $f(x_0)$ . (BIANCHINI e PACCOLA, 1992).

O professor de Matemática pode utilizar os dois gráficos para analisar o desenvolvimento de determinados fenômenos naturais estudados pela sua Ciência de atuação. Comparando as figuras 7 e 8 é possível verificar que seus gráficos mostram estágios iniciais e finais com o mesmo patamar de energia e que os reagentes e os produtos nos dois casos são os mesmos. A partir da comparação pode ser evidenciada a diferença entre as quantidades de energia necessárias para ativar o processo na ausência e na presença de uma enzima. Os gráficos servem para ilustrar tanto o crescimento [ou decrescimento] quanto o conceito de valor máximo e valor mínimo de uma função. Essas figuras estão associadas ao conceito de ponto de máximo [ou de mínimo] e à possibilidade de existência de um valor máximo [ou mínimo] para uma função em um intervalo [figura 9]. Também podem ser associadas ao conceito de crescimento [ou decrescimento] de uma função [figura 10].

Figura 10



**Fig. 10:** O gráfico é o de uma função apresentando o intervalo A do seu domínio em que ela é crescente e o intervalo B em que ela é decrescente. Uma função poderá não ser apenas crescente ou decrescente. Pode ser crescente para um intervalo do seu domínio e decrescente para outro. (BIANCHINI e PACCOLA, 1992).

De forma elementar, uma função é considerada crescente em um intervalo real quando, aumentando o valor de  $x$ , o valor de  $y$  também aumenta. Uma função é considerada decrescente em um intervalo real quando, aumentando o valor de  $x$ , o valor de  $y$ , contrariamente, diminui. Simbolicamente, dados  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes ao domínio de uma função com  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  pertencentes ao seu conjunto imagem:

Se  $x_1 < x_2$  e ocorrer  $f(x_1) < f(x_2)$ ,  $f(x)$  será caracterizada como uma função crescente.  
 Se  $x_1 < x_2$  e ocorrer  $f(x_1) > f(x_2)$ ,  $f(x)$  será caracterizada como uma função decrescente.

A figura 10, extraída de Bianchini e Paccola (1992, p. 53), ilustra o que foi descrito.

O fato de uma função ser crescente ou decrescente poderá determinar a existência de uma imagem com valor real maior [ou menor] do que as outras em um intervalo dado. Quando em um intervalo existe essa imagem com maior valor, diz-se que a função tem um ponto de máximo e um valor máximo nesse intervalo. Quando em um intervalo existe a imagem de menor valor real, diz-se que a função tem um ponto de mínimo e um valor mínimo nesse intervalo. O valor máximo [ou mínimo] é um número pertencente ao eixo das ordenadas. O fato de uma função possuir ponto

de máximo [ou de mínimo] e valor máximo [ou mínimo] é ilustrado na figura 9, extraída de Bianchini e Paccola (1992, p. 54).

Como a enzima age diminuindo a energia de ativação da reação, os valores máximos das imagens nos dois casos são diferentes, o que faz com que o ponto de máximo em cada caso tenha localizações diferentes no plano cartesiano. A variável independente e considerada contínua é o tempo, representado no eixo da seqüência de reação. A variável dependente é a energia, também considerada contínua. Enquanto ocorrer no organismo a reação representada nos gráficos das figuras 7 e 8, tanto a energia no estágio inicial quanto no final não será igual a zero.

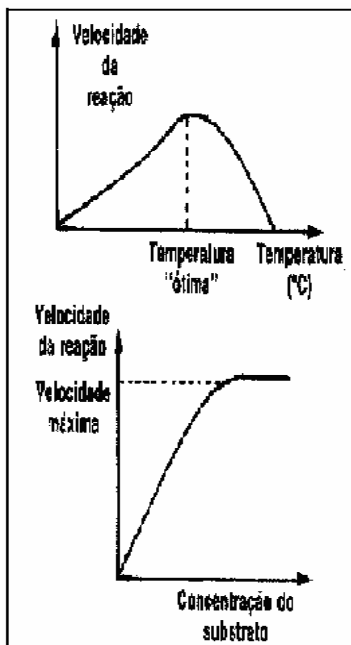
Existem variadas aplicações dos conceitos matemáticos até agora apresentados nos conteúdos de Biologia. Assim, os fenômenos biológicos podem ser aplicados na contextualização de estudos de Matemática. Ao analisar a variação de energia necessária para a ocorrência de uma reação química, por exemplo, o fenômeno serve como uma das possíveis contextualizações do estudo da variação de funções, apresentando uma ligação entre saberes dessas duas ciências.

A temperatura é outro fator que influencia a velocidade de uma reação e a representação gráfica deste fenômeno também permite a contextualização do estudo de funções. Quando a temperatura de uma reação varia positivamente, sua velocidade pode aumentar, pois a variação da temperatura acarreta o aumento de energia da reação. Isto se deve à maior probabilidade de colisões entre as moléculas, facilitando a modificação das substâncias.

Na descrição da variação da velocidade de reação, a variável independente é a temperatura e a variável dependente é a velocidade da reação. O aumento da temperatura tanto pode determinar o aumento da velocidade como, após exceder determinado valor [temperatura ótima], influenciar na variação negativa da variável dependente, determinando o valor nulo para esta e o fim da reação [gráfico 1 da figura 11].

No primeiro gráfico da figura 11, pode ser observado que existe uma temperatura ótima para a reação. Pode-se observar que, no ponto em que ela ocorre, a velocidade da reação é máxima. Portanto, existe um ponto de máximo que corresponde à velocidade máxima da reação relacionada a um determinado valor da temperatura, em um intervalo real.

Figura 11

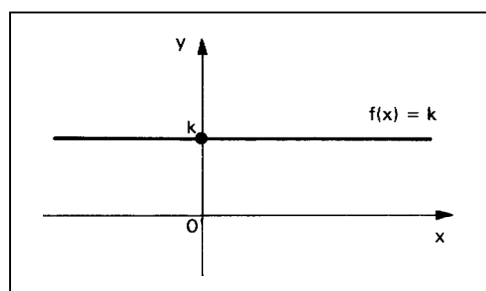


**Fig. 11:** Análise da influência da temperatura e da concentração de substrato na velocidade de uma reação química (LOPES, 2001).

Outro fator que influencia as reações químicas na presença de catalisador em organismos vivos é a concentração do substrato, reagente em que a enzima atua [gráfico 2 figura 11]. Neste caso, a variável independente é a concentração de substrato e a dependente é a velocidade da reação. O aumento da concentração do substrato também é responsável pela variação positiva na velocidade de uma reação, que chega a um valor máximo. Após alcançar tal valor, a velocidade se torna constante, mesmo com o crescimento da concentração do substrato, devido ao fato de que existe uma quantidade limite de enzima a ser mobilizada pelo organismo em cada reação. No caso, existe uma função crescente seguida de uma função constante [a velocidade de reação torna-se constante]. Existe, neste gráfico, um exemplo de fenômeno que ocorre em duas etapas, o equivalente matemático ao de uma função descrita por duas sentenças. Para um determinado intervalo no domínio da variável independente existe uma função crescente. A partir de um valor da variável independente, uma semi-reta é determinada e desse valor em diante existe uma função constante. Um cuidado necessário a ser tomado pelo professor é distinguir a diferença entre intervalo real e semi-reta, além de deixar explícito que a segunda parte do gráfico é uma semi-reta e não uma reta.

Uma função é chamada de constante quando, para qualquer valor do seu domínio, a imagem obtida é sempre a mesma ordenada. Matematicamente, uma função  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  é constante se  $f(x) = k, \forall x, x \in \mathfrak{X}, k \in \mathfrak{X}$ . A figura 12, extraída de Bianchini e Paccola (1992, p. 67) ilustra uma função constante de imagem positiva.

**Figura 12**



**Fig. 12:** O gráfico de uma função constante. Para qualquer valor da abscissa (positiva, nula ou negativa), o valor de  $f(x)$  é sempre  $k$ . No exemplo,  $k > 0$ , o que não é obrigatório ocorrer. Pode-se ter  $k < 0$  ou  $k = 0$  (caso particular: indica os elementos do eixo “x”. BIANCHINI e PACCOLA 1992).

Uma função afim pode ser escrita na forma  $y = ax + b$ , com  $a$  e  $b$  reais, sendo  $a$  diferente de zero. No caso particular em que  $a = 0$ , a função é chamada de linear e tem a forma  $y = ax$ . Os gráficos das figuras 13 e 14 apresentam diferentes posições da reta que representa uma função afim. Na figura 13 estão duas funções afim crescentes. Na figura 14 estão duas funções afim decrescentes. Os gráficos das figuras 15 e 16 apresentam diferentes posições da reta que representa uma função linear.

Quando o valor de  $a$  de uma função afim é positivo, ela é crescente. Quando  $a$  é negativo, a função é decrescente. O valor de  $b$  indica a interseção da reta com o eixo das ordenadas [eixo “y”].

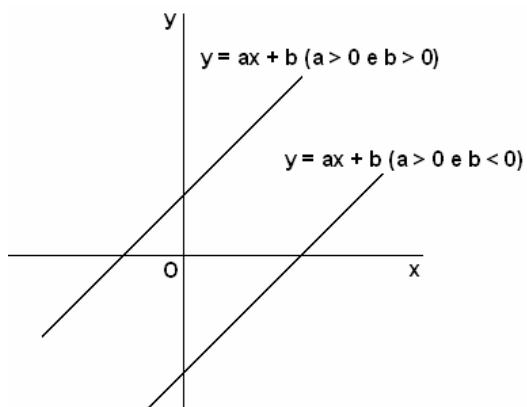
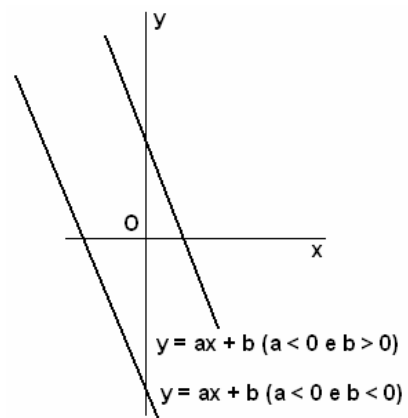
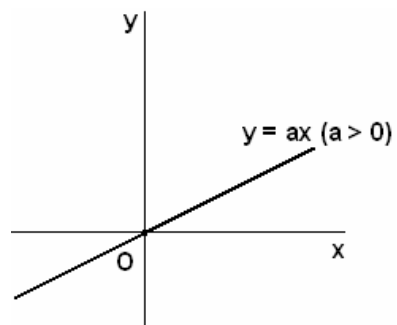
**Figura 13****Fig. 13:** Duas retas que representam funções afim crescentes.**Figura 14****Fig. 14:** Duas retas que representam funções afim decrescentes.**Figura 15****Fig. 15:** A reta representa uma função afim crescente.

Figura 16

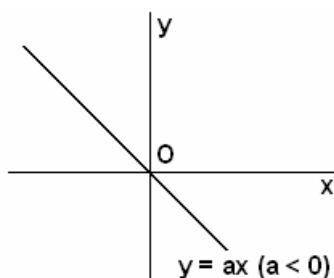


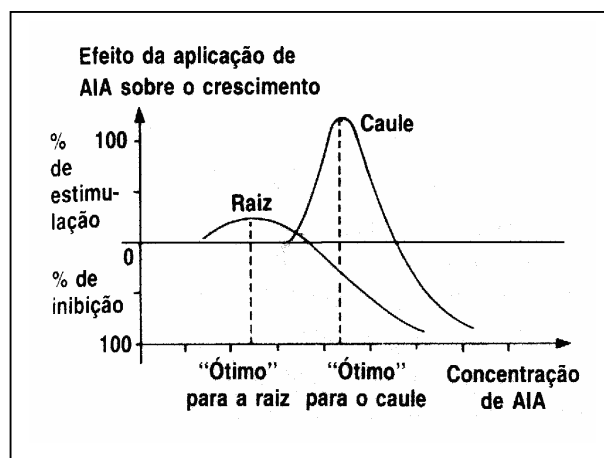
Fig. 16: A reta representa uma função afim decrescente.

#### 4.2.2 O crescimento vegetal e animal e o conceito de função

A botânica também se dedica ao estudo de substâncias que o vegetal produz e que influenciam, entre outros fenômenos, o crescimento e o fototropismo. Existem substâncias chamadas de auxinas que são responsáveis por influenciar estes dois fenômenos biológicos. Sua concentração influencia o metabolismo em determinadas partes do vegetal. As auxinas são hormônios de crescimento vegetal, mas também podem ter função de inibir o crescimento em determinadas partes. Com o aumento da concentração de auxinas, o crescimento do vegetal é favorecido. Porém, quando a concentração de auxinas ultrapassa determinado limite, considerado ótimo para o vegetal, o crescimento passa a ser inibido.

Existem partes do vegetal que reagem de formas diferentes à presença de auxinas. As raízes “[...] são mais sensíveis que os caules em relação a esses hormônios. Concentrações de auxinas que estimulam o crescimento do caule provocam inibição do crescimento da raiz [...]”, segundo Lopes (2001, p. 300-301). Tanto a raiz quanto o caule tendem a acumular concentrações ótimas de auxinas. Uma das auxinas abordadas por autores de livros de Biologia para o Ensino Médio é o ácido indol-acético (AIA). A figura 17, extraída de Lopes (2001, p. 301) apresenta os pontos ótimos de concentrações de AIA e a comparação entre a ação do AIA no caule e na raiz.

Figura 17



**Fig. 17:** A comparação da ação do AIA sobre a raiz e o caule de um vegetal. Quando a concentração ultrapassa o valor ótimo, o AIA passa de estimulante a inibidor de crescimento (LOPES, 2001).

A partir dos dados do gráfico, pode ser percebido que altas concentrações de AIA inibem o crescimento da raiz. Já no caule, elevadas concentrações de AIA estimulam o seu crescimento. Nos dois casos existe uma concentração adequada para o crescimento ótimo que se for ultrapassada levará à inibição do crescimento.

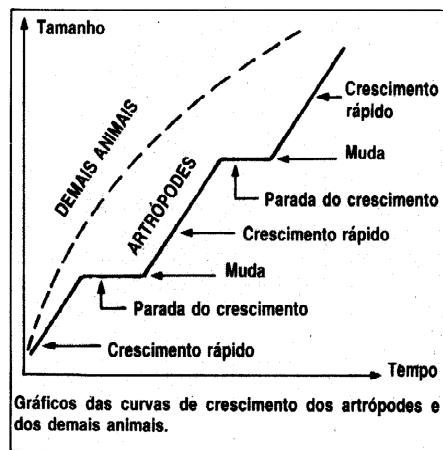
O gráfico anterior pode ser utilizado para integrar o conceito biológico de valor ótimo de concentração de hormônio vegetal para o crescimento ao conceito matemático de ponto de máximo e valor máximo de uma função.

Continuando a explorar a interação entre conteúdos de Biologia e de Matemática, a Zoologia apresenta explicações a respeito do crescimento de artrópodes em comparação aos outros animais. Nesses casos, também existe a possibilidade de apresentar a Matemática para explicar fenômenos estudados pela Biologia. Um exemplo é o estudo do crescimento dos artrópodes.

Os artrópodes são animais dotados de exoesqueleto formado pela substância chamada de quitina. O exoesqueleto dos artrópodes é responsável pela proteção e sustentação de seus corpos. Além disso, o exoesqueleto também bloqueia o crescimento de seus corpos em determinados intervalos de tempo. Assim é necessário que os artrópodes mudem de exoesqueleto para poderem crescer. A troca do exoesqueleto dos artrópodes é periódica e chamada de muda [ou ecdise]. Durante as ecdises, o corpo de um artrópode cresce e um novo exoesqueleto é formado, o que levará a uma nova parada de crescimento do corpo desse artrópode. Assim, a curva de crescimento do corpo de um artrópode é diferente em relação à

de outros animais. A figura 18, extraída de Lopes (2001, p. 327) apresenta a descrição desse fenômeno.

**Figura 18**



**Fig. 18:** Comparação do crescimento do corpo dos artrópodes comparado aos de outros animais, apresentando patamares de parada de crescimento, representada dos pelos segmentos de reta paralelos ao eixo do tempo (LOPES, 2001).

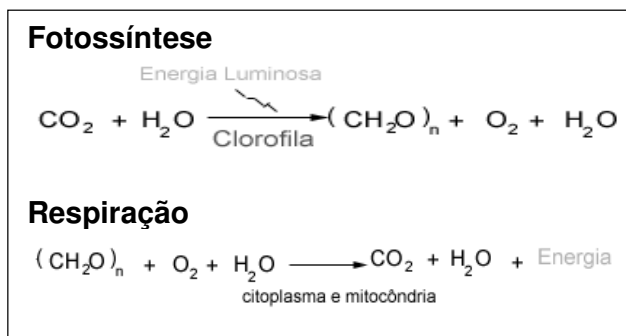
Durante o desenvolvimento dos artrópodes, as paradas de crescimento são representadas no gráfico por segmentos de reta paralelos ao eixo do tempo. Essas paradas representam a estagnação de crescimento corpóreo pelo endurecimento do exoesqueleto, o que não acontece nas demais espécies de animais que não possuem exoesqueletos, que apresentam crescimento contínuo até o seu ponto máximo. O gráfico é um exemplo de função definida por mais de uma sentença [função afim e função constante] e também exemplifica as funções que mudam de comportamento de acordo com intervalos definidos.

#### ***4.2.3 Os processos de respiração e fotossíntese nos vegetais e o conceito de função***

A representação cartesiana de funções também pode ser utilizada para comparar a velocidade da fotossíntese com a da respiração. A fotossíntese é uma seqüência de eventos em que o vegetal sintetiza substâncias orgânicas a partir de  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  e energia luminosa. A respiração é o ato em que o vegetal libera a energia acumulada nas substâncias produzidas durante a fotossíntese gerando  $\text{CO}_2$  e  $\text{H}_2\text{O}$ .

A figura 19 apresenta resumida e esquematicamente os processos de fotossíntese e respiração vegetal.

**Figura 19**

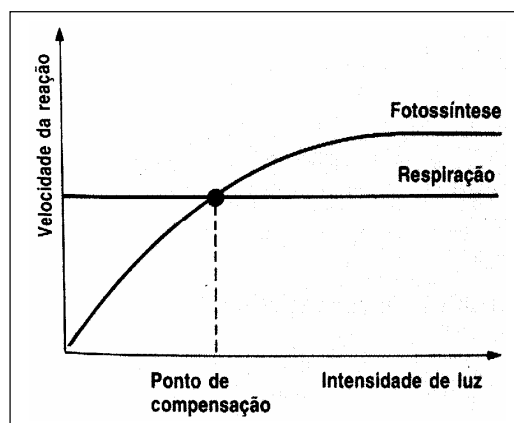


**Fig. 19:** Comparação entre a fotossíntese e a respiração celular (TOMÉ).

Pode-se observar no gráfico da figura 20, extraída de Lopes (2001, p. 299), que, ao contrário da respiração, que ocorre em velocidade constante, a velocidade da fotossíntese é variável. Para que o vegetal acumule energia, o produto da fotossíntese deve ser superior ao da respiração. A fotossíntese tem um limite para ocorrer, devido à capacidade do próprio vegetal transformar as substâncias que absorve pela raiz. Sendo assim, o aumento da luminosidade do ambiente não acarreta necessariamente o aumento indefinido da fotossíntese.

O estágio do metabolismo do vegetal em que não existe diferença entre a taxa de fotossíntese e a de respiração é chamado de ponto de compensação. No ponto de compensação, a intensidade da luz do ambiente leva ao equilíbrio do consumo do alimento elaborado pelo vegetal ao mesmo tempo em que o gás carbônico produzido pela respiração é utilizado para a síntese de moléculas orgânicas na fotossíntese. O saldo entre a quantidade de substâncias produzidas pela fotossíntese e o consumo de nutrientes pelo vegetal é igual a zero e segundo Lopes (2001, p. 299) “[...] a planta está em equilíbrio energético [...]”. A partir dos dados do gráfico é possível verificar que o vegetal produz um saldo positivo de reservas de alimento para serem consumidas posteriormente, quando a fotossíntese não for eficaz ou não atingir o ponto mínimo de compensação.

Figura 20



**Fig. 20:** Comparação entre a velocidade da respiração celular e da fotossíntese e a influência da luminosidade do ambiente, mostrando o ponto de compensação, que também é chamada de compensação fótica (LOPES, 2001).

O gráfico anterior pode ser utilizado para apresentar os conceitos de interseção de curvas e funções. Além disso, pode ser analisado o significado da ocorrência de pontos com coordenadas de valores comuns aos gráficos de duas funções.

#### 4.2.4 O crescimento de populações e a Função Exponencial

A função exponencial  $f(x) = a^x$ ,  $0 < a \neq 1$  tem como imagem o conjunto dos números reais positivos, ou seja,  $\text{Im}(f) = \{y, y \in \mathfrak{R} / y > 0\}$ . Para um número real  $b$  ser imagem de  $f$ , é necessário que exista um número real  $x$ , tal que  $a^x = b$ .

Se  $b \leq 0$ ,  $a^x = b$  não terá solução, pois pela definição  $0 < a \neq 1$  e tem-se  $a^x > 0$ , para qualquer número real  $x$ . São exemplos que não têm solução real:

$$2^x = -2, 2^x = -1, 2^x = -\frac{1}{2} \text{ e } 2^x = 0.$$

Quando  $b > 0$ , é sempre possível situar  $b$  entre duas potências de base  $a$  e expoentes inteiros consecutivos  $k$  e  $k+1$ ,  $k$  pertencente ao conjunto dos números reais, de forma que  $a^k \leq b \leq a^{k+1}$ . Assim, a equação exponencial  $a^x = b$  terá solução

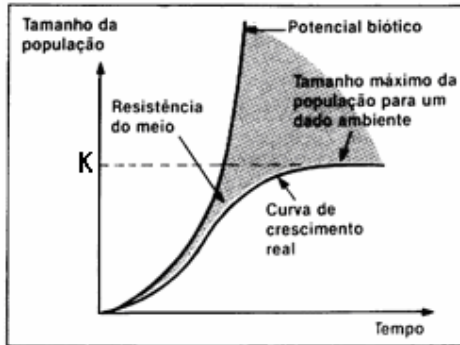
$x$ , tal que  $k \leq x \leq k+1$  que é única, pelo fato da função ser crescente [quando  $a > 1$ ] ou decrescente [quando  $0 < a < 1$ ].

Um exemplo de aplicação da curva exponencial na Biologia está presente no estudo do crescimento de populações. A curva que descreve o crescimento de uma população é chamada de sigmóide. A formação da curva sigmóide é justificada pelo fato de que, ao encontrar um ambiente propício à sua instalação e desenvolvimento, a população de uma determinada espécie tem o crescimento inicial lento, explicado pela pequena quantidade de indivíduos. Conforme o número de indivíduos aumenta, a taxa de reprodução dessa população também passa por um aumento e, conseqüentemente, a população da espécie também aumenta.

A capacidade de crescimento de uma população em condições favoráveis [no caso de não existirem fatores de resistência do meio] é chamada de potencial biótico. Quando o crescimento da população de uma espécie alcança determinado patamar, ela passa a sofrer pressões do meio que limitam o potencial biótico. A descrição do processo é exemplificada na figura 21, extraída de Lopes (2001, p. 545).

A limitação do potencial biótico não ocorre até que o ambiente atinja a sua capacidade suporte  $K$  (sendo  $K$  uma constante real). Quando o equilíbrio é estabelecido, a população atingiu o número máximo de indivíduos que o ambiente pode suportar e, a partir daí, podem ocorrer pequenas oscilações no número de indivíduos. A curva do potencial biótico é de tipo exponencial e a do crescimento real, até determinado estágio, representa uma função crescente. A partir de um determinado valor de tempo, quando ocorre a estabilização da população, a função passa a ser constante.

Figura 21



**Fig. 21:** As curvas de comparação entre o potencial biótico, a resistência do meio e o crescimento real de uma população, que resulta em um número de indivíduos praticamente constante, com poucas oscilações em torno de um número máximo, que o meio pode suportar. O ponto K está lugar correspondente ao valor máximo de indivíduos da população em um determinado ambiente. A letra K não está assinalada no gráfico original (LOPES, 2001).

#### 4.2.5 O cálculo do pH e o logaritmo

Existem equações exponenciais cujas soluções não são valores inteiros. A equação  $3^x = 54$  tem uma e somente uma solução, que é um número real  $x$ , com  $3 < x < 4$ . Esse número real que serve como solução da equação é chamado *logaritmo de 54 na base 3*.

Se  $a$  é um número real,  $0 < a \neq 1$  e existem os números reais  $x$  e  $b$ ,  $b > 0$ , tal que  $x$  seja solução da equação  $a^x = b$ , esse número  $x$  é denominado *logaritmo de  $b$  na base  $a$* .

Simbolicamente:

$$x = \log_a b \leftrightarrow a^x = b$$

Em  $\log_a b$ ,  $a$  é base do logaritmo e  $b$  é o *logaritmando ou antilogaritmo*. Pelo fato de que  $a$  é um número real e  $0 < a \neq 1$ , necessariamente  $b > 0$ .

Existem as seguintes propriedades, decorrentes da definição de logaritmo, respeitados os valores de  $a$  e  $b$  de acordo com a definição de logaritmo:

$$1) \log_a 1 = 0 \quad 2) \log_a a = 1 \quad 3) \log_a a^m = m \quad 4) a^{\log_a b} = b$$

As restrições feitas aos valores de  $a$  e de  $b$ , existentes na definição de logaritmo ( $x = \log_a b$ ) são decorrentes da função exponencial. Sendo assim, pode se dizer que as restrições:  $0 < a \neq 1$  e  $b > 0$  constituem-se na condição de existência para  $\log_a b$ .

A partir da definição de logaritmo e da sua condição de existência, pode-se definir uma função real  $f$  que a cada valor real de  $x$ ,  $x > 0$ , determina uma correspondência entre o valor de  $x$  e o seu logaritmo na base  $a$ . Essa função é chamada de *função logarítmica de base a*.

Se  $a$  e  $x$  são números reais, tais que  $0 < a \neq 1$  e  $x > 0$ , chama-se *função logarítmica de base a* toda função na forma  $f(x) = \log_a x$ .

A função  $f(x) = \log_a x$  terá domínio igual ao conjunto imagem de  $f(x) = a^x$  e conjunto imagem igual ao domínio de  $f(x) = a^x$ , para  $0 < a \neq 1$ .

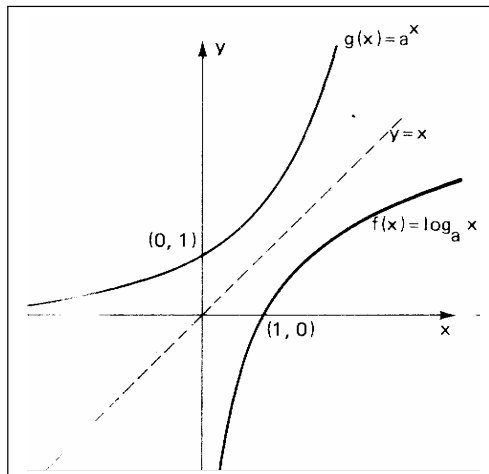
Se  $a$  e  $x$  são números reais, com  $0 < a \neq 1$ , a função  $f$  de domínio real positivo e imagens reais e a função  $g$  de domínio real e imagens reais, definidas respectivamente por  $f(x) = \log_a x$  e  $g(x) = a^x$ , são inversas uma da outra. Respeitadas as condições de existência, a função  $f(x) = \log_a x$  admite como inversa a função  $g(x) = a^x$ . Sendo assim,  $f$  e  $g$  são bijetoras. Logo, o conjunto imagem de  $f$  é o conjunto dos números reais.

Em relação ao gráfico de  $f(x) = \log_a x$ , para  $0 < a \neq 1$ , tem-se:

- a) Ele está todo localizado no primeiro e quarto quadrantes.
- b) Sua interseção com o eixo das abscissas é o ponto (1,0).
- c) Representa uma função crescente para  $a > 1$  e decrescente para  $0 < a < 1$ .
- d) É simétrico do gráfico de  $y = a^x$  [função exponencial] em relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares ( $y = x$ ).

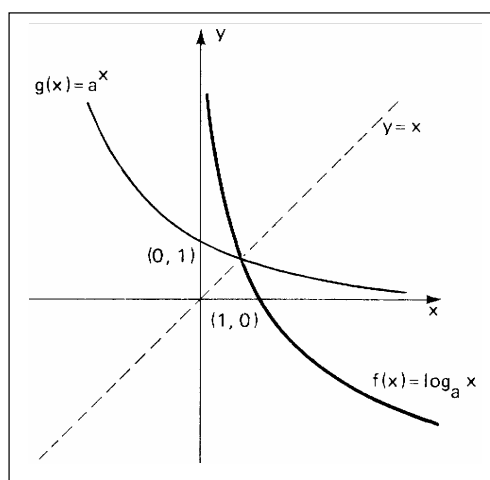
As figuras 22 e 23 a seguir, extraídas de Dolce, Iezzi e Murakami (1991), ilustram o que foi exposto:

Figura 22



**Fig. 22:** O gráfico representa as funções  $g(x) = a^x$  e  $f(x) = \log_a x$ , quando  $a > 1$ . As suas correspondentes curvas em relação à reta  $y = x$  são simétricas (DOLCE, IEZZI e MURAKAMI, 1991).

Figura 23

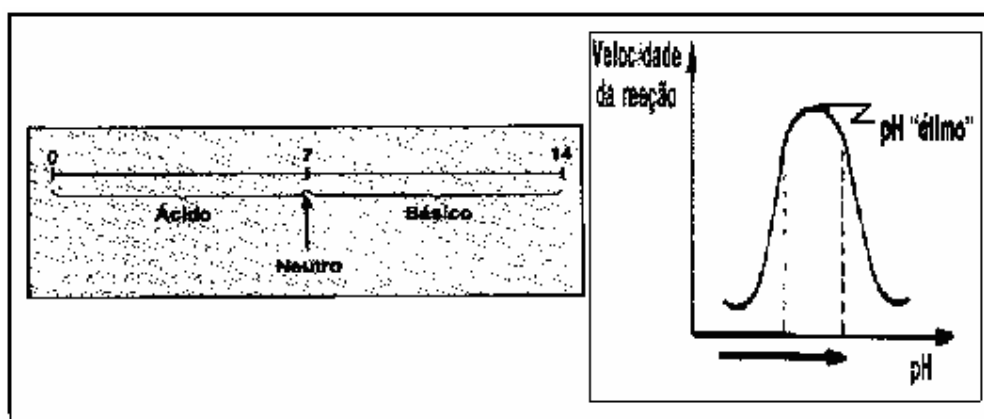


**Fig. 23:** O gráfico representa as funções  $g(x) = a^x$  e  $f(x) = \log_a x$ , quando  $0 < a < 1$ . As suas correspondentes curvas em relação à reta  $y = x$  são simétricas (DOLCE, IEZZI e MURAKAMI, 1991).

Nos estudos do pH (Biologia e Química), o conceito de logaritmo é amplamente utilizado. Portanto, esse tópico permite a elaboração de ações didáticas conjuntas entre os professores de Biologia, Matemática e Química. Para o professor de Química, interessa a origem do termo pH e as aplicações das propriedades dos logaritmos para resolver problemas referentes à classificação das substâncias em

ácidas e/ou alcalinas. Para o professor de Biologia, interessa a variação da velocidade de uma reação química no interior de um ser vivo em função do pH do meio. A atuação do professor de Matemática dá-se no esclarecimento da utilização do conceito e das propriedades operatórias dos logaritmos. Na página 23, Lopes (2001) apresenta uma escala de pH, reproduzida na figura 24 a seguir, junto com o gráfico que apresenta a influência do pH sobre a velocidade de reação, também de acordo com Lopes, 2001.

**Figura 24**

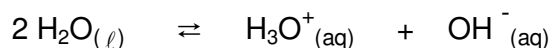


**Fig. 24:** Escala de pH, com os intervalos de variação para indicar substâncias ácidas e básicas e o gráfico que apresenta a influência do pH sobre a velocidade de reação (LOPES, 2001).

De acordo com Afonso e Gama (2007) “Svante Arrhenius (1859-1927) percebeu em sua *teoria de dissociação eletrolítica* (1887) que a lei da ação das massas podia ser aplicada às reações iônicas” (grifo dos autores). Arrhenius partiu do princípio que determinadas substâncias se dissociavam e os íons [partículas com carga elétrica positiva ou negativa] se movimentam quando influenciadas por um campo elétrico. Pela definição de Arrhenius, ácidos são substâncias que, em solução aquosa, produzem íons hidrogênio [ $H^+$ ]. De maneira análoga, em solução aquosa, as bases produzem íons hidroxila [ $OH^-$ ]. Segundo Pinheiro, “a auto-ionização da água foi demonstrada [...] por Friedrich Kohlrausch (1840-1910) [...] Kohlrausch mostrou que a mais pura das águas apresenta uma pequena, porém definida, condutividade elétrica [...]”. A água sofre um processo chamado de auto-ionização, no qual transfere um próton de uma molécula de água para outra. No processo são produzidos os íons hidrônio [ $H_3O^+$ ] e hidróxido [ $OH^-$ ].

A determinação da constante de dissociação da água pura, a partir da aplicação de diferentes métodos, levou à determinação de uma constante denominada constante de condutância da água, com valores sempre bem próximos a  $1,0 \times 10^{-14}$ , a 25 °C.

A partir do processo de auto-ionização da água, tem-se:



Na expressão,  $\ell$  e  $\text{aq}$  significam, respectivamente, estado líquido e solução aquosa.

A aplicação da lei da ação das massas à reação anterior leva à expressão:

$$K = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]}{[\text{H}_2\text{O}]^2}$$

Nessa expressão, K representa a constante de equilíbrio da reação,  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  representa a concentração de hidrônio e  $[\text{OH}^-]$  é a concentração de hidróxido. A concentração final da água em estado de equilíbrio é muito próxima da concentração inicial. Então, pode-se escrever:

$$K_{\text{W}} = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-].$$

O produto acima é chamado produto iônico da água e é considerado constante. Na expressão acima,  $K_{\text{W}}$  simboliza a constante de ionização da água. A partir de medições experimentais, mostrou-se que  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 1,0 \times 10^{-14}$ . Não apenas a água, mas as soluções aquosas diluídas apresentam produto iônico constante. As concentrações de íons não variam de forma independente. O aumento de uma delas acarreta a diminuição da outra. Assim, tem-se:

A partir do que foi  $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] = 1,0 \cdot 10^{-7}$  descrito, tem-se o quadro a seguir:

- Para soluções neutras:  $[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] = 10^{-7}$
- Para soluções ácidas:  $[\text{H}^+] > [\text{OH}^-]$ , ou seja,  $[\text{H}^+] > 10^{-7}$  e  $[\text{OH}^-] < 10^{-7}$ .
- Para soluções básicas:  $[\text{H}^+] < [\text{OH}^-]$ , ou seja,  $[\text{H}^+] < 10^{-7}$  e  $[\text{OH}^-] > 10^{-7}$ .

A concentração do íon  $[H^+]$  determina o pH. Sendo que o pH de uma solução pode ser definido pela seguinte equação:

$$pH = -\log [H^+] = \log \frac{1}{[H^+]}$$

Analogamente:

$$pOH = -\log [OH^-] = \log \frac{1}{[OH^-]}$$

Voltando à expressão  $K_w = [H^+].[OH^-]$  e aplicando o logaritmo aos dois membros, tem-se:

$$\begin{aligned} K_w = [H^+].[OH^-] = 1,0 \times 10^{-14} &\Leftrightarrow \log(K_w) = \log([H^+].[OH^-]) = \log(1,0 \times 10^{-14}) \\ &\Leftrightarrow \\ -\log(K_w) = -\log([H^+].[OH^-]) = -\log(1,0 \times 10^{-14}) &\Leftrightarrow -\log[H^+] - \log[OH^-] = -\log(1,0) - \log 10^{-14} \\ &\Leftrightarrow \\ -\log[H^+] - \log[OH^-] = -0 - (-14) &\Leftrightarrow -\log[H^+] - \log[OH^-] = 14 \Leftrightarrow pH + pOH = 14. \end{aligned}$$

Dessa forma, a soma pH + pOH de uma solução é sempre igual a 14,00 [a 25°C].

Segundo Afonso e Gama:

por volta de 1900, muitas equações matemáticas utilizadas para expressar equilíbrio químico, concentração de  $H^+$ , etc já haviam sido elaboradas. Para os químicos da época, a determinação da concentração do íon hidrogênio era uma questão de interesse puramente teórico, mas para biólogos e bioquímicos a situação era muito diferente [...].

Um dos fenômenos estudados por biólogos e bioquímicos é a digestão, que se dá no interior de indivíduos vivos. Por isso, existe a necessidade de lidar com os processos que envolvem ácidos presentes nesse processo e as formas pelas quais acidez não leva à degeneração do organismo. Outro fato que levou à necessidade de conhecer formas de calcular o pH, ocorreu na observação do processo de fabricação da cerveja. Ainda de acordo com Afonso e Gama:

[...] em 1900 Auguste Fernbach (1860-1939) e L. Hubert (1865-1943), pesquisadores franceses, perceberam que o extrato de malte apresentava a

propriedade de não variar sua atividade enzimática quando se adicionavam pequenas quantidades de um ácido ou de uma base. Eles então concluíram que o malte, assim como muitos fluidos naturais, compartilhava a propriedade de resistir a mudanças abruptas de acidez ou de alcalinidade. Foram os primeiros a utilizar a palavra tampão para explicar esse fenômeno.

Além dos fatos históricos acima, tem-se:

por volta de 1903, o fisiologista húngaro Pal Szily (1878-1945) constatou que o soro sanguíneo possuía propriedades tamponantes; através de seus estudos definiu os limites em que ocorriam as reações no soro, na faixa de concentração de íon hidrogênio  $[H^+]$  entre  $1 \times 10^{-4}$  e  $2 \times 10^{-10}$  mol  $L^{-1}$ . Sob orientação de Hans Friedenthal (1870-1943), Szily trabalhou na determinação da concentração do íon hidrogênio utilizando métodos colorimétricos (AFONSO e GAMA).

A idéia de utilizar a concentração de íon hidrogênio como elemento determinante da característica ácida [ou básica] de uma solução, segundo Afonso e Gama, é devida a Hans Friedenthal. Ainda de acordo com esses autores, deve-se ao bioquímico dinamarquês Sören P. T. Sørensen (1868-1939) a utilização do logaritmo negativo da concentração do íon hidrogênio para o cálculo do pH,  $pH = -\log [H^+]$ , sendo o potencial de hidrogênio (pH) representado pelo expoente da concentração de íons hidrogênio.

Por exemplo, se uma solução tem concentração hidrogeniônica valendo  $[H^+] = 10^{-8}$ , tem-se:

$$[H^+] = 10^{-8}; \text{pH} = -\log [H^+] = \log \frac{1}{[H^+]}; \text{pH} = \log \frac{1}{10^{-8}}; \text{pH} = \log 10^8; \text{pH} = 8.$$

A aplicação desta fórmula pode ser exemplificada por uma questão de vestibular da FUVEST (sem data) extraída de Usberco e Salvador (2006).

Problema: Um estudante misturou todo o conteúdo de dois frascos A e B, que continham:

- frasco A: 25 mL de solução aquosa de HCl, 0,80 mol/L;
- frasco B: 25 mL de solução aquosa de KOH, 0,60 mol/L.

a) Calcule o pH da solução resultante. A solução resultante é ácida, básica ou neutra? Justifique utilizando o produto iônico da água.

*Resolução:*

a) Inicialmente é calculado o número de mol de  $[H^+]$  e de  $[OH^-]$ .

No frasco A:  $25 \text{ mL} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ L}$  de uma mistura  $0,80 \text{ mol/L}$ . Calculando a concentração em litros, tem-se:

$$\frac{1 \text{ L} \text{ ----- } 0,80 \text{ mol de HCl}}{25 \cdot 10^{-3} \text{ L} \text{ ----- } x}$$

$$x = 0,020 \text{ mol de HCl.}$$

Como são  $0,015 \text{ mol}$  de KOH, tem-se  $0,015 \text{ mol}$  de  $\text{OH}^-$ .

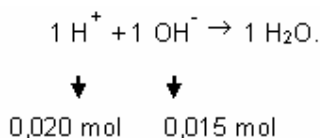
Misturando tudo,  $1 \text{ mol}$  de  $\text{H}^+$  deve neutralizar  $1 \text{ mol}$  de  $\text{OH}^-$ , pois, o KOH é uma base forte que dissocia-se completamente em água. Dessa forma, tem-se:

$$\frac{1 \text{ L} \text{ ----- } 0,80 \text{ mol de KOH}}{25 \cdot 10^{-3} \text{ L} \text{ ----- } y}$$

$$y = 0,015 \text{ mol de KOH.}$$

Como são  $0,015 \text{ mol}$  de KOH, tem-se  $0,015 \text{ mol}$  de  $\text{OH}^-$ .

Misturando tudo,  $1 \text{ mol}$  de  $\text{H}^+$  deve neutralizar  $1 \text{ mol}$  de  $\text{OH}^-$ . Dessa forma, tem-se:



Dessa forma, existe um excesso de  $0,005 \text{ mol}$  de  $\text{H}^+$ . Esse excesso é que vai determinar o pH da mistura resultante. Como a mistura tem  $25 \cdot 10^{-3} \text{ L}$  do frasco A mais  $25 \cdot 10^{-3} \text{ L}$  do frasco B, o total da mistura é de  $50 \cdot 10^{-3} \text{ L}$ . Dividindo o excesso de mol da mistura  $[0,005]$  pelo total de solução  $[50 \cdot 10^{-3}]$ , tem-se:

$$[\text{H}^+] = \frac{0,005 \text{ mol}}{50 \cdot 10^{-3} \text{ L}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3}} \rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-1} \text{ mol/L}^{-1}. \text{ Como } \text{pH} = -\log[\text{H}^+],$$

chega-se a  $\text{pH} = -\log 10^{-1}$ , que resulta em  $\text{pH} = 1$ .

b) A solução resultante é ácida, pois tem  $\text{pH} < 7$ . Como  $K_w = [\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$ , tem-se:  $10^{-1}[\text{OH}^-] = 10^{-14}$ . Daí:  $[\text{OH}^-] = 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Dessa forma, a solução é ácida, pois  $[\text{H}^+] > [\text{OH}^-]$ .

#### 4.2.6 A transpiração vegetal e a proporcionalidade

Os casos de dependência entre duas variáveis têm aplicações na descrição de fenômenos naturais. Entre eles estão os de proporcionalidade direta e inversa, outro ponto de convergência entre os conteúdos de Biologia, Matemática e Física. Esses conteúdos podem unir tópicos de funções, estrutura e fisiologia vegetal.

Um fato que diferencia as células animais das vegetais é que estas últimas possuem uma parede de celulose além da membrana plasmática. Como os vegetais não têm esqueleto, a parede de celulose é a responsável pela sustentação mecânica do vegetal e também determina a sua forma. A célula é uma estrutura viva que realiza trocas com o ambiente. A diferença é que, na célula vegetal, a presença da parede de celulose impõe resistência em relação ao ambiente, o que não ocorre com a célula animal.

Uma das modalidades de trocas das células com o ambiente dá-se nos processos chamados de passivos. Tais processos são assim chamados por ocorrerem sem gasto de energia. A osmose é um desses processos passivos e uma modalidade de difusão.

As concentrações de elementos dissolvidos [os solutos] e do solvente determinam a dinâmica do processo de difusão. Ao serem colocadas em contato duas soluções com diferentes concentrações de solvente, este tende a mover-se em maior quantidade da região de menor concentração para a de maior concentração. Com isso, a concentração dos dois meios tende a se igualar. Portanto, se uma célula for colocada num meio líquido, dois fenômenos podem ocorrer em relação à concentração de elementos no seu interior e no exterior: se a concentração do meio for maior que a da célula, esta perderá água; se a sua concentração não se ajustar à desse meio, ela irá murchar. Esse processo é chamado de plasmólise. No caso em que a célula tenha concentração maior que a do meio, ela absorverá água até que equilibre a sua concentração com a desse meio, tornando-se túrgida.

No estudo da concentração de água em uma célula vegetal, chama-se  $M$  a pressão que a membrana celulósica exerce. São atribuídos valores a  $M$  que determinam uma escala:

1) na célula murcha ou na célula plasmolisada,  $M = 0$ .

2) à medida que a célula se torna túrgida o valor de  $M$  aumenta. O valor máximo de  $M$  ocorre quando a célula está túrgida.

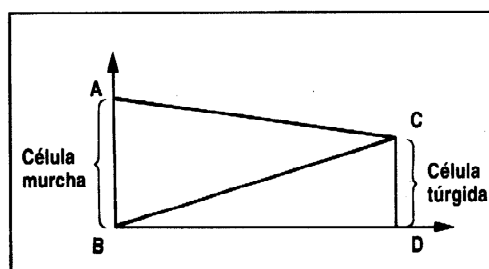
Também é definido o poder osmótico, chamado de  $S_i$ , que é a capacidade do vacúolo de uma célula vegetal absorver água. Na célula murcha ou plasmolisada, ocorre  $S_i > M$ . Na célula túrgida, tem-se  $S_i = M$ .

A força de sucção de uma célula vegetal é chamada de  $S_c$  e seu valor depende de dois fatores, que são:

- 1) a pressão da membrana, representada por  $M$ ;
- 2) a concentração do vacúolo, representada por  $S_c$  e a força de sucção interna, representada por  $S_i$ .

Na figura 25 o segmento de reta  $AB$  representa o valor de  $S_i$  numa célula murcha. O segmento de reta  $CD$  representa o valor de  $M$  quando a célula está túrgida. O eixo horizontal representa o intervalo de tempo em que a célula se torna túrgida. Quando a célula está murcha, tem-se  $M = 0$  e  $S_c = S_i$ . Assim, a força de sucção da célula dependerá apenas de  $S_i$ .

**Figura 25**

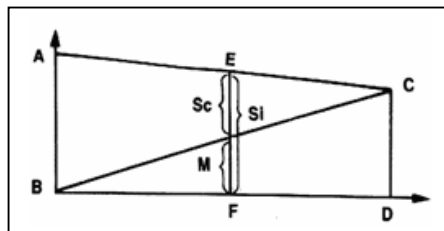


**Fig. 25:** Representação da evolução de uma célula do estágio de murcha até de o turgência (LOPES, 2001).

Quando a célula está túrgida,  $M = S_i$  e  $S_c = 0$ . Neste caso,  $S_i$  [capacidade de absorver água] é anulada por  $M$  [resistência da membrana celulósica] e a água não entra na célula. Quando a célula está absorvendo água,  $S_c = S_i - M$ . Desta forma, durante a turgescência [absorção de água] existe uma diferença entre os valores de  $S_i$  e  $M$ , sendo  $M$  exercida pela parede de celulose. A figura 26 representa o que foi descrito. Quando a célula está murcha,  $M = 0$  e  $S_c = S_i$ . Tem-se a situação representada no segmento  $AB$ . Quando a célula está túrgida,  $S_c = 0$  e  $S_i = M$ , com a

situação representada no segmento CD. O segmento de reta EF da figura representa Si. No caso da figura, a célula está túrgida.

**Figura 26**



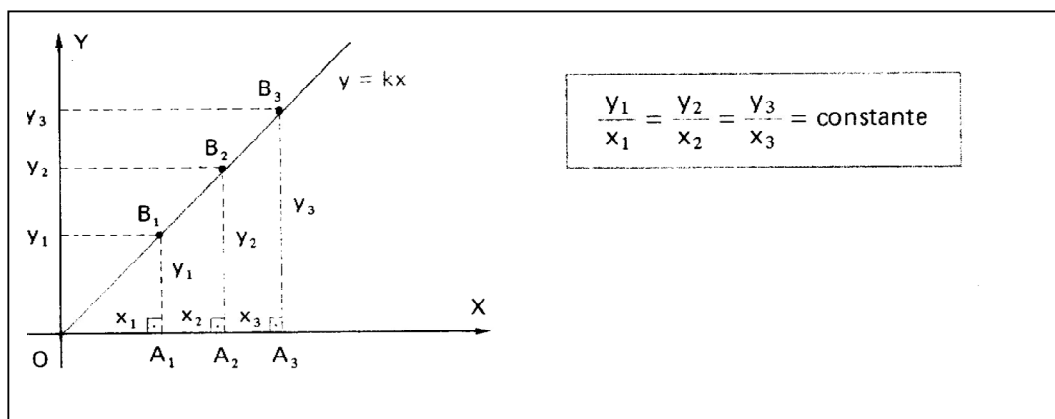
**Fig. 26:** Análise da variação de M, Si e Sc na variação da turgidez de uma célula vegetal (LOPES, 2001).

Os gráficos das figuras 25 e 26 podem ser utilizados pelo professor de Matemática para exemplificar casos em que a representação gráfica de uma função afim  $[y = ax + b]$  assume aspectos diferentes devido aos valores dos números reais  $a$  e  $b$ , que compõem a sua expressão. Nas figuras 25 e 26, a reta AC representa uma função afim decrescente e a reta BC uma função linear crescente.

Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, o aumento [ou diminuição] de uma ocasionará o aumento [ou diminuição] da outra com o quociente entre os valores correspondentes resultando em uma constante.

Outra forma de escrever a relação é  $\frac{y}{x} = k$ , onde  $k$  é a constante de proporcionalidade. Da igualdade anterior, resulta que  $y = kx$  [uma função linear]. Uma relação de proporcionalidade direta pode ser representada graficamente por uma reta, conforme a figura 27 a seguir, extraída de Machado (1988, p. 86).

Figura 27

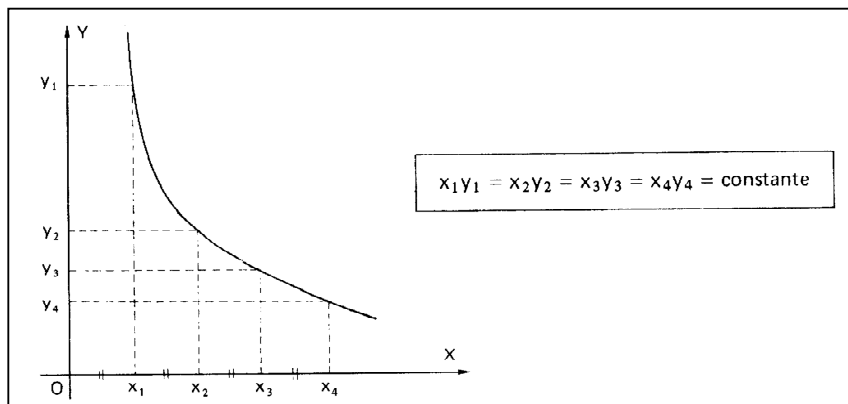


**Fig. 27:** Um gráfico cartesiano representando a relação de proporcionalidade direta,  $y=k.x$ . Quando  $k > 0$ , o ângulo entre o eixo “x” e a reta  $y = k.x$  é agudo. Caso  $k < 0$ , o ângulo será obtuso. Na figura, apenas os valores positivos de x e y estão contemplados (MACHADO 1988).

Quando duas grandezas são inversamente proporcionais, o aumento [ou diminuição] de uma ocasionará a diminuição [ou aumento] da outra e o produto dos seus valores correspondentes resultará em uma constante. No caso das variáveis x e y utilizadas no plano cartesiano,  $x.y = k$ , onde k é a constante de proporcionalidade. Da igualdade anterior, resulta que  $y = \frac{k}{x}$ .

Uma relação de proporcionalidade inversa pode ser apresentada graficamente por um ramo de hipérbole, conforme a figura 28 a seguir, extraída de Machado (1988, p. 88).

Figura 28

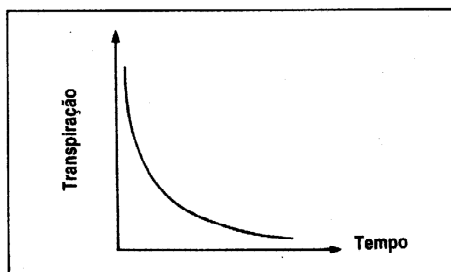


**Fig. 28:** Um gráfico cartesiano representando a relação de proporcionalidade inversa,  $y = k / x$ . Na figura, apenas os valores positivos de x e y estão contemplados (MACHADO 1988).

A seguir, será descrita a ação dos estômatos, estruturas responsáveis por controlar a transpiração de uma planta ao longo do dia. Quando uma folha é retirada em condições de suprimento de água consideradas ideais, ocorre redução da transpiração de uma planta, devida ao fechamento dos estômatos. Observa-se ao aferir a massa da folha imediatamente após a sua retirada que a perda de água é considerada de grande intensidade. Com o passar do tempo, a perda via estômatos diminui até o ponto em que termina, devido ao fechamento dessas estruturas. A partir desse ponto, a perda de água é devida praticamente à transpiração chamada de cuticular, considerada de pouca intensidade e independente do controle da planta.

Assinalando os valores da aferição da massa da folha nos instantes em que as medições são realizadas, é obtido um gráfico que pode ser visto na figura 29 a seguir, extraída de Lopes (2001, p. 297).

**Figura 29**



**Fig. 29:** Gráfico representando perda de água em uma folha em sua relação com o tempo (LOPES, 2001).

Com o gráfico anterior o professor pode apresentar uma relação inversamente proporcional entre as variáveis envolvidas. No caso, deve ficar claro que a relação de proporcionalidade entre tempo e transpiração é inversa, com a transpiração diminuindo com o decorrer do tempo. Caso a transpiração fosse diretamente proporcional ao tempo, o gráfico seria uma reta.

### **4.3 A Matemática e a resolução de problemas biológicos**

#### ***4.3.1 A interação entre conteúdos matemáticos e o estudo da genética***

A Genética é um campo de estudos que possibilita a elaboração de atividades interdisciplinares entre Biologia e Matemática no Ensino Médio. Uma primeira aproximação dá-se nos estudos de Análise Combinatória e cálculos de probabilidades em Genética.

Soares (1999) afirma que a Genética é um campo de estudos baseado na ampla utilização da Matemática. Na elaboração dos processos de resolução dos problemas de Genética são aplicados métodos de cálculos, tais como proporção, porcentagem e estatística. O autor ainda sugere utilizar preferencialmente a porcentagem para apresentação dos resultados ao invés de frações ordinárias, pois os percentuais indicam com mais facilidade quantos resultados seriam obtidos em cada 100 ocorrências de um determinado fenômeno.

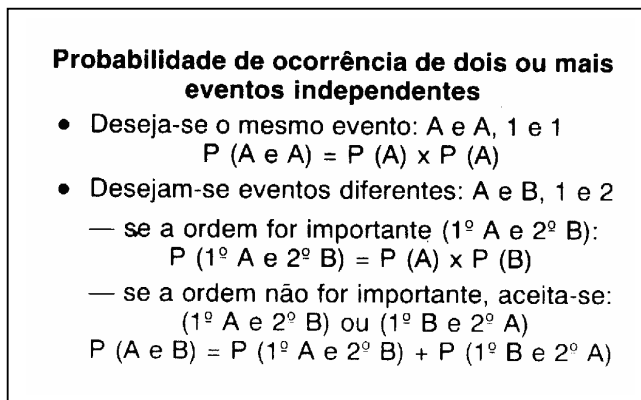
Tanto por parte de autores de livros para o Ensino Médio de Matemática como no caso da Biologia, não existe preocupação com a articulação de saberes. Autores desta última disciplina têm por hábito iniciar o capítulo de probabilidades em Genética com a apresentação de exercícios que reproduzem os mesmos exemplos dos jogos de azar que já foram ou serão apresentados pelos professores de Matemática. A maior incidência de exemplos introdutórios do cálculo de probabilidades recai sobre os jogos de dados e cartas, motivo histórico inicial do desenvolvimento da teoria das probabilidades.

Outro problema ocorre na escolha de determinados contextos para explicar e/ou aplicar propriedades matemáticas. O quadro representado na figura 30, de autoria de Lopes (2001, p. 424) apresenta a consideração sobre dois eventos A e B equiprováveis. São consideradas as situações em que ocorrem repetição do mesmo evento e em que ocorrem dois eventos diferentes.

O produto de probabilidades pode ser aplicado quando o cálculo se refere à probabilidade de dois eventos independentes. Dois eventos são independentes se a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro. Assim, se o evento

considerado como primeiro a ocorrer for A e o evento considerado como segundo for B, o resultado da probabilidade é o mesmo, pois  $P(A) \times P(B) = P(B) \times P(A)$ .

**Figura 30**



**Fig. 30:** Apresentação da probabilidade de eventos independentes e da probabilidade da união de dois eventos (LOPES, 2001).

O comentário contido no quadro da figura 30 vincula uma hierarquia em relação à ordem dos eventos. Para a Análise Combinatória, quando a ordem de ocorrência das etapas de um evento não importa, tem-se uma combinação. No caso em que a autora do livro se refere à possibilidade ou não de ocorrerem simultaneamente os eventos A e B, ela deveria especificar o caso da probabilidade da união de dois eventos. Na união da probabilidade de eventos, eles podem ou não ser mutuamente exclusivos. Se os eventos A e B forem mutuamente exclusivos, a interseção deles é o conjunto vazio. O tipo de simplificação proposta pela autora pode ser conflitante com o que é estudado no cálculo de probabilidades na disciplina de Matemática, gerando a noção equivocada de que existe uma “probabilidade da Genética”, diferente da “probabilidade da Matemática”.

Antes de passar aos cálculos de probabilidades aplicados à Genética, os conceitos de genótipo e fenótipo devem ser entendidos pela sua importância em relação à compreensão de outros conceitos desse tópico.

Segundo Lopes (2001, p. 421) o fenótipo é o

[...] conjunto das variáveis dos caracteres manifestado em um organismo como à variável de um caráter particular.

## E o termo genótipo

[...] pode ser aplicado a um conjunto total de genes de um indivíduo como a cada par de genes em particular [...] os filhos herdam dos pais um certo genótipo, que tem a potencialidade de expressar um fenótipo. Um mesmo genótipo pode expressar-se por diferentes fenótipos, dependendo de sua interação com o meio.

### 4.3.2. Análise combinatória e o estudo de genética

A análise combinatória é um campo da Matemática que, basicamente, busca formas de determinar totais de possibilidades da ocorrência de eventos, sem necessariamente descrever cada etapa do fenômeno em questão. A contagem direta consiste em determinar todos os desenvolvimentos possíveis. A forma de resolver problemas sem determinar cada etapa é chamada de contagem indireta.

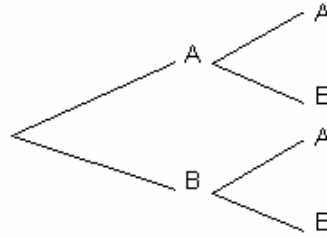
Uma forma de resolver problemas de análise combinatória é utilizando diagramas de árvore. Nesse processo, cada possibilidade é descrita e os possíveis desenvolvimentos do fenômeno estudado são formulados com a construção do diagrama. Uma aplicação desse dispositivo pode ser ilustrada pelo exemplo a seguir, extraído de Antar Neto et al (1979, p. 207-208).

*Problema:* Dois indivíduos A e B vão disputar um torneio de tênis. O primeiro a vencer dois jogos vencerá o torneio. De quantos modos diferentes poderá desenrolar-se o torneio?

*Resolução:* Ao fim de cada jogo existem apenas duas possibilidades: vitória de A ou de B. A representação do diagrama de árvore para o primeiro jogo teria a forma a seguir:

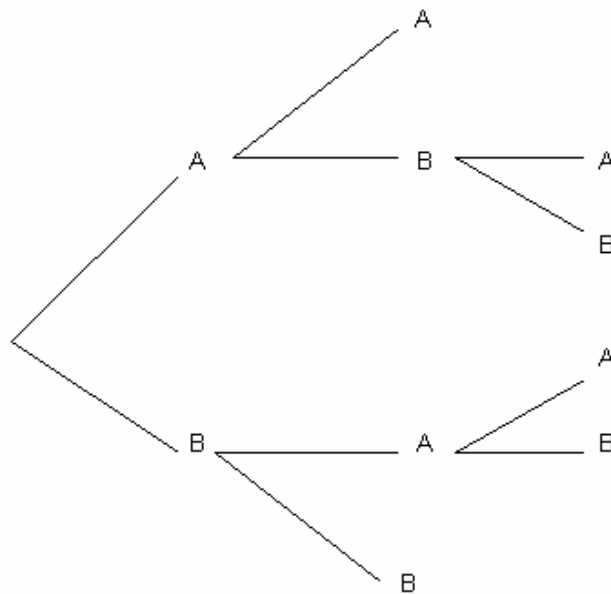


O vértice do ângulo representa o início de um jogo e na extremidade de cada segmento é apresentado o vencedor do jogo. A continuação da figura acima pode ser feita para representar o vencedor do segundo jogo. Se A venceu o primeiro jogo, o segundo pode ser vencido por A ou B. Porém, na hipótese do vencedor do primeiro jogo ter sido B, o segundo jogo também pode ser vencido por A ou B. Ao fim do segundo jogo, o diagrama fica assim:



Cada ramo da árvore pode terminar com duas vitórias seguidas de um dos competidores. No diagrama anterior, o primeiro e o último resultado correspondem a duas vitórias seguidas [AA e BB]. O segundo e o terceiro resultado ainda não esgotam todas as possibilidades. Nesses casos, a árvore deve ser estendida, o que resulta na figura 31, na qual estão apresentadas todas as possibilidades de término da disputa.

**Figura 31**



**Fig. 31:** O diagrama de árvore com todos os possíveis resultados da disputa entre dois indivíduos, em que o ganhador é o que vencer duas partidas.

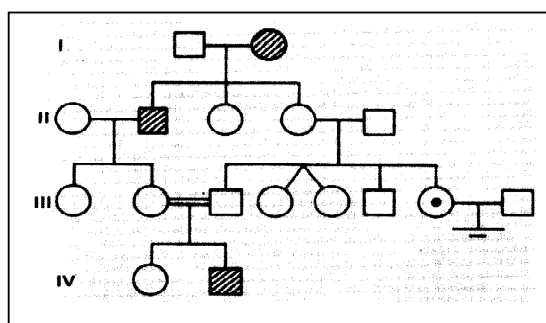
Os resultados possíveis são as seqüências dados na tabela a seguir.

**Tabela 6:** os possíveis resultados da disputa entre dois indivíduos, em que o ganhador é o que vencer duas partidas.

AA	ABA	ABB	BAA	BAB	BB
----	-----	-----	-----	-----	----

A Biologia lança mão dos diagramas de árvores, por exemplo, para apresentar problemas e dados, além de estruturar a resolução de problemas da Genética. Lopes (2001) apresenta o conceito e um modelo de heredograma ou árvore genealógica, que corresponde à árvore de possibilidades da Análise Combinatória. A árvore de possibilidades é uma das primeiras formas de representar resultados de problemas da Análise Combinatória e uma maneira intuitiva de apresentar os possíveis resultados em cada etapa do desenvolvimento da resolução. No caso da Biologia, ela se refere às possibilidades de resultados entre cruzamentos. Na figura 32 a seguir, tem-se um exemplo da aplicação de diagramas de árvores ao estudo de Biologia. O diagrama de árvore em questão recebe o nome de árvore genealógica [ou heredograma].

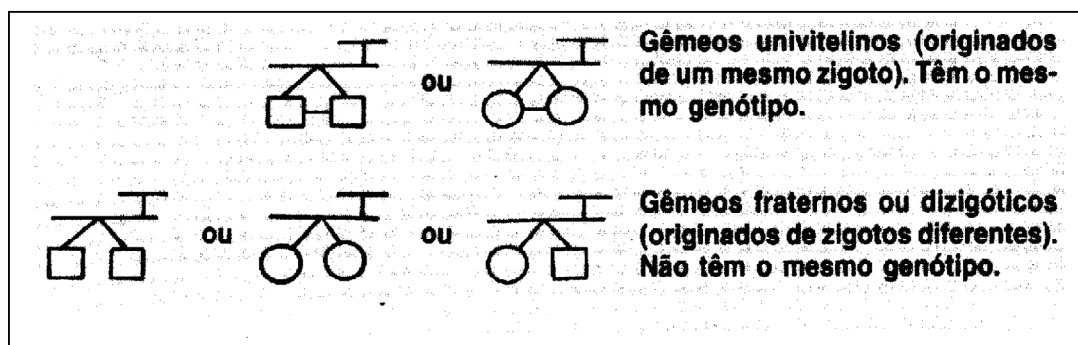
**Figura 32**



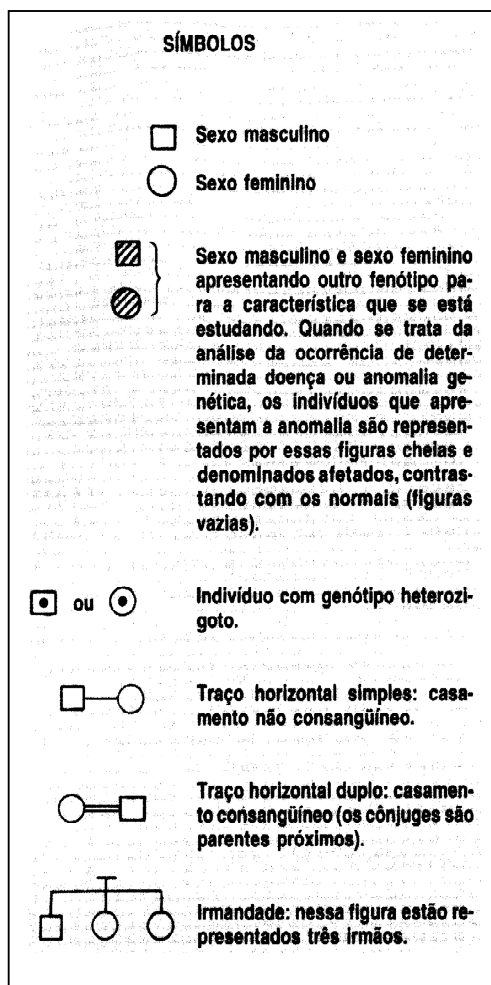
**Fig 32:** Árvore genealógica (ou um heredograma, LOPES, 2001).

Nas figuras 33a e 33b a seguir estão explicitados alguns significados dos símbolos que figuram no diagrama chamado de árvore genealógica.

**Figura 33a**



**Fig. 33a:** Significados de alguns símbolos presentes em um heredograma (ou árvore genealógica, LOPES, 2001).

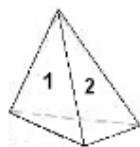


**Fig. 33b:** Significados de alguns símbolos presentes em um heredograma (ou árvore genealógica, LOPES, 2001).

O diagrama de árvore, porém, é um dispositivo que pode não ser prático quando o evento estudado possui muitas possibilidades de ocorrência em cada uma de suas etapas.

Como a representação pelo diagrama de árvore é limitada, não adequada à resolução de problemas de análise combinatória com grande quantidade eventos seqüenciais, faz-se necessário desenvolver outros métodos para a resolução desses problemas. Para problemas cuja resolução se dá a partir da verificação dos resultados de etapas sucessivas, é possível aplicar o princípio fundamental da contagem [abreviadamente, *PFC*]. A aplicação desse princípio pode ser ilustrada por meio de uma situação extraída de Antar Neto et al (1979, p. 212-213), mostrada a seguir.

*Problema:* Um jogo é realizado lançando-se um dado de quatro faces e, em seguida, uma moeda (um dado de quatro faces é um tetraedro, com as faces numeradas de 1 a 4 - veja a figura). Cada resultado, portanto, é um par ordenado onde o primeiro elemento é o número obtido no dado e o segundo elemento é a face obtida na moeda (cara ou coroa). Quantos resultados são possíveis?



*Resolução:* Cada resultado obtido pode ser contabilizado como um par ordenado, com o primeiro elemento igual ao número obtido no dado [1, 2, 3, 4] e, o segundo, igual à face obtida na moeda [cara ou coroa]. O desenvolvimento da resolução pode ser elaborado com o uso de uma tabela, como a apresentada a seguir. A letra *K* representará o resultado cara. A letra *C* representará o resultado coroa.

**Tabela 7:** Os possíveis resultados do arremesso de um dado seguido do lançamento de uma moeda.

Resultado do dado	1	1	2	2	3	3	4	4
Resultado da moeda	K	C	K	C	K	C	K	C

Os pares ordenados correspondentes aos resultados são: (1, K), (1, C), (2, K), (2, C), (3, K), (3, C), (4, K) e (4, C). São, portanto, oito resultados possíveis.

A quantidade de resultados do jogo também pode ser obtida da seguinte forma:

- Cada número obtido no dado é colocado em correspondência com os dois resultados na moeda.
- Como são quatro resultados no dado, cada número formará duas duplas com as possibilidades de resultados da moeda.
- O total de seqüências obtidas é:  $4 \times 2 = 8$  possibilidades.

A partir de exemplos de formação das seqüências, pode ser formulado o princípio fundamental da contagem [*PFC*].

Se um evento se desenvolve em etapas sucessivas  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  e cada uma dessas etapas pode ocorrer de  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  respectivas maneiras diferentes, então o total de maneiras em que esse evento pode se desenvolver é  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$ .

As aplicações do princípio fundamental da contagem podem levar à formulação de produtos na forma  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$ , em que  $n$  é um número natural.

Esse tipo de multiplicação recebeu o nome de *fatorial de  $n$* , representado por  $n!$ . A formação de um fatorial pode ser ilustrada pelo exemplo adaptado de Antar Neto et al (1979, p. 280), que é mostrado a seguir.

*Problema:* Considere a palavra VESTIBULAR. Quantos são os seus anagramas?

*Resolução:* Anagrama é qualquer ordenação feita com todas as letras de uma palavra, mesmo que o resultado não tenha sentido ao ser lido. Considerando que dispor as letras da palavra VESTIBULAR em qualquer ordem é um evento composto de oito etapas sucessivas com todos os elementos distintos, tem-se a tabela 8.

**Tabela 8:** os totais de possibilidades para cada letra na formulação dos anagramas da palavra VESTIBULAR.

Etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Total de possibilidades	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Assim, pelo PFC, o total de formas de escrever os anagramas é o produto:  
 $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10!$ , que resulta em 3 628 800 anagramas.

Basicamente, nos estudos de análise combinatória, os estudantes deparam-se com a resolução de problemas que levam a formação de agrupamentos ordenados ou não ordenados. Nos agrupamentos ordenados, as etapas são realizações sucessivas, o que determina a formação de seqüências. Os agrupamentos ordenados podem ser chamados de arranjos ou de permutações, que podem ou não possuir elementos repetidos. Nos arranjos, os agrupamentos são formados por menos elementos que o total de elementos disponíveis. No caso da permutação, todos os elementos disponíveis fazem parte dos agrupamentos. Já nos casos de agrupamentos não ordenados, as etapas de realização deixam de ser consideradas necessariamente sucessivas, bastando que sejam cumpridas. Os agrupamentos não ordenados são chamados de combinações. As combinações, da mesma forma que os agrupamentos ordenados, podem ou não ter elementos repetidos.

Dois exemplos para diferenciar os agrupamentos ordenados e não ordenados são dados a seguir.

*Problema:* Quatro estudantes disputarão entre si um campeonato de xadrez. a) Quantas são as possibilidades de premiar os dois primeiros colocados? b) De quantas maneiras diferentes podem ser convocadas duplas de competidores para uma entrevista a respeito do campeonato?

*Resolução:* As duas perguntas do problema levam a duas resoluções de situações distintas. A situação da letra *a* representa um evento com etapas sucessivas. Nesse caso será calculado o total de arranjos com quatro elementos, agrupados de dois em dois. Os competidores podem ser denominados, por exemplo, pelas letras *A*, *B*, *C* e *D*. As possíveis ordens de colocação para os dois primeiros lugares são dadas pela tabela 9 a seguir.

**Tabela 9:** São apresentadas 12 seqüências, que correspondem a 1º e 2º lugares da competição. Deve ser notado que as seqüências *AB* e *BA* são diferentes, pois apesar de formadas pelos mesmos alunos, elas possuem disposições diferentes para as colocações dos elementos nos dois casos.

1º lugar	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
2º lugar	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C

A segunda situação, tratada na letra *b*, é a de um evento cujas etapas não são necessariamente sucessivas. Trata-se de calcular quantas são as possíveis combinações de quatro elementos, quando agrupados de dois em dois. As possíveis duplas não ordenadas formadas são dadas pela tabela a 10 seguir.

**Tabela 10:** São apresentadas seis duplas de elementos contados de forma não ordenada. No caso de convocar uma dupla para uma entrevista, as repetições são eliminadas, como no caso de *AB* e *BA*, pois a ordem não fará diferença nos casos. As duplas *AB* e *BA* serão consideradas idênticas.

AB	BC	CD
AC	BD	
AD		

No caso dos agrupamentos formados pelo primeiro e segundo colocados, o número de elementos do agrupamento [dois] é menor que o total de elementos disponíveis [quatro]. No exemplo, deve ser determinado o total de arranjos de quatro elementos, agrupados de dois em dois. O total de possibilidades para primeiro e segundo lugar pode ser facilmente calculado utilizando o princípio fundamental da contagem, pois são duas etapas sucessivas, com a primeira tendo quatro possibilidades de ocorrer e, a segunda, três possibilidades. Assim, o total de seqüências será:  $4 \times 3 = 12$ .

Chamando de  $A$  o total de arranjos que pode ser obtido a partir dos  $n$  elementos disponíveis e de  $p$  o número de elementos em cada agrupamento obtido, o total desses arranjos de  $n$  elementos agrupados de  $p$  em  $p$  é representado por  $A_{n,p}$ . No exemplo,  $n = 4$  e  $p = 2$  e  $A_{4,2} = 12$ .

O total de convocações para uma entrevista [as combinações] requer mais um pouco de trabalho. Para eliminar o total de repetições de duplas, deve ser notado um fato: em cada entrevista formam-se agrupamentos com dois elementos distintos. Em cada dupla, o primeiro elemento tem duas possibilidades de ocorrência. Para o segundo elemento, existe apenas uma possibilidade. Assim, o total de agrupamentos ordenados de dois elementos é:  $2 \times 1 = 2 = 2!$  Dessa forma, para eliminar as repetições de duplas obtidas pela ordenação dos seus componentes, é necessário dividir o total de agrupamentos ordenados com quatro elementos pelo fatorial da quantidade de elementos de cada agrupamento [no caso, dois elementos].

O princípio utilizado para a resolução do segundo caso pode ser estendido para todos os casos de combinações que não têm elementos repetidos. Chamando de  $C$  o total de combinações de  $n$  elementos agrupados de  $p$  em  $p$ , pode ser utilizada a seguinte representação:  $C_{n,p}$ . No exemplo,  $n = 4$  e  $p = 2$ . Assim,  $C_{4,2} = 6$ .

A relação entre o total de arranjos de  $n$  elementos agrupados de  $p$  em  $p$  [ $A_{n,p}$ ] e o de combinações com os mesmos  $n$  elementos agrupados de  $p$  em  $p$  [ $C_{n,p}$ ] pode ser assim escrita:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Uma outra forma de representar  $C_{n,p}$  é utilizando a forma

$$C_{n,p} = \binom{n}{p}$$

representação é chamada de número binomial de numerador  $n$  e classe  $p$ . São

valores particulares:  $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$  e  $\binom{n}{1} = n$ .

O número de combinações com repetição, formadas a partir de  $n$  elementos, agrupados  $p$  a  $p$ , será representado por  $CR_{n,p}$ . O valor de  $p$  será chamado de classe da combinação. A classe determinará quantos elementos terá a combinação feita a partir de  $n$  elementos distintos.

Uma combinação com repetição de classe  $p$  formada a partir de  $n$  elementos distintos terá no máximo  $(n + p - 1)$  elementos. O total das combinações de classe  $p$ , que podem ser formadas a partir dos  $n$  elementos de um conjunto, será calculada pela relação:

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}$$

Um exemplo de combinação com elementos repetidos é apresentado a seguir.

*Problema:* Uma padaria vende caramelos nos sabores abacaxi e banana. De quantas maneiras uma pessoa pode comprar três caramelos nessa padaria?

*Resolução:* O caramelo de abacaxi será chamado de  $A$  e o de banana, de  $B$ . Pode ser que todos os caramelos tenham o mesmo sabor, ou que dois tenham um sabor e o terceiro tenha outro que ainda não foi escolhido. As possíveis escolhas de caramelos são:  $AAA$ ,  $BBB$ ,  $AAB$  e  $ABB$ , já que a ordem dos sabores não altera a escolha. No caso,  $n = 2$  [número de sabores] e  $p = 3$  [classe da combinação]. A quantidade de resultados corresponde ao cálculo do número de combinações com dois elementos, a partir da repetição feita ao agrupá-los de três em três. Assim:

$$CR_{2,3} = C_{2+3-1,3} = C_{5-1,3} = C_{4,3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4.$$

#### **4.3.2.1 Análise combinatória e a primeira Lei de Mendel**

##### **4.3.2.1.1 Os genes alelos**

O local que um gene ocupa dentro de um cromossomo é chamado de locus gênico. Os genes alelos ocupam o mesmo locus em cromossomos homólogos. Nas células diplóides os genes alelos estão dispostos em pares. “[...] os genes alelos não são necessariamente idênticos [...]”, segundo Lopes (2001, p. 419). Os genes alelos portados por indivíduos são classificados de duas formas, segundo a autora (2001, p. 420), em relação à igualdade ou não de genes alelos. Ela afirma que:

[...] quando, nas células de um indivíduo, os alelos que compõem um par não são idênticos entre si, o indivíduo é denominado heterozigoto [...] quando os genes alelos são idênticos, o indivíduo é denominado homozigoto [...].

Convenciona-se representar um alelo dominante por uma letra latina maiúscula. Caso o alelo seja recessivo, é utilizada a mesma letra do dominante, porém de tipo minúsculo. Outra convenção é escrever a letra maiúscula antes da minúscula no caso do indivíduo ser heterozigoto para determinada característica, embora a ordem das letras não altere o genótipo formado. Assim,  $AA$  é a representação do genótipo de um indivíduo homozigoto dominante para determinada característica, ao passo que  $aa$  é a representação do genótipo de um indivíduo homozigoto recessivo para determinada característica e  $Aa$  representa um indivíduo heterozigoto.

O alelo dominante influencia o fenótipo de um indivíduo diplóide sem necessidade de repetir a sua ocorrência no genótipo. Quando a representação do alelo necessita de repetição para indicar a aparência [fenótipo] do indivíduo, o alelo é chamado de recessivo. Simplificando como em Lopes (2001), um alelo dominante determina o mesmo fenótipo estando ou não em heterozigose. Já o alelo recessivo se manifesta apenas em caso de homozigose. É necessário frisar que quando se manifesta, o alelo recessivo o faz exclusivamente em homozigose recessiva.

Para determinar se o fenótipo apresentado por um indivíduo de características dominantes corresponde a um genótipo homozigoto ou heterozigoto é realizado um cruzamento-teste. A autora apresenta como exemplo a possibilidade de cruzamento de uma planta de sementes lisas de genótipo  $R?$  [no qual a interrogação indica o alelo desconhecido] com outra de sementes rugosas de genótipo  $rr$ . Se todos os descendentes produzidos tiverem sementes lisas, o indivíduo  $R?$  é na verdade  $RR$ . Caso sejam produzidos descendentes que têm sementes rugosas, o indivíduo  $R?$  é, na verdade,  $Rr$ .

Os livros de Biologia quando discutem a primeira lei de Mendel, citam e discutem o experimento de cruzamento de ervilhas. Nos seus experimentos Mendel fez o cruzamento de ervilhas com diferentes características, e observou o aparecimento de uma única característica por vez. Em um dos seus experimentos ele cruzou uma linhagem parental homozigota ( $RR$ ) de ervilhas com sementes lisas com uma homozigota ( $rr$ ) com sementes de aparência rugosa. Onde a letra  $R$  refere-

se ao caráter da semente de aparência lisa, característica dominante, e a letra  $r$  refere-se ao caráter da semente de aparência rugosa, característica recessiva. A geração parental refere-se às sementes consideradas de linhagem pura, ou seja, a linhagem cujos descendentes não apresentavam variações genéticas. Este cruzamento produziu ervilhas com gametas 100%  $Rr$ , conforme apresentado na tabela 11.

**Tabela 11:** Representação entre indivíduos da primeira geração (geração parental) e o primeiro cruzamento de linhagens "puras".

	R	R
r	Rr	Rr
r	Rr	Rr

Na primeira linha da tabela, assim como em todas as que representam cruzamentos, aparecem  $R$  e  $R$ , contribuição do gameta feminino. Na primeira coluna aparecem  $r$  e  $r$ , contribuição do gameta masculino. No caso, a tabela representa os cruzamentos resultantes em quatro elementos, todos com genótipos iguais entre si.

Os descendentes da geração parental [abreviadamente  $P$ ] são chamados de geração  $F_1$ . No caso da geração  $F_1$ , todos os descendentes apresentam sementes lisas, pois a característica semente lisa [ $R$ ] predomina sobre a característica de semente rugosa [ $r$ ]. Em seguida, foi feita a auto-fecundação da geração  $F_1$ , resultando nos indivíduos apresentados na tabela 12.

**Tabela 12:** Cruzamento da geração  $F_1$ , resultante do cruzamento da geração parental. Na geração  $F_2$  surge a possibilidade ocorrerem elementos com aparências diferentes. A proporção de indivíduos diferentes é de 3 plantas com sementes lisas [ $RR$  e  $Rr$ ] para 1 com sementes rugosas.

	R	r
$R$	$RR$	$Rr$
$r$	$Rr$	$rr$

A partir do cruzamento entre os indivíduos da geração  $F_1$  foi estabelecida a geração  $F_2$ . Se na geração  $F_1$  existia apenas a característica de semente lisa [dominante], na geração  $F_2$  apareceram as primeiras sementes rugosas [recessiva].

Os resultados dos experimentos de Mendel são possíveis pelo fato de que, durante a formação dos gametas, os fatores responsáveis pelas características são separados, ficando um elemento do par de caracteres com cada gameta. Portanto,

tem-se a primeira lei de Mendel que diz que cada caráter é condicionado por um par de genes alelos, que se segregam entre si, com a mesma probabilidade, na formação dos gametas, indo apenas um gene para cada gameta.

Pelo fato da Primeira Lei tratar apenas de uma característica de cada vez, diz-se que ela se refere ao monoibridismo. Na geração  $F_2$  a proporção de elementos com sementes lisas em relação ao total de possibilidades é de  $3/4$ , pois na tabela 12 existem 3 elementos com genótipo para semente lisa [ $RR, Rr, Rr$ ]. A proporção de elementos com sementes rugosas em relação ao total de possibilidades seria então de  $1/4$ , pois, para semente rugosa existe apenas um genótipo para tal característica [ $rr$ ]. O cálculo da possibilidade de encontrar sementes lisas ou rugosas nas gerações de ervilhas é um caso de probabilidade com resolução simples. Basta analisar a tabela com todos os genótipos possíveis que formam o total de possibilidades para determinar o resultado procurado.

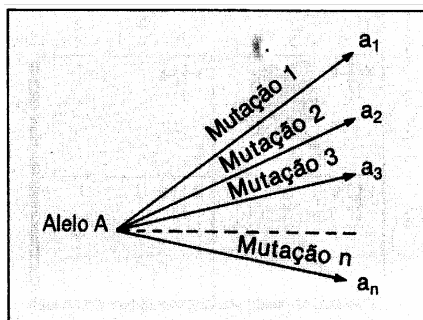
No caso do cruzamento dos elementos da geração  $F_1$  para a obtenção da geração  $F_2$ , são obtidos três tipos de resultados:  $RR, Rr$  e  $rr$ , sendo  $Rr$  repetido duas vezes. O total de genótipos dos cruzamentos pode ser calculado como  $CR_{2,2} = C_{2+2-1,2} = C_{4-1,2} = C_{3,2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = \frac{3}{1} = 3$ . O total de quatro elementos [dois indivíduos  $Rr$ ] deve-se ao fato de se considerar a herança paterna e materna que contribuem para a formação dos genótipos.

#### **4.3.2.1.2 Os Alelos múltiplos (polialelia)**

Os casos analisados até agora foram aqueles em que para cada *locus* existem apenas duas possibilidades de alelos. Esses alelos podem ser iguais ou diferentes ou ainda terem ou não relação de dominância. Podem ocorrer casos em que o mesmo *locus* tenha um gene que passe por processo de mutação. Essa mutação pode dar origem a diversos tipos de genes alelos. O fato de ocorrerem mais de dois alelos correspondentes ao mesmo *locus* é chamado de polialelia (ou genes múltiplos).

Lopes (2001, p. 434) apresenta o esquema da mutação de um suposto alelo  $A$ , que origina  $n$  alelos  $a$ , que pode ser visto na figura 34 a seguir. O cálculo da quantidade de possibilidades desses genes alelos é um exemplo de uso da análise combinatória.

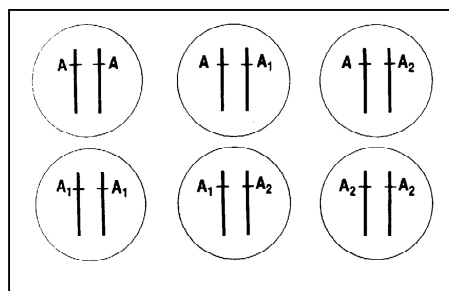
**Figura 34**



**Fig. 34:** Representação esquemática da mutação sofrida por um alelo  $A$  dando origem a uma polialelia (LOPES, 2001).

Mesmo existindo multiplicidade de alelos para o mesmo *locus*, “[...] nas células de cada indivíduo diplóide ocorrem apenas dois deles, pois são apenas dois cromossomos homólogos”, segundo Lopes (2001, P. 435). Na hipótese do gene  $A$  ter os alelos  $A$ ,  $A_1$  e  $A_2$ , essa polialelia dará origem a seis combinações distintas. As combinações podem ser observadas na figura 35 a seguir.

**Figura 35**



**Fig. 35:** Um gene  $A$ , que possui alelos  $A_1$  e  $A_2$  pode dar origem a seis diferentes combinações (LOPES, 2001).

A quantidade de combinações de três elementos agrupados de dois em dois, podendo ocorrer repetições, coincide com o arranjo simples de três elementos agrupados de dois em dois é:

$$A_{3,2} = 3 \times 2 = 6 \text{ e } CR_{3,2} = C_{3+2-1,2} = C_{5-1,2} = C_{4,2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{2 \times 3}{1} = 6.$$

O número de combinações depende de haver ou não dominância de um alelo sobre o outro. Assim, a transmissão de alelos segue o mesmo padrão do monoibridismo. A figura 36 apresenta a legenda necessária para a representação dos genótipos e fenótipos para as cores de pelo de quatro espécies de coelho listados na figura 37.

**Figura 36**

Gene	Fenótipo
$c^+$	Selvagem ou aguti
$c^{ch}$	Chinchila
$c^h$	Himalaia
$c$	Albino

**Observação:** O símbolo + é geralmente utilizado para o fenótipo selvagem.

**Fig. 36:** Os genes relativos às cores de pêlos de coelhos e os fenótipos correspondentes (LOPES, 2001).

No caso das combinações de um gene que possui quatro alelos distintos, como no exemplo da cor do pêlo de quatro espécies de coelhos, a quantidade de combinações não pode ser calculada como o total de arranjos simples de quatro elementos agrupados de dois em dois. Deve-se calcular o total de combinações de quatro elementos agrupados de dois em dois, com possibilidade de ocorrerem repetições, que é igual a dez, conforme pode ser verificado na figura 37.

**Figura 37**

Genótipos	Fenótipos
$c^+c^+, c^+c^{ch}, c^+c^h, c^+c$	Selvagem ou aguti
$c^{ch}c^{ch}, c^{ch}c^h, c^{ch}c$	Chinchila
$c^hc^h, c^hc$	Himalaia
$cc$	Albino

$c^+c^h$  e  $c^+c$ : aguti  
 $c^hc$ : himalaia  
 $cc$ : albino

**Fig. 37:** Possíveis combinações dos alelos, genótipos e fenótipos resultantes (LOPES, 2001).

A relação matemática que na realidade determina as quantidades desses resultados é a combinação com repetição de elementos, assunto da Análise Combinatória.

$$CR_{4,2} = C_{4+2-1,2} = C_{6-1,2} = C_{5,2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{5 \times 2}{1} = 10.$$

#### 4.3.2.2 Análise combinatória e a segunda Lei de Mendel

Segundo relato de Lopes (2001), Mendel realizou cruzamentos para análise simultânea de dois caracteres. No exemplo escolhido pela autora, constam a cor e forma das sementes, onde  $R$  representa o gene dominante para semente lisa e  $r$  o gene recessivo para essa característica. A letra  $V$  representa o gene dominante relativo à cor amarela da semente e a letra  $v$  o gene recessivo para ervilha de cor verde. Assim,  $RR$  ou  $Rr$  são genótipos que representam sementes lisas. Os genótipos  $VV$  ou  $Vv$  representam sementes amarelas. Para a semente ser enrugada é necessário ter genótipo  $rr$  e para semente ser verde genótipo  $vv$ .

















Mendel realizou o cruzamento da geração parental dos indivíduos  $RRVV$  [sementes lisas e amarelas] e  $rrvv$  [sementes enrugadas e verdes]. No cruzamento o indivíduo  $RRVV$  contribui com o par  $RV$  e indivíduo  $rrvv$  contribui com o par  $rv$ . O resultado foi uma geração  $F_1$  com todos os indivíduos  $RrVv$  de sementes lisas e amarelas. Ao cruzar dois elementos da geração  $F_1$  entre si, os gametas femininos e os masculinos são distribuídos nos pares  $RV$ ,  $Rv$ ,  $rV$  e  $rv$ . Os resultados dos cruzamentos podem ser verificados na figura 38.

Os 16 descendentes distintos [16 genótipos] apresentaram apenas 4 fenótipos: semente lisa e amarela, com 9 possibilidades; lisa e verde com 3 possibilidades; rugosa e amarela, com 3 possibilidades; e rugosa e verde, com 1 possibilidade. Assim, pode ser notado que a forma e a cor da semente possuem ocorrências independentes. Matematicamente isso significa que a probabilidade de obter sementes com duas características distintas e também de ocorrência simultânea pode ser calculada utilizando o produto de probabilidades.

A proporção dos fenótipos em  $F_2$  é  $9 : 3 : 3 : 1$ , sendo 9 o valor relativo à ocorrência simultânea dos dois fenótipos dominantes, 3 se refere a ocorrência de apenas um fenótipo dominante e 1 à ausência de fenótipos dominantes. A razão entre o total de possibilidades de obter um elemento de semente lisa em relação ao total de possibilidades apresentadas na figura 38 é  $\frac{12}{16}$  ou  $\frac{3}{4}$ . A razão entre o total de possibilidades de obter um elemento de semente verde em relação ao total de

possibilidades apresentadas na figura 38 é  $\frac{4}{12}$  ou  $\frac{1}{4}$ . Assim, a razão entre o total de elementos de semente lisa e verde e o total de possibilidades apresentadas na figura 38 é  $\frac{3 \times 1}{4 \times 4}$  ou  $\frac{3}{16}$  ou 0,1875 ou 18,75%.

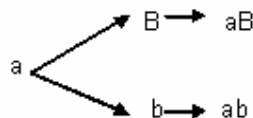
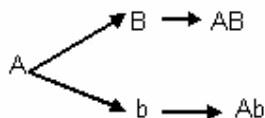
**Figura 38**

		Gametas femininos			
		RV	Rv	rV	rv
Gametas masculinos	RV	 Lisa e amarela RRVV	 Lisa e amarela RRVv	 Lisa e amarela RrVV	 Lisa e amarela RrVv
	Rv	 Lisa e amarela RRVv	 Lisa e verde RRvv	 Lisa e amarela RrVv	 Lisa e verde Rrvv
	rV	 Lisa e amarela RrVV	 Lisa e amarela RrVv	 Rugosa e amarela rrVV	 Rugosa e amarela rrVv
	rv	 Lisa e amarela RrVv	 Lisa e verde Rrvv	 Rugosa e amarela rrVv	 Rugosa e verde rrvv

**Fig. 38:** O resultado da fecundação de indivíduos da geração F1 corresponde a 16 descendentes diferentes, apesar de existirem apenas quatro fenótipos (LOPES, 2001).

Analogamente, a probabilidade de um elemento da figura 38 ter semente lisa e amarela é  $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$  ou 0,5625 ou 56,25%.

O total de genótipos, como nos casos das ervilhas da figura 38, pode ser calculado a partir do princípio multiplicativo. Os possíveis gametas formados por um indivíduo que possui pares de genes diferentes situados em cromossomos homólogos podem ser determinados com um diagrama de árvore. No caso de um indivíduo de genótipo  $AaBb$ , por exemplo, teremos:



Serão formados os quatro gametas  $AB$ ,  $Ab$ ,  $aB$  e  $ab$ , na proporção a seguir:

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ . Caso o indivíduo tenha genótipo  $AaBbCc$ , serão formados os oito gametas  $ABC$ ,  $ABc$ ,  $AbC$ ,  $Abc$ ,  $aBC$ ,  $aBc$ ,  $abC$  e  $abc$ , na proporção

$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ .

Uma forma de calcular apenas o total de gametas produzidos é usar o princípio multiplicativo. No caso  $AaBb$ , temos dois gametas em heterozigose. Para cada gene existem duas possibilidades. Assim, podemos calcular o número de gametas fazendo o produto:

$$2 \times 2 = 4$$

O primeiro elemento do produto indica o total de possibilidades do primeiro alelo [ $A$  ou  $a$ ] e o segundo indica o total de possibilidades do segundo alelo [ $B$  ou  $b$ ]. No caso do exemplo  $AaBbCc$ , o mesmo princípio pode ser usado. Assim, podemos calcular a quantidade de gametas produzidos fazendo:

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

O primeiro elemento do produto indica o total de possibilidades do primeiro alelo,  $A$  ou  $a$ , o segundo indica o total de possibilidades do segundo alelo,  $B$  ou  $b$  e o terceiro é relativo ao terceiro alelo,  $C$  ou  $c$ . Resumindo o processo, pode-se calcular:  $2^n$  gametas, onde  $n$  representa o número de pares de alelos em heterozigose. A maneira de calcular o total de gametas apresentada anteriormente é uma forma de aplicação do princípio multiplicativo. No primeiro exemplo seria  $2^2 = 4$  e, no segundo,  $2^3 = 8$ .

#### 4.3.3 Probabilidade e o estudo de genética

Antes de avançar na interação entre a probabilidade e a genética, serão apresentados alguns fatos históricos e conceitos referentes à probabilidade.

A teoria das probabilidades tem seu nascimento ligado ao estudo das formas de tentar prever as possibilidades de vitória em disputas de jogos de azar. Em relação à origem da teoria das probabilidades, segundo Morgado et al (2000, p. 6):

diz-se geralmente que [...] originou-se com Blaise Pascal (1623-1666) e Pierre de Fermat (1601-1665), devido à curiosidade de um [...] jogador apaixonado, que em cartas discutia com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar um certo jogo de cartas [...] mas em verdade a teoria elementar das probabilidades já tinha sido objeto de atenção bem antes [...] já na *Divina Comédia*, de Dante Alighieri (1265-12321), há uma referência a probabilidades em jogos de dados [...] o desenvolvimento da Análise Combinatória deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades (grifos dos autores).

Em 1663, Cardano publicou a obra “Sobre os jogos de Azar” [que no ocidente é considerado o primeiro trabalho sobre o estudo de probabilidades] onde ele apresenta as possibilidades de ganhar em jogos de lançamento de dois dados. Após Cardano, Kepler (1571-1630) também dedicou-se ao estudo de probabilidades e Galileu (1564-1642) também estudou as possibilidades de ganhar em jogos de três dados. Pascal, considerado o matemático que desenvolveu os estudos da teoria das probabilidades, utilizou o triângulo que leva o seu nome para estudar as possibilidades de resultados em determinados jogos de cartas. É debitada a Huygens (1629-1695) a autoria do primeiro tratado a respeito da teoria das probabilidades.

Desde o século XVIII a teoria das probabilidades tem sido aplicada em campos de estudos fora da Matemática, como por exemplo, “[...] as publicações estatísticas sobre impostos, doenças [...]” tornando esse campo de estudos um exemplo de “[...] instrumento de observação social [...]”, segundo Morgado et al (2000, p. 7). No início do século XX, o matemático inglês Hardy uniu definitivamente a teoria das probabilidades aos estudos de Biologia, com a apresentação do seu modelo de distribuição de genótipos ao longo de gerações. Esse modelo será analisado mais adiante.

De acordo com Morgado et al (2000, p. 119), um experimento é classificado como aleatório quando “[...] repetido sob as mesmas condições, produzem resultados geralmente diferentes [...]”. Uma moeda pode prestar-se ao estudo do

experimento aleatório. O lançamento dessa moeda para verificar se ela retornará com a face cara ou a coroa voltada para cima é um experimento aleatório, pois não pode se antecipar o resultado, mesmo que ele seja repetido sucessivas vezes.

O espaço amostral é o conjunto formado por todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. O espaço amostral pode ser representado pela letra grega  $\Omega$ . No caso do experimento aleatório ser o lançamento de uma moeda normal, o espaço amostral será  $\Omega = \{k, c\}$ , onde  $k$  representa o resultado cara e  $c$  o resultado coroa.

Evento será qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Se o experimento aleatório for o lançamento de um dado não viciado, seu espaço amostral será  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Desse espaço amostral podem ser retirados alguns exemplos de eventos:

$A = \{2, 3, 5\}$ , que representa as possibilidades de obter números primos.

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , que representa a possibilidade de obter número inteiro maior que zero e menor que sete. Neste caso  $B = \Omega$  e o evento é chamado de “evento certo”<sup>20</sup>.

$C = \{x/x \text{ é número do dado menor que zero}\}$  Assim,  $C = \{ \}$  ou  $\emptyset$ . Neste caso, o evento  $C$  é chamado de “evento impossível”<sup>21</sup>.

Deve ser observado que o conjunto evento possuirá apenas elementos que pertençam previamente ao espaço amostral. No caso do evento impossível, vale lembrar que o conjunto vazio é considerado subconjunto de qualquer conjunto. As probabilidades analisadas neste trabalho serão relativas aos casos em que os experimentos aleatórios determinam espaços amostrais cujos elementos são de ocorrência igualmente provável.

A probabilidade de um evento  $A$  em um espaço amostral  $\Omega$ , com  $n(A)$  representando o número de elementos do conjunto evento  $A$  e  $n(\Omega)$  representando o número de elementos do espaço amostral  $\Omega$ , será calculada pela razão:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

<sup>20</sup>O exemplo dado pela tabela 11 é o de um evento certo, pois a probabilidade de encontrar um elemento de semente lisa é de 100%. Todos os elementos possuem sementes lisas [genótipo Rr].

<sup>21</sup>Um evento impossível, dado o espaço amostral anterior, e a obtenção de elemento com semente rugosa, já que não existe tal possibilidade em um universo de indivíduos apenas com sementes lisas.

Um exemplo desse tipo de cálculo pode ser visto no problema a seguir.

*Problema:* Uma dissertação de mestrado tem as suas 100 folhas impressas e numeradas apenas na face da frente. Qual a probabilidade de abrir essa dissertação e observar um número múltiplo de 11 impresso na página?

*Resolução:* O número de elementos do espaço amostral é 100. Os múltiplos de 11 entre 1 e 100 são: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99.

Sendo assim, tem-se:  $n(\Omega) = 100$  e  $n(A) = 9$ . Daí, a probabilidade pedida é:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{100} \text{ ou } 0,09 \text{ ou } 9\%.$$

A probabilidade do evento impossível é zero e do evento certo é 1, pois no primeiro caso,  $n(A) = 0$  e no segundo  $n(A) = n(\Omega)$ . Dessa forma:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Se  $A$  é um evento em um espaço amostral  $\Omega$ , o evento formado pelo conjunto complementar de  $A$  em relação ao mesmo espaço amostral  $\Omega$  será denominado por  $\bar{A}$ . A probabilidade do evento complementar será:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Nesse caso: 1 representa a probabilidade de todo o espaço amostral [probabilidade do evento certo].

No exemplo anterior, o evento  $\bar{A}$  é composto pelos números que não são múltiplos de 11. Assim,  $n(\bar{A}) = 91$ . Logo, a probabilidade de  $\bar{A}$  será igual a  $\frac{91}{100}$  ou 0,91 ou 91%.

Essa probabilidade também poderia ser calculada fazendo:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,09 = 0,91 \text{ ou } \frac{91}{100} \text{ ou } 91\%$$

Retornando ao exemplo da tabela 12, podemos observar que existem 3 possibilidades de encontrar elementos com semente lisa [RR, Rr, Rr] e 1 possibilidade de encontrar elementos de semente rugosa [rr] em relação ao total de genótipos possíveis - espaço amostral [RR, Rr, Rr e rr]. Diz-se então que existe a probabilidade de encontrar um elemento de semente rugosa em relação ao espaço amostral dado, o que se representa na

forma de razão pelo número fracionário  $\frac{1}{4}$ , que também pode ser expresso na forma decimal pelo número 0,25 ou 25%. Já a probabilidade de encontrar um elemento de semente lisa dentro do espaço amostral dado é  $\frac{3}{4}$ , que também pode ser expresso na forma decimal pelo número 0,75 ou 75%.

Caso se chame de  $p(A) = \frac{1}{4}$  a probabilidade de obter semente lisa,  $p(\overline{A}) = \frac{3}{4}$  será a probabilidade de obter elemento com semente rugosa. Assim, como  $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ , tem-se  $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ .

Quando a ocorrência de um evento  $A$  não influencia a ocorrência de outro evento  $B$ , eles são chamados de eventos independentes. O produto de probabilidades aplica-se ao caso em que o experimento é composto por duas ou mais etapas que não se influenciam mutuamente. Nesses casos, os eventos podem ocorrer de forma simultânea ou sucessiva. Um exemplo desse cálculo é apresentado no problema a seguir.

*Problema:* Um dado de quatro faces é lançado junto com uma moeda. Ambos não são viciados. Qual a probabilidade de obter número par no dado e cara na moeda?

*Resolução:* O espaço amostral descrito na tabela a seguir tem oito elementos e o evento [obter número par] tem dois, que são as duplas  $2K$  e  $4K$ . Assim, a probabilidade pedida é  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$  ou 0,25 ou 25%. Essa probabilidade também poderia

ser calculada levando em conta que dar número par no dado é  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  e a

probabilidade de dar cara na moeda é de  $\frac{1}{2}$ . Se essas duas probabilidades forem

multiplicadas, o resultado será:  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

**Tabela 13:** Os possíveis resultados para o lançamento de um dado tetraédrico e uma moeda normal.

<b>Nº do dado</b>	1	1	2	2	3	3	4	4
<b>Face da moeda</b>	K	C	K	C	K	C	K	C

K representa cara e C representa coroa.

Se  $A$  e  $B$  são dois eventos independentes dentro do mesmo espaço amostral, a probabilidade de ocorrerem os dois eventos é  $p(A) \cdot p(B)$ . A ocorrência de cara poderia ser considerada anterior à ocorrência de número par e vice-versa, o que não influencia o resultado da probabilidade.

O produto de probabilidades pode ser aplicado no cálculo da probabilidade de obter uma semente verde e lisa, conforme o exemplo da figura 38. A probabilidade de obter um elemento de semente lisa no espaço amostral da figura 38 é  $\frac{12}{16}$  ou  $\frac{3}{4}$ . A probabilidade de obter um elemento de semente verde no espaço amostral da figura 38 é  $\frac{4}{16}$  ou  $\frac{1}{4}$ . Assim, a probabilidade de obter semente lisa e verde a partir do espaço amostral da figura 38 é  $\frac{3 \times 1}{4 \times 4}$  ou  $\frac{3}{16}$  ou 0,1875 ou 18,75%.

Quando se trata do número de elementos da união de dois conjuntos  $A$  e  $B$ , deve ser considerado se eles têm ou não interseção vazia. Quando os eventos  $A$  e  $B$  são tais que  $A \cap B = \phi$ , diz-se que eles são mutuamente exclusivos. No caso de interseção vazia, ou seja,  $A$  e  $B$  mutuamente exclusivos,  $n(A \cup B)$  é simplesmente  $n(A) + n(B)$ , sendo  $n(A)$  o número de elementos de  $A$ ,  $n(B)$  o número de elementos de  $B$  e  $n(A \cup B)$  o número de elementos da união de  $A$  e  $B$ . Se  $A \cap B \neq \phi$ , ou seja, se  $A$  e  $B$  não são mutuamente exclusivos, tem-se  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ . Assim, no caso da união de dois eventos de interseção não vazia,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Um cálculo de probabilidade da união pode ser retirado do exemplo anterior, do livro de 100 folhas.

*Problema:* Qual seria a probabilidade de abrir a dissertação em uma página que possui um número múltiplo de 20 ou de 30?

*Resolução:* Os múltiplos de 20 são 20, 40, 60, 80 e 100. Os múltiplos de 30 são 30, 60 e 90. Tem-se:  $p(A) = \frac{5}{100}$ ,  $p(B) = \frac{3}{100}$  e  $p(A \cap B) = \frac{1}{100}$ , pois  $A \cap B = \{60\}$ . Assim, tem-se:  $p(A \cup B) = \frac{5}{100} + \frac{3}{100} - \frac{1}{100} = \frac{5+3-1}{100} = \frac{8-1}{100} = \frac{7}{100}$  ou 0,07 ou 7%.

Voltando ao exemplo da figura 38, alguns fatos podem ser analisados com o auxílio dos últimos elementos de probabilidades. A probabilidade de obter-se um elemento de semente lisa no espaço amostral da figura 38 é  $\frac{12}{16}$  ou  $\frac{3}{4}$  e a probabilidade de obter-se um elemento de semente verde no espaço amostral da figura 38 é  $\frac{4}{16}$  ou  $\frac{1}{4}$ . A probabilidade de obter-se semente lisa e verde a partir do espaço amostral da figura 38 é  $\frac{3 \times 1}{4 \times 4}$  ou  $\frac{3}{16}$ . Dessa forma, a probabilidade de obter-se semente verde ou lisa de acordo com o espaço amostral da figura 38 é  $\frac{12}{16} + \frac{4}{16} - \frac{3}{16} = \frac{12+4-3}{16} = \frac{16-3}{16} = \frac{13}{16}$ . O resultado obtido exclui as três sementes amarelas e rugosas do espaço amostral da figura 38.

Em decorrência de alguma informação dada no enunciado de um problema de probabilidade, podem ocorrer determinadas restrições no espaço amostral, o que diminui o total de elementos do mesmo. Nesse caso, diz-se estar diante de uma probabilidade condicional.

A probabilidade condicional também é conteúdo matemático utilizado em estudos de Genética. Um exemplo pode ser dado através de uma questão extraída de um vestibular da Fuvest [sem data] (LOPES, 2001, p. 428).

*Questão:* Uma planta heterozigota de ervilhas com vagens infladas produziu, por autofecundação, descendência constituída por dois tipos de indivíduos, com vagens infladas e com vagens achatadas.

- Tomando ao acaso um desses descendentes, qual a probabilidade de ele ser heterozigoto?
- Tomando ao acaso um descendente com vagens infladas, qual a probabilidade de ele ser homozigoto?

*Resolução:* O item *a* é de resolução trivial. Trata-se de analisar um cruzamento do tipo  $Aa \times Aa$  na geração parental. A característica dominante (A) é a vagem inflada. A característica recessiva (a) é vagem achatada. Os indivíduos  $AA$  ou  $Aa$  terão

aparência inflada. Os indivíduos *aa* terão aparência achatada. A proporção obtida é  $\frac{1}{4}AA : \frac{2}{4}Aa : \frac{1}{4}aa$  na geração  $F_1$ . Logo, a resposta é  $\frac{2}{4}$  ou  $\frac{1}{2}$  ou 50%.

Na resolução da letra *b*, a análise envolve a condição de que o descendente tem vagem inflada. É um exemplo de probabilidade condicional. Para esses casos, é mais simples compreender a resolução a partir da restrição no espaço amostral, do que utilizar a simbologia apresentada em manuais para ensino de Matemática no nível médio. Deve ser lembrado que a característica dominante é vagem inflada e a característica recessiva é vagem achatada. Dado que a característica de ter a vagem inflada é a condicionante da pergunta da letra *b*, deve-se retirar do espaço amostral os indivíduos *aa*. No novo espaço amostral formado devido à condição dada, tem-se  $\frac{1}{3}AA : \frac{2}{3}Aa$ . Como é pedida a probabilidade de encontrar indivíduo homozigoto, a resposta é  $\frac{1}{3}$  ou 33,33%.

#### **4.3.4. Estatística e Frequência no estudo de genética de populações**

Para realizar o levantamento de dados, podem ser definidas variáveis segundo as quais eles serão classificados. Existem variáveis que exprimem atributos particulares do objeto pesquisado, que são chamadas de qualitativas e outras que exprimem quantidades e podem ser expressas por números, que são chamadas de quantitativas. No caso dos estudos de probabilidades, tanto as variáveis qualitativas quanto as quantitativas podem ser envolvidas no mesmo problema.

Um exemplo de envolvimento de estatísticas em problemas de probabilidade pode ser o apresentado a seguir, adaptado de lezzi et al (2001, p. 7-8).

*Exemplo:* A fim de ter um perfil de seu “público” nos finais de semana, o proprietário de um cinema contratou dois pesquisadores para coletar dados referentes à sua clientela. Os pesquisadores escolheram seis objetos de estudo: sexo, idade, nível de escolaridade, estado civil, renda mensal e meio de transporte utilizado para chegar ao cinema. Num final de semana, foram entrevistados vinte freqüentadores desse cinema. Os resultados estão apresentados na tabela 14.

**Tabela 14:** Apresenta os dados relativos a uma pesquisa, suas variáveis quantitativas e qualitativas (extraída de lezzi et al, 2001, p. 8).

Sexo	Idade	Nível de escolaridade*	Estado civil	Transporte	Renda mensal (salários mínimos)
M	28	M	CAS	CARRO	11,8
M	38	M	CAS	CARRO	13,9
F	24	S	SOL	CARRO	12,4
M	43	M	CAS	CARRO	19,5
F	32	S	SEP	ÔNIBUS	12,1
F	19	M	SOL	A PÉ	5,0
M	22	S	SOL	ÔNIBUS	8,9
M	25	M	SOL	ÔNIBUS	13,3
M	41	S	CAS	A PÉ	14,7
F	40	F	SOL	CARRO	16,6
F	35	S	SOL	CARRO	9,3
M	29	F	CAS	CARRO	11,6
M	31	F	SEP	CARRO	10,2
F	36	S	SOL	CARRO	16,0
F	48	M	CAS	CARRO	18,8
F	23	M	CAS	A PÉ	15,4
M	27	S	SOL	A PÉ	10,7
M	26	S	SOL	ÔNIBUS	8,2
M	29	S	SEP	ÔNIBUS	12,5
M	30	F	CAS	CARRO	7,6

Legenda:

F representa Ensino Fundamental,

M representa Ensino Médio;

S representa Ensino Superior.

A tabela 14 apresenta duas variáveis quantitativas [idade e renda mensal] e quatro variáveis qualitativas [sexo, nível de escolaridade, estado civil e transporte].

Ao analisar uma variável, pode-se contabilizá-la apenas pela sua frequência absoluta  $[n_i]$ , que indica o número de vezes que ela é preenchida. Contudo, a frequência absoluta pode não ser muito significativa para analisar os dados, pois não permite uma comparação com o universo estudado. Para os casos em que deve ser feita a comparação com o universo de dados, utiliza-se a frequência relativa  $[f_i]$ . A frequência relativa é calculada a partir do quociente entre a frequência absoluta e o total de observações realizadas  $[n]$ , ou seja:

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Um exemplo do cálculo de  $f_i$  é apresentado em lezzi et al (2001, p. 10) e refere-se ao estado civil.

**Tabela 15:** Apresenta os dados relativos ao estado civil dos freqüentadores de um cinema (extraída de lezzi et al, 2001, p. 10).

Estado Civil	Freqüência absoluta ( $n_i$ )	Freqüência relativa ( $f_i$ )	Porcentagem
SOL	9	9/20	45%
CAS	8	8/20	40%
SEP	3	3/20	15%
TOT.	20	1,00	100%

A partir dos dados da tabela 15, por exemplo, a probabilidade de encontrar um freqüentador casado é de 40% [8 elementos em 20 pesquisados].

Voltando à tabela 14, ela também pode ser utilizada para calcular uma probabilidade condicional. Se, por exemplo, alguém quiser saber quantas pessoas são casadas, desde que sejam do sexo masculino, pode verificar que:

- São 13 pessoas do sexo masculino;
- Dos elementos do sexo masculino, 6 são casados.

Assim, a probabilidade pedida é  $p = \frac{6}{13}$  ou 0,4615. Isso dá aproximadamente 46,15% de entrevistados casados entre os homens.

A **freqüência gênica** é a probabilidade de encontrar determinado gene em uma determinada população. O usual nos livros de Biologia é apresentar a freqüência gênica de um alelo  $A$ , que ocupa determinado locus, utilizando a razão:

$$\text{Freqüência gênica} = \frac{\text{n}^\circ \text{ total desse gene}}{\text{n}^\circ \text{ total de gene para aquele locus}}$$

Representando simbolicamente, pode-se escrever a mesma razão na forma:

$$f(A) = \frac{n(g)}{n(\ell)}$$

Nessa razão,  $n(g)$  representando o número total de um determinado gene e  $n(\ell)$  o número total de genes que ocupam um determinado locus.

Exemplo: Foi realizada uma pesquisa a respeito da ocorrência de determinado gene. Suponha que esse gene tenha sido encontrado em indivíduos de uma população de acordo com a tabela 16 que representa a sua incidência na população estudada.

**Tabela 16:** Incidência de um determinado gene em uma população (extraído de LOPES, 2001, p. 511).

Genótipo encontrado	Nº de indivíduos pesquisados
AA	3600
Aa	6000
aa	2400
Total	12000

O número de genes *A* presentes em 3600 indivíduos *AA* é 7200, pois cada um é portador de dois alelos *A*, resultando em  $3600 \times 2 = 7200$ . O número de genes *A* presentes em 6000 indivíduos *Aa* é 6000, pois cada um é portador de um alelo *A*, resultando em  $6000 \times 1 = 6000$ . Assim, o total de genes *A* é de 13200 [7200 + 6000]. O número de genes na população é 24000 [12000 indivíduos, cada um deles portador de dois alelos, o que dá  $12000 \times 2 = 24000$ ]. Assim  $f(A) = \frac{13200}{24000} = 0,55$  ou 55%. O que se calculou foi a frequência relativa do gene *A* em uma população. A tabela apresenta a frequência absoluta do gene *A*, na população pesquisada.

A frequência de *a* será  $1 - 0,55 = 0,45$  ou 45%. O total de 45% para o gene *a* é a probabilidade complementar da que se obteve para o gene *A*.

A **freqüência genotípica** é a probabilidade de encontrar determinado genótipo em uma determinada população. O usual nos livros de Biologia é apresentar a frequência genotípica de um gene em uma determinada população utilizando a razão:

$$\text{Frequência genotípica} = \frac{\text{Número de indivíduos com um determinado genótipo}}{\text{Número de indivíduos da população}}$$

Representando simbolicamente, pode-se escrever a mesma razão na forma

$$\text{freqüência genotípica} = \frac{n(i)}{n(I)}$$

sendo  $n(i)$  o número de indivíduos em uma população com determinado genótipo e  $n(I)$  o número de indivíduos de uma população. Na população listada na tabela anterior, tem-se:

- A frequência genotípica de AA é  $\frac{3600}{12000} = 0,30$  ou 30%.
- A frequência genotípica de Aa é  $\frac{6000}{12000} = 0,50$  ou 50%.
- A frequência genotípica de aa é  $\frac{2400}{12000} = 0,20$  ou 20%.

O século XX foi o do surgimento da ciência que trata da hereditariedade. Em 1900, último ano do século XIX, as leis formuladas por Mendel sobre a herança de caracteres foram redescobertas.

Os botânicos Karl Correns [alemão], Hugo De Vries [holandês] e Erich von Tschermak-Seysenegg [austríaco] realizaram experiências de cruzamentos utilizando plantas e chegaram independentemente às mesmas conclusões que Mendel.

Godfrey Harold Hardy (1877-1947) foi um matemático inglês que, num trabalho independente ao do médico alemão Wilhelm Weinberg elaborou, em 1908, a lei conhecida pelo nome de **teorema de Hardy-Weinberg ou princípio do equilíbrio gênico**. Hardy era um matemático que trabalhava com Matemática “pura” e não esperava que os resultados por ele obtidos pudessem ter aplicações práticas. Seu mérito consiste em ter provado que as frequências dos genótipos não sofrem alterações ao longo de gerações, devido aos mecanismos de herança descobertos por Mendel. A princípio, Hardy pensou que sua descoberta não fosse de grande importância. Por sua vez, Weinberg, um médico alemão, que pesquisava a herança da potencialidade da geração de gêmeos na espécie humana, chegou às mesmas conclusões do matemático inglês.

Uma população é considerada em equilíbrio genético quando for infinitamente grande, isenta de fatores evolutivos tais como mutações, seleção natural e migrações de indivíduos. Acrescente-se ainda que cada cruzamento entre os indivíduos deve se dar ao acaso. Cabe comentar que, na prática, não existem populações rigorosamente dentro dessas condições. De acordo com o Teorema de Hardy-Weinberg, se as três condições acima são cumpridas, a frequência gênica e a genotípica, ao longo de gerações, permanecem constantes. Segundo Lopes (2001, p. 512) a importância desse teorema

[...] está no fato de ele estabelecer um modelo para o comportamento dos genes. Desse modo, é possível estimar freqüências gênicas e genotípicas ao longo de gerações e compará-las com as obtidas na prática [...] se os valores não diferem significativamente, pode-se concluir que a população está em equilíbrio e que, portanto, não está evoluindo.

Suponha a existência de um gene  $V$  e de seu correspondente  $v$ . Por convenção dos biólogos, a freqüência de gametas portadores de  $V$  é chamada de  $p$  e a freqüência de gametas portadores de  $v$  é  $q$ . Os possíveis genótipos a serem formados são  $VV$ ,  $Vv$  e  $vv$ . Sejam as seguintes probabilidades de ocorrência:

a)  $VV$  é  $p \times p = p^2$ , com um óvulo portador de  $V$  fecundado por um espermatozóide portador de  $V$ ;

b)  $vv$  é  $q \times q = q^2$ , com um óvulo portador de  $v$  fecundado por um espermatozóide portador de  $v$ ;

c)  $Vv$  é  $p \times q$ , com um óvulo portador de  $V$  fecundado por um espermatozóide portador de  $v$  ou com um óvulo portador de  $v$  fecundado por um espermatozóide portador de  $V$ . Assim, ocorrerão:

$VV$	$\longleftrightarrow$	$p^2$
$vv$	$\longleftrightarrow$	$q^2$
$2Vv$	$\longleftrightarrow$	$2pq$

Os valores obtidos nas probabilidades acima correspondem ao desenvolvimento da expressão:

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

Como a freqüência  $a$  de um gene  $V$  e a freqüência  $b$  do gene alelo  $v$  são tais que  $p + q = 1$ , ocorrerá  $(p+q)^2 = 1$ . Assim, se a freqüência gênica de  $V$  for 0,8, a freqüência gênica de  $v$  será 0,2. Desta forma:  $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$  corresponderá a  $(0,8)^2 + 2.(0,8).(0,2) + (0,2)^2$ , o que representará 64% de  $VV$ , 32% de  $Vv$  e 4% de  $vv$ .

Se a população em que ocorrem essas frequências não passarem por significativas alterações, ela pode ser considerada em equilíbrio genético, ou seja, não está evoluindo.

#### 4.3.5 Binômio de Newton e triângulo de Pascal no estudo de genética

Para cada potência do binômio  $(a+b)$ , o desenvolvimento de expoente  $n$  é realizado para valores inteiros e positivos desse expoente. As potências do desenvolvimento de  $(a + b)^n$  são conhecidas como os termos da expansão do **Binômio de Newton**. Alguns casos são listados abaixo.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

Os coeficientes das expansões, agrupados por linha, dão a seguinte configuração:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \end{array}$$

Essa configuração é conhecida no ocidente pelo nome de **triângulo de Pascal**.

As linhas do triângulo de Pascal podem ser numeradas de  $0$  até  $n$  e as colunas de  $0$  até  $p$ . Analisado por linhas e colunas, o triângulo de Pascal fica com o aspecto da figura 39 a seguir:

Figura 39

n = 0	__	1				
n = 1	__	1	1			
n = 2	__	1	2	1		
n = 3	__	1	3	3	1	
n = 4	__	1	4	6	4	1
		p=0	p=1	p=2	p=3	p=4

**Fig. 39:** A organização das linhas do triângulo de Pascal a partir da numeração de suas linhas e colunas.

É importante notar que o triângulo de Pascal pode ser formado sem a necessidade do desenvolvimento dos termos do binômio de Newton, conforme apresentado na figura 40.

Figura 40

1					
1	+	↓	1		
1	+	↓	2	+	↓
1	+	↓	3	+	↓
1	+	↓	4	+	↓
			6	+	↓
				4	+
					1

**Fig. 40:** A soma de um elemento de uma linha do triângulo de Pascal, com o elemento à sua direita na mesma linha, é igual ao elemento que está abaixo do segundo número que foi adicionado.

Outro fato importante é que a soma dos elementos da linha  $n$  do triângulo de Pascal é igual a  $2^n$ , conforme pode se visto na figura 41.

Figura 41

n = 0	__	1	$(S = 1 = 2^0)$				
n = 1	__	1	+ 1	$(S = 1 + 1 = 2 = 2^1)$			
n = 2	__	1	+ 2	+ 1	$(S = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2)$		
n = 3	__	1	+ 3	+ 3	+ 1	$(S = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3)$	
n = 4	__	1	+ 4	+ 6	+ 4	+ 1	$(S = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4)$

**Fig 41:** o triângulo de Pascal e a apresentação das somas dos elementos das suas linhas.

A partir da constatação da existência da relação entre os elementos do triângulo e os números binomiais, outra forma de escrever o triângulo de Pascal, conforme a figura 42.

Segundo Antar Neto et al (1979), o triângulo de Pascal recebeu esse nome porque Blaise Pascal, matemático e filósofo francês do século XVII publicou essa configuração no seu trabalho “Traité du triangle arithmétique”, em 1653. Porém, esse triângulo já era conhecido na Europa, aparecendo na aritmética do astrônomo Petrus Apianus no século XVI. Há notícias de que Omar Khayam já conhecia esse triângulo por volta de 1100. Também há notícia de que um matemático chinês já havia apresentado o triângulo em um livro editado no ano de 1303.

**Figura 42**

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}
 \end{array}$$

**Fig. 42:** Em cada linha os numeradores dos números binomiais têm o mesmo valor e as classes são crescentes a partir de zero. Em cada coluna, os numeradores são crescentes a partir de zero e as classes são constantes.

A distribuição binomial da probabilidade é aplicada aos casos em que uma experiência é repetida diversas vezes e sob as mesmas condições, sempre na busca de um mesmo evento, que por sua vez possui sempre a mesma probabilidade de ocorrer.

No caso de cálculos que envolvem a distribuição binomial de probabilidades,  $p(A)$  representa a probabilidade do evento procurado e  $p(\bar{A})$  representa a probabilidade do evento complementar à ocorrência do evento  $A$ .

O problema a seguir é um exemplo de distribuição binomial no cálculo de probabilidade.

*Problema:* Um dado normal de seis faces é lançado cinco vezes consecutivas. Qual a probabilidade de obter o número quatro três vezes?

*Resolução:* Chamando de  $p(A)$  a probabilidade de obter o número quatro, o valor dessa probabilidade será  $p(A) = \frac{1}{6}$ . O evento complementar do evento  $A$ ,  $p(\bar{A})$ , é não obter o número quatro. Assim,  $p(\bar{A}) = \frac{5}{6}$ . Como obter quatro e não obter quatro são eventos independentes, uma possível seqüência de cinco lançamentos seria:

$$p(A) \cdot p(A) \cdot p(A) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

Porém o enunciado do problema não fixa a seqüência de ocorrências dos resultados. Levando em consideração que são cinco lançamentos da moeda e que deverá ocorrer o mesmo resultado três vezes, a tabela 17 a seguir indica em quais lançamentos pode aparecer o resultado pedido.

**Tabela 17:** As possíveis seqüências que podem ser obtidas no lançamento de um dado, na tentativa de obter o mesmo resultado três vezes.

1 <sup>o</sup>	X	X	X	X	X	X				
2 <sup>o</sup>	X	X	X				X	X	X	
3 <sup>o</sup>	X			X	X		X	X		X
4 <sup>o</sup>		X		X		X	X		X	X
5 <sup>o</sup>			X		X	X		X	X	X

A probabilidade total da ocorrência de três resultados iguais a quatro em cinco lançamentos sucessivos seria:

$$10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \times \frac{1 \times 4^2}{5^5} = \frac{2 \times 4^2}{5^4} = \frac{32}{625} \text{ ou } 0,0512 \text{ ou } 5,12\%.$$

Como cada ocorrência do resultado quatro não tem posição fixa, as suas três ocorrências se enquadram na qualidade de combinação de cinco elementos agrupados de três em três, que dá  $C_{5,3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 = \binom{5}{3}$ .

Uma notação para utilizar em problemas que envolvem a distribuição binomial  $P$  de uma probabilidade com  $n$  repetições do mesmo experimento, ocorrendo o evento  $A$   $k$  vezes, sendo  $\bar{A}$  o seu evento complementar é:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p(\bar{A})^{n-k} \cdot p(A)^k$$

Em Soares (1999, p. 366-367) é apresentada uma aplicação da distribuição binomial da probabilidade. É perguntada qual a probabilidade de um casal que pretende ter cinco filhos, sendo três homens e duas mulheres. O autor inicia a resolução calculando o número de combinações de cinco elementos agrupados de três em três, que dá resultado idêntico quando esses mesmos elementos são agrupados de dois em dois  $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ . Em seguida, é aplicada a regra do cálculo da probabilidade de eventos independentes. Como a probabilidade de nascer menino é  $\frac{1}{2}$  [mesma probabilidade de nascer menina], a probabilidade de uma seqüência de cinco nascimentos resulta em  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$ . O autor enuncia que são dez possibilidades, que ele chama de isoladas. Assim, a probabilidade de uma seqüência de cinco nascimentos é multiplicada por dez, obtendo  $\frac{10}{32}$ .

O resultado anterior também pode ser explicado pela utilização do Triângulo de Pascal. O coeficiente utilizado para multiplicar  $\frac{1}{32}$  será encontrado na linha  $n$ , com  $n = 5$ . Os elementos dessa linha correspondem, na ordem a:

- 1: agrupamento de zero homem;
- 5: agrupamento de um homem;
- 10: agrupamento de dois homens;
- 10: agrupamento de três homens;
- 5: agrupamento de quatro homens;
- 1: agrupamento de cinco homens.

O cálculo dessa probabilidade pode então ser realizado utilizando a relação:

$$\binom{n}{k} \cdot p(h) \cdot p(\bar{h}), \text{ com os seguintes significados:}$$

$n$ : nº de repetições do fenômeno estudado [no caso, nascimentos];

$k$ : nº de homens que devem nascer;

$p(h)$ : probabilidade do nascimento de homem;

$p(\bar{h})$ : probabilidade do evento contrário ao nascimento de homens [no caso, nascimentos de mulheres].

Esse é um exemplo da possibilidade de unir assuntos de dois campos de estudos [a Biologia e a Matemática] em um mesmo contexto com o enriquecimento de ambas as disciplinas.

#### **4.3.6 Cálculo dos fenótipos e a herança quantitativa**

O termo herança quantitativa, de acordo com Soares (1999) refere-se à análise de uma forma de herança gênica que tem determinadas características particulares. Herança quantitativa também recebe os nomes de polimeria de genes cumulativos ou aditivos e ainda herança multifatorial ou poligenes.

Nos estudos de herança quantitativa são analisadas as interações dos genes que, aos pares, modificam a aparência do fenótipo a partir da quantidade em que são envolvidos. Segundo Soares (1999, p. 399), existe gradação de fenótipos “[...] em função de uma relação entre o número de genes dominantes e do de genes recessivos nos diferentes genótipos dos indivíduos [...]”. No caso são analisadas as influências das quantidades dos genes e “esse fenômeno justifica as numerosas e discretas variações individuais em certos caracteres, como a estatura, o peso [...] bem como a cor da pele na espécie humana [...]”. Na página 399, o autor apresenta uma tabela [tabela 18 a seguir] dos fenótipos humanos e os respectivos genes para a cor da pele humana. O autor chama a atenção para o fato de ser

[...] discutível falar-se em genes dominantes e genes recessivos na herança quantitativa [...] seria mais correto dizer que, neste caso, o fenótipo depende da relação numérica entre os **genes expressivos do caráter** e os **genes não-expressivos do caráter** (p. 399, negritos do autor).

**Tabela 18:** A herança poligênica e a influência na cor de pele humana, na hipótese de Davenport, restrita à cor da pele, sem descrever outras características (SOARES, p. 399).

GENÓTIPOS	FENÓTIPOS
SSTT	Negro
SSTt SsTT	Mulato escuro
SStt ssTT SsTt	Mulato médio
Ss tt ssTt	Mulato claro
sstt	Branco

Charles Davenport foi um biólogo americano e cientista que propagou as idéias da Eugenia. Para os partidários da Eugenia, existe a idéia da criação de uma raça perfeita. Um dos estudos de Davenport é sobre a cor da pele humana. De acordo com a hipótese de Davenport, para a pele ser de cor negra, é necessário haver quatro genes responsáveis pela produção de pigmento. De acordo com a presença de genes, existe uma graduação até o genótipo responsável pela cor branca. O autor fala em efeito “somativo”, sendo provável que a cor da pele seja determinada por mais genes, mas o modelo proposto por ele continua aceito de forma geral.

Uma ligação da Matemática com a herança quantitativa é o cálculo do número de fenótipos diferentes na geração  $F_2$ . O total de fenótipos diferentes na geração  $F_2$  é igual ao número de genes envolvidos, mais um. No exemplo da cor humana são quatro genes (ou dois pares) responsáveis pela cor da pele e cinco fenótipos (ou dois pares mais um). Se um caráter for determinado por três pares de genes, serão sete fenótipos e assim por diante. Denominando por  $x$  o número de pares de genes e por  $y$  o número de fenótipos, a relação entre esses valores será:

$$y = 2x + 1$$

Existem problemas relativos à herança quantitativa em que não é fornecido o número de fenótipos diferentes em  $F_2$ . Nesse caso, deve ser lembrado que o número de indivíduos com manifestação de caráter [expressividade máxima ou mínima] que são homocigóticos para todos os pares na geração  $F_2$  pode ser obtido a

partir da razão  $\frac{1}{4^n}$ , com  $n$  representando o número de pares de genes envolvidos.

Como exemplo, Soares (1999, p. 400) apresenta a situação em que determinada espécie de coelhos tem alguns indivíduos com orelhas medindo 10cm de comprimento e outros 5cm. Uma geração  $P$  formada por esses dois tipos de indivíduos, ao ser cruzada resulta numa geração  $F_1$  em que todos os elementos têm orelhas com 7,5cm de comprimento. Do cruzamento endogâmico dessa geração  $F_1$  vem a geração  $F_2$ , em que as orelhas dos indivíduos têm comprimento variando de 5cm a 10cm. Nessa última geração nasceram 1024 indivíduos, sendo quatro deles com orelhas de 5cm. Pede-se para calcular o número de pares de genes envolvidos nesse caso de herança quantitativa. A resolução é feita a partir da proporção:

$$\frac{4}{1024} = \frac{1}{4^n} \Rightarrow 4^n = 256 \Rightarrow n = 4$$

Logo, são quatro pares de genes envolvidos, oito genes no total. Como são quatro pares de genes, tem-se:  $2 \times 4 + 1 = 8 + 1 = 9$  fenótipos diferentes.

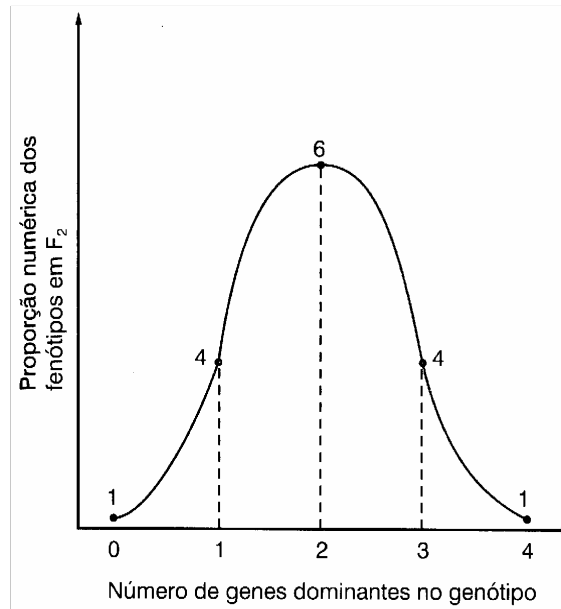
Ao contrário dos casos de dominância e co-dominância, a proporção fenotípica de  $F_2$  não é na forma  $9 : 3 :: 3 : 1$ . Essas proporções estão representadas por pontos da curva sinusóide. Se forem, por exemplo, dois pares de genes cumulativos, a proporção será  $1 : 4 : 6 : 4 : 1$ . No caso de três pares de genes cumulativos a proporção será  $1 : 6 : 15 : 20 : 15 : 6 : 1$ . Essas proporções são os elementos da linha  $n$  do Triângulo de Pascal.

No primeiro exemplo são os elementos da linha 4 ( $2 \times 2$ ) e representam os números binomiais  $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ . No segundo exemplo, são os elementos da linha 6

( $3 \times 2$ ) e representam os números binomiais  $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}, \binom{6}{6}$ .

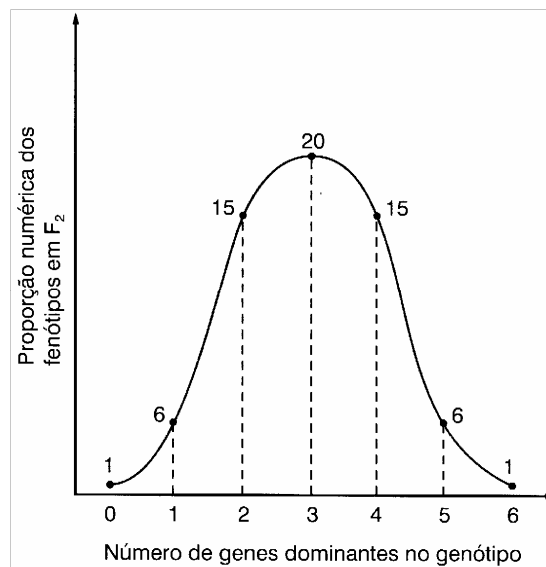
Os números binomiais apresentados são representados pelas curvas a seguir:

Figura 43



**Fig 43:** Este seria o gráfico referente aos fenótipos no caso da pele humana ser determinada por três pares de alelos cumulativos (extraído de SOARES, 1999, p. 401).

Figura 44



**Fig. 44:** A curva representando os valores referentes a dois pares de genes cumulativos responsáveis pela cor de pele, variando de um negro até um branco, com a quantidade central representando o total de mulatos médios (extraído de SOARES, 1999, p. 401).

A apresentação dos números binomiais a partir da curva sinusóide pode facilitar a percepção da distribuição dos genes dominantes que formam um genótipo.

Neste capítulo foram apresentados temas com possibilidade de aproximar conteúdos de diferentes disciplinas científicas. Os próprios saberes de Biologia, Física, Matemática e Química são propícios a tentativas de aproximar saberes e permitem aos professores planejar suas ações didáticas a partir de temas dos seus próprios campos de trabalho por existirem elementos comuns e passíveis de enredamento. Tais temas são próximos e podem dar oportunidade ao surgimento de novos significados às fronteiras existentes entre campos científicos separados ao longo dos anos de pesquisa científica. Uma proposta para o ensino de Ciências no Ensino Médio pode abarcar temas dos campos científicos citados sem a necessidade de se forçar a busca de contextos para ensino fora dos saberes de cada área.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ruptura entre a produção e o ensino dos saberes matemáticos, levou à necessidade de criar técnicas para comunicar os temas da Matemática aos aprendizes, sem que, entretanto, estes últimos participassem ativamente da elaboração de novos conhecimentos. Desde a Grécia Antiga, o conhecimento utilitário, já existente no Egito e Mesopotâmia, foi organizado na criação e no aprofundamento de teorias. Além de impregnado pela dialética. O conhecimento matemático da época da Grécia Antiga, eminentemente teórico, não se voltava para a prática, sendo utilizado como apenas como instrumento de desenvolvimento da capacidade de raciocinar abstratamente. Esses dois aspectos criaram, já na antiguidade, a imagem da Matemática como Ciência que tratava de elementos ideais e dessa forma pouca serventia teria para tratar de diferentes aspectos da realidade. Após um período de quase estagnação na Europa, durante e Idade Média, a produção e o ensino da Matemática ganharam novo impulso na época das grandes navegações, com a retomada do comércio e o incremento de atividades industriais. A partir da revolução científica, a Matemática se fortalece como instrumento de representação do mundo, passando a ser tratada como Ciência precisa e neutra diante dos fatos que descreve, saindo da condição de elemento secundário a campo de saber cada vez mais importante. Paralelamente a Matemática impregna novos campos de investigação emergentes, tais como a Física, a Química, e a Biologia. Na onda de revisão dos fundamentos, iniciada no século XIX, buscou-se a organização da Matemática como um corpo de conhecimento científico formal. Foi estabelecida definitivamente a primazia do pensamento abstrato em relação à ação sobre objetos reais, influenciando, inclusive, as aplicações da Matemática à Educação, na qual essa Ciência ainda é abordada de forma abstrata e sem qualquer vinculação com a realidade dos estudantes.

Nos diferentes campos de conhecimento, a crescente organização disciplinar da pesquisa e do ensino teve como conseqüências imediatas a divisão e a especialização do trabalho científico, que também estabeleceu fronteiras rígidas entre especialidades na Educação. Com o passar do tempo, o conhecimento fragmentado e simplificado mostrou-se insuficiente frente à complexidade, pois ao subdividir e fragmentar problemas complexos garante-se a compreensão das partes,

mas a junção dos fragmentos não é garantia da compreensão do todo. A especialização, que possibilitou o desenvolvimento das Ciências, também levou à formação de professores de acordo com princípios científicos fragmentados. A disciplinaridade instaurou-se como uma das tradições da Educação brasileira e ainda é obstáculo às tentativas de mudança. A organização disciplinar permanece vinculada à formação de professores, que são direcionados por essa modalidade de ensino desde o início da sua vida escolar.

O ensino disciplinarizado não considera possibilidades de articulações entre temas de áreas distintas. No Brasil a persistência do pensamento disciplinar trata a Biologia, a Física, a Química e a Matemática como disciplinas incapazes de articulações entre seus saberes. Tradicionalmente essas Ciências têm o ensino baseado apenas na utilização de fundamentos científicos sem que os mesmos se articulem, posição epistemológica derivada de uma cultura científica fragmentada e fundada no Positivismo, contemporâneo da revisão dos fundamentos da Matemática.

Em seus domínios restritos, os cientistas de diferentes áreas elaboraram linguagens próprias, o que reflete na formação dos professores. A especialização de conhecimentos e linguagens, tratando a realidade de modo pulverizado e fragmentado, dificulta que ela seja vista em seus múltiplos aspectos, excluindo até mesmo a crítica do saber acumulado. Sob o aspecto disciplinar levado a extremos, saberes escolares foram subdivididos, resultando em no ensino cada vez mais especializado. Um exemplo é a Matemática, subdividida em Aritmética, Álgebra e Geometria, já no Ensino Fundamental. Deve ser lembrada a necessidade de buscar temas e formas de ensino que enredem o conhecimento e estabeleçam ações de maior abrangência, capazes de expandir as fronteiras das disciplinas. A falta de contextualização faz com que, em um ensino estritamente disciplinar, o saber de uma disciplina não interfira de maneira a auxiliar o desenvolvimento de outra. O ser humano tem capacidade de contextualizar e integrar saberes, mas em um ensino disciplinarizado suas habilidades são atrofiadas, ao invés de desenvolvidas.

Nem todo tópico da Matemática pode ser ensinado a partir de situações reais e “aplicações no dia a dia”. O saber matemático não deve ser abordado de formas extremas na Educação Básica, sendo guiado apenas por aplicações de caráter utilitário. Por outro lado, este saber também não deve ser ensinado de maneira totalmente abstrata, alheio a qualquer contexto. Se durante a sua escolarização

formal o indivíduo aprender apenas a dissociar os diferentes aspectos do mesmo fenômeno em aprendizagens fragmentadas, mais à frente poderá ser levado ao reducionismo científico e pedagógico, além de ser incapaz de tratar as questões complexas de forma multidimensional.

Mudar paradigmas educacionais implica em gerar conflitos para os que vêem o conhecimento como fonte de verdade absoluta e são incapazes perceber outra forma de ação didática além do ensino a partir de disciplinas fragmentadas. As capacidades de sintetizar, resolver problemas e ligar saberes podem ser desenvolvidas, ao mesmo tempo em que são atenuadas as fronteiras entre disciplinas, direcionando estudos para o pensamento complexo.

A partir da década de 1990, a idéia de um ensino articulador de saberes tem tido mais visibilidade e, desde então, tem se apresentado como elemento capaz de ligar diferentes campos. Porém, tal articulação não pode ser generalizada, pois são múltiplos os aspectos a serem enfrentados na necessária e mútua ajuda entre diferentes disciplinas e até mesmo campos da mesma Ciência. Na verdade, ações articuladoras devem possibilitar a interação de temas e contextos, o que requer a participação conjunta e tratamento recíproco entre os profissionais de cada área.

Também é importante observar que a articulação de saberes não deve ser tratada como Ciência autônoma, e sim como mais uma possibilidade de fazer convergir temas e metodologias. Antes de tudo, é necessário avaliar a possibilidade de contribuição de cada disciplina e adequar as ações aos objetivos próprios de cada área. Um projeto com o objetivo de articular saberes não deve forçar a agregação de diferentes disciplinas e levar à perda da identidade de qualquer uma delas. É lícito mostrar ao estudante que a Matemática é uma Ciência com objetivos e metodologias diferentes da Biologia, mas não é adequado forçar articulações que desfigurem saberes desses dois campos científicos. Corre-se o risco de o estudante, ao terminar a Educação Básica, não ter aprendido os temas dessas duas Ciências e, por devido a isso, levar à frente uma visão distorcida das possibilidades de atuação de cada uma delas.

Ao invés de se buscar formas generalizadas de articular saberes, podem ser efetivadas aplicações localizadas entre diferentes disciplinas. A articulação de saberes também deve viabilizar o diálogo entre especialistas e estabelecer objetivos comuns, necessários em um primeiro momento.

Pelo fato das disciplinas possuírem autonomia, é importante conhecer profundamente tanto os temas e métodos de cada área quanto as possibilidades de ações que visem para a aprendizagem. Aprender temas de uma disciplina é tão necessário quanto saber ligá-los aos de outros campos, aumentando a rede em que eles são inseridos e, dessa forma, essas relações para expandir saberes que alcancem outras disciplinas e impregnem as relações entre saberes que separados. Entretanto, esse enredamento não pode servir de pretexto para destruir a identidade de cada disciplina e empobrecer objetivos didáticos. Cada disciplina tem atuação restrita e delimitada na sua ação, o que dificulta as articulações com as demais. Essa restrição de articulações, já é em si um motivo para respeitar domínios de saberes, sistematizações específicas, metodologias próprias, instrumentos de análise, aplicações práticas e contingências históricas do desenvolvimento de cada disciplina.

Apesar de todas as diferenças entre a Biologia e a Matemática, essas duas Ciências podem atuar conjuntamente quando são encontrados meios de aproximação. O caso da Genética é apenas um exemplo de utilização dos elementos de Análise Combinatória, Probabilidades e Estatística em uma aproximação que pode se dar sem perda de identidades.

Os horários escolares são constituídos de disciplinas justapostas e que não se relacionam durante o tempo em que são ensinadas, apesar de os professores conviverem com os estudantes no mesmo estabelecimento de ensino. O tempo e o espaço da mesma escola são utilizados de forma fragmentada. No ensino brasileiro persiste a justaposição de disciplinas sem articulação de objetivos, tanto nos currículos escolares quanto nos horários de aulas. As diferentes disciplinas coexistem sem se relacionar, mas a articulação de saberes se pode gerar alternativas para essa situação.

Ao trabalhar com saberes de forma articulada, o objetivo principal deve ser a interação cada vez mais estreita de temas e metodologias, tendo a clareza de que se busca eliminar e/ou atenuar ao máximo as barreiras entre campos demarcados, para que se ampliem horizontes de todos os envolvidos. Concomitante a isso, as contribuições das diferentes disciplinas não podem ser anuladas, devendo estabelecer-se um diálogo autêntico e uma convivência na qual nenhuma disciplina deve tentar se sobressair às demais. No caso da Matemática, a articulação com as demais disciplinas não deve expandir apenas as suas possibilidades educacionais,

mas precisa, ao mesmo tempo, ser elemento auxiliar na ampliação de alcance dos outros saberes envolvidos. Ao aplicar a Estatística no estudo da Biologia, por exemplo, o saber matemático não deve se sobrepor ao biológico e nem este pode sobressair-se em relação ao outro, pois assim se forçaria uma convivência de elementos que continuariam fragmentados.

Nesse diálogo entre saberes, a comunicação se concretizaria de modo a ocorrerem influências mútuas, sem a recorrência a excessivas formalizações das partes envolvidas, nem à perda de identidades. A articulação de saberes por si mesma não tem a propriedade de resolver ou garantir a resolução dos problemas de ensino em sua totalidade, mas pode ser contribuir para a contextualização e a integração de temas.

Os modos de elaboração do conhecimento da Matemática, seus temas específicos, sua linguagem e formas de raciocínio devem servir para reforçar o diálogo desta disciplina com outras. Não basta, por exemplo, propor a aproximação entre a Análise Combinatória e a Genética, se a primeira continuar sendo abordada independentemente pelo professor de Matemática como pré-requisito de um futuro conteúdo que será ensinado de forma fragmentada dentro da sua própria disciplina ou será utilizada pelo professor de Biologia. Diante da dificuldade dos professores de Matemática e Biologia dominarem de forma independente os temas de Análise Combinatória e Genética, é necessário ambos planejarem juntos as suas ações. Com isso, é possível iniciar um diálogo em que duas Ciências sejam vistas como formas distintas de abordar o mesmo fenômeno complexo atuando de forma conjunta. Dessa forma, as relações enriquecedoras que podem surgir para estudante e professor, dependem dos objetivos educacionais das disciplinas serem estabelecidos e articulados com rigor.

Cada professor deve assumir que seu campo de saberes não é capaz de explicar os fenômenos sob todos os aspectos e de forma simultânea. A convivência com momentos de incerteza pode levar à ligação de saberes sob novas concepções que não sejam aquelas pautadas na “pedagogia da certeza”, que determina fragmentações e simplificações, cujos elementos são expostos por Japiassú. O trajeto entre o paradigma da simplificação e a aceitação da complexidade fará com que o professor de Matemática aborde temas de ensino e utilize métodos em consonância com os de outras áreas. A partir disso, as disjunções e reduções do paradigma científico moderno podem dar lugar ao saber explorado conjuntamente

por diferentes áreas, não ocorrendo apenas uma simples aproximação de interesses, mas também a integração de ações e instalação de diálogos. Ao invés de separar tópicos de ensino, o professor pode ligar saberes e problematizar situações, com as disciplinas escolares deixando de ser aglomerados de temas e técnicas sem aparentes conexões para se tornarem temas de discussão complexa. O ensino de Ciências, a partir de saberes articulados, não se restringiria a um treinamento como se os estudantes da Educação Básica fossem cientistas em fase de formação. Se os professores de duas ou mais disciplinas partilharem conhecimentos e metodologias de trabalho e ao mesmo tempo estiverem dispostos a encontrar pontos de convergência das/nas suas ações, a fragmentação de saberes pode ser atenuada.

É fundamental refletir sobre a concepção moderna de conhecimento que, ao atingir seu auge na filosofia positivista, apresenta as Ciências de forma hierarquizada. A evolução do conhecimento atualmente é vista resultado da tessitura de uma grande teia, na qual a Matemática se impregnou no estudo de outras Ciências e em condição de igualdade com outros saberes, explorando diferentes significados do mesmo objeto. O conhecimento elaborado a partir de redes significa um avanço para a ampliação de discussões sobre posturas didáticas. Cabe aos professores encontrar formas de convivência das diferentes disciplinas com a diversidade de conhecimento, para que essa convivência se estabeleça, é necessário desenvolver a capacidade de contextualizar ao elaborar o conhecimento, o que por sua vez influenciará as formas de ensinar.

A imagem da rede como articuladora de conceitos é promissora para a Educação. Associar essa metáfora à ação docente pode ser elemento de mudança do paradigma educacional, ao privilegiar a tessitura de novos significados como elemento importante na elaboração do conhecimento, ao invés de privilegiar as cadeias de pré-requisitos, característica do ensino disciplinarizado. A visão do conhecimento segundo correntes de causalidade passa a ter uma alternativa epistemológica e didática na metáfora da rede. Nesta última, cada feixe de relações tem tanta importância quanto os demais, o que leva a uma relação não hierarquizada entre as disciplinas do currículo, já que elas representam nós de uma rede que possibilita diferentes conexões. Aceitar o conhecimento como rede implica em uma constante revisão no ensino da Matemática e das relações desta com outras disciplinas. A noção de pré-requisito deixa de ter sentido como forma de

ligação entre temas e é assumida a não existência de seqüências fixas e únicas para elaborar conhecimento.

A multiplicidade de percursos e a não obrigatoriedade de passar por determinado nó leva a variadas possibilidades de transitar entre diversos temas dentro da rede. Quando Soares afirma que a Genética é campo de estudos que se baseia na ampla utilização da Matemática e elabora processos de resolução de problemas com aplicação de métodos de cálculos, apresenta claramente uma ponte entre a Biologia e a Matemática. Cada pequeno percurso pode ser realizado como sustentação do desenvolvimento do conhecimento sem se tomar pata si o papel de tema único da aprendizagem. As frações e suas operações se constituem em um exemplo. Elas são importantes no cálculo de probabilidades e nesse estudo de a fração continua a ter o significado de expressar a relação de uma parte com o todo, obedecendo a critérios rígidos de operações. Porém, agora a fração serve para quantificar relações entre possibilidades de gerar e transmitir patrimônio genético entre gerações sucessivas.

Ao se falar de redes pode-se apontar o hipertexto de Lévy. Para ele, o hipertexto é uma rede de informações, cujas ligações entre significados não são necessariamente de forma linear e sim uma teia irregular, na qual cada trajeto de um nó a outro não é necessariamente percorrida de forma única. Tal percurso pode ser através de um ou mais nós e, nesse caso, cada um deles pode mesmo ser uma outra rede. A Matemática não deve ser vista apenas como certificado de precisão, isenção e neutralidade dos resultados de uma pesquisa. Na suas imbricações com a Biologia, não basta que a Matemática seja um preciso instrumento de apoio como, por exemplo, na obtenção de modelos que descrevem o sucesso ou o insucesso em determinada experiência. É preciso que sirva também como instrumento de pesquisa e divulgação de resultados, sendo até mesmo utilizada nas discussões das conseqüências da produção científica para a sociedade.

A separação e ordenação, antes consideradas essenciais ao ato de conhecer, devem ser reavaliadas diante das possibilidades de ação conjunta entre disciplinas. Ao invés de uma Ciência servir de pré-requisito na aprendizagem de outra, como Comte considerava a Matemática em relação às demais dentro da proposta positivista, a convergência de interesses das diferentes disciplinas pode ser fonte de elaboração de novo conhecimento, não necessariamente simplificado e ordenado.

Assim, é possível trocar informações entre diferentes disciplinas de forma proveitosa para as disciplinas envolvidas.

A Genética é um exemplo de campo da Biologia com amplas possibilidades interdisciplinares e capazes de incluir a Matemática do Ensino Médio na elaboração do conhecimento. Porém, a utilização da Matemática como instrumento de quantificação em estudos da Biologia deve possibilitar que ela seja uma forma de comunicação e se constitua em recurso capaz de aplicações/implicações contextualizadas. Nesse caso o conhecimento matemático e não deve apenas ser utilizado para certificar verdades absolutas.

A Probabilidade não é o único elemento que possibilita a aproximação entre Biologia e Matemática na tessitura de uma rede de saberes. Outra aproximação pode ser com a Análise Combinatória, campo da Matemática que surgiu durante o desenvolvimento do estudo de Probabilidades. Além de presente nos cálculos de Probabilidades, a Análise Combinatória é indicada como elemento de formulação e organização das resoluções de problemas na rede de significados gerados pela Genética. Esse fato é um exemplo do princípio de topologia de Lévy, no qual as distâncias entre saberes da Matemática e da Biologia são revistas e compreendidas, colocando diante dessas duas Ciências a possibilidade de gerar novos feixes de relações. A ligação do estudo de Genética com a Probabilidade é uma recorrência ao princípio da heterogeneidade de Lévy, favorecendo formações de feixes de significados em uma rede hipertextual, aberta e em contínua elaboração.

Uma ação de articular saberes pode ser iniciada a partir do diálogo entre os professores de Matemática e Biologia sobre as interseções dos temas das duas Ciências. Temas de Biologia e de Matemática podem ser utilizados para diálogos e aproximações entre dois campos científicos aparentemente desconexos, mas que podem guardar entre si mais proximidades do que a princípio uma visão fragmentada das Ciências poderia alcançar. Porém, um elemento dificulta as ações articuladoras entre Matemática e Biologia: a falta de diálogo científico e didático entre autores de obras para ensino dessas duas Ciências. Aqueles que se dedicam a escrever livros de Matemática para o Ensino Médio não mostram formas de encontro dos seus saberes com os de outras disciplinas. Essa falta de diálogo entre autores é um elemento significativo no processo de ensino das duas Ciências, já que o livro didático é instrumento importante no processo e não pode ser relegado.

A análise dos livros de Biologia utilizados neste trabalho apontou a presença de outros tópicos matemáticos além dos já expostos, como por exemplo, o conceito de função, historicamente um dos mais importantes na Matemática. A idéia de gráfico de uma função figura utilizada para transmissão de dados, tem ampla utilização devido ao fato de facilitar a apresentação e visualização sem necessidade de longos textos. Também pode ser acrescentado que, a partir do gráfico de uma função, é possível tirar conclusões a respeito do comportamento de um fenômeno. A dependência entre duas variáveis tem implicações na descrição de fenômenos naturais e entre essas dependências estão a proporcionalidade direta e a inversa. Tanto o professor de Matemática quanto o de Biologia pode utilizar os gráficos para analisar o desenvolvimento de um fenômeno natural sob a visão da sua área de atuação.

A Botânica é um campo dentro da Biologia propício à utilização destacada dos gráficos, como no estudo da pressão osmótica, da transpiração e da respiração vegetal, da fotossíntese e do crescimento das partes de uma planta. No caso da Botânica, as trocas de solvente entre células vegetais e o ambiente podem ser utilizadas para exemplificar a representação gráfica da função afim  $y = ax + b$ , na qual o gráfico assume diferentes aspectos em decorrência dos valores dos números reais  $a$  e de  $b$ . Com a utilização do gráfico comparativo entre a fotossíntese e a respiração vegetal, o conceito de interseção de curvas e funções pode ser apresentado, além de contextualizar a análise do significado dos pontos com coordenadas de valores comuns aos gráficos de duas funções. No caso do estudo de máximos e mínimos, os gráficos podem ser utilizados para conjugar o conceito biológico de valor ótimo de concentração de um hormônio vegetal ao conceito matemático de ponto de máximo e valor máximo de uma função.

Da mesma forma que os elementos matemáticos já citados, o pH é outro ponto de convergência de temas. Nesse caso podem ser elaboradas ações conjuntas dos professores de Biologia, Matemática e Química. Para o professor de Química, o pH e seu cálculo são importantes na descrição de determinadas reações. Para o professor de Biologia, interessa o fato de o pH interferir na velocidade de uma reação no interior de um ser vivo. A atuação do professor de Matemática pode se dar na intermediação dos conceitos e propriedades referentes ao seu campo de atuação.

Como acréscimo à associação entre Biologia e Matemática, a Zoologia apresenta explicações sobre o crescimento de artrópodes em comparação aos outros animais, também é possível incluir a Matemática nas explicações de fenômenos a princípio considerados apenas do domínio da Biologia.

Voltando às especificidades de cada conhecimento, os gráficos da Biologia podem ser utilizados em Matemática, mas, para esta última, eles não esgotam o assunto. Isso é justificado pelo fato da necessidade de abordar domínios de funções que incluem, por exemplo, números negativos. Conforme pode ser verificado, a maior parte dos gráficos encontrados nos livros de Biologia para Ensino Médio contempla somente as grandezas positivas.

Estruturando a ação dos professores com disciplinas independentes, as escolas continuarão sem abertura ao enfoque interdisciplinar, à complexidade do conhecimento e suas possibilidades de estabelecer redes de significados, o que favorece o avanço do trabalho educacional e é um suporte para novas ações. Elaborar atividades para o ensino de Ciências segundo redes de conhecimentos possibilita a convivência entre diferentes modalidades de saberes no mesmo ambiente e a partilha de diversas teorias em um mesmo trabalho.

A partir da abordagem do ensino por meio de redes de significações, não é necessário apelar para a adoção indiscriminada do conhecimento cotidiano do estudante com o objetivo de eliminar barreiras entre disciplinas, procedimento denunciado por Giardinetto. A articulação de saberes favorece o trânsito entre diferentes campos, com as características das disciplinas na rede podendo ser respeitadas, sem prejuízos para professores e estudantes.

Em consonância com as idéias de Morin, atividades escolares fundamentadas nas elaborações de redes de significados mudam o foco da aprendizagem do pensamento e conhecimento fragmentados para uma complexidade que atende às necessidades de articulação entre diversos temas das disciplinas, o que não acontece quando elas são tratadas isoladamente.

A articulação de saberes entre Matemática e Biologia no Ensino Médio por meio de redes pode ser uma solução que ultrapasse a adoção das disciplinas sem levar a uma simples justaposição de programas afins. Ainda que os temas de duas ou mais disciplinas no Ensino Médio não tenham como resultado a criação de novos campos de estudos, a articulação de saberes em redes pode ser utilizada para aguçar o senso crítico dos estudantes em relação ao conhecimento científico. Isso

derrubaria o mito de que as disciplinas são separadas por barreiras intransponíveis, tornando-as absolutas, suficientes por si mesmas, sem necessariamente se realizarem diálogos com outros campos durante o seu desenvolvimento.

O exemplo do teorema de Hardy-Weimberg, proposto no início do século XX, mostra historicamente como a colaboração de pesquisadores de áreas distintas pode trazer ganhos para o conhecimento. Dois profissionais em campos aparentemente inconciliáveis, um matemático e um médico pesquisador, foram capazes de mostrar que o conhecimento científico é complexo e avança pela formação de novos feixes de significados e até mesmo re-significações dos objetos existentes, por meio de acréscimos de novos nós à rede já existente.

As novas possibilidades para o desenvolvimento do conhecimento representadas pelas redes são formas de entender o que já foi elaborado pelas Ciências. Além disso, abrem-se possibilidades de elaborar formas de ação didática que não recorram à fragmentação do conhecimento nem apelam para a desvirtuação de contextos. O pensamento complexo apoiado na elaboração das redes de significados pode encaminhar novas possibilidades, além de gerar formas inovadoras de pensar e agir em Educação.

## Referências

- AGUIAR JUNIOR *et al.* Por um novo currículo de ciências. In: **Presença Pedagógica**. v.9, n.51. Belo Horizonte: Dimensão, 2003.
- AFONSO, J. C.; GAMA, M. S. De Svante Arrhenius ao parâmetro digital: 100 anos de medida de acidez. In: **Química Nova**. 2007, v. 30, n.1. São Paulo. Disponível em: [www.scielo.br](http://www.scielo.br). Acesso em: 26 out. 07.
- ALMEIDA, M. C. A.; CARVALHO, E. A.; MORIN, E. **Educação e complexidade: os sete saberes e outros ensaios**. São Paulo: Cortez, 2002.
- AMABIS, J. M.; MARTHO, G. R. **Biologia**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2007.
- ANTAR NETO, A. *et al.* **Coleção Noções de Matemática**. v. 1. São Paulo: Moderna, 1979.
- ANTUNES, C. **Trabalhando com habilidades: construindo idéias**. São Paulo: Scipione, 2001.
- ÁVILA, G. S. S., **Análise matemática para a licenciatura**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.
- BEVILACQUA, J. S.; GUEDES, C. L. C.; RAFIKOV, M. Modelagem em Biomatemática. **Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC)**, 23. São José do Rio Preto: IBILCE – UNESP, 2003.
- BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática**. v. 1. São Paulo: Moderna, 1992.
- BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. M. V. **Filosofia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica: 2001.
- BIRNER, E.; UZUNIAN, A. **Biologia**. 2 ed. São Paulo: Harbra, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999. Disponível em <<http://www.mec.gov.br>> Acesso em 28/05/2006.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. Disponível em <<http://www.mec.gov.br>> Acesso em 03/08/2007.
- CANDEIAS, J. A. N. **A Engenharia Genética**. In: **Revista de Saúde Pública**. São Paulo v.1, n.25, fev. 1991, Disponível em < <http://www.scielo.br/pdf/ rsp/ v25n1 /02.pdf>> Acesso em 29/06/2008.
- CARVALHO, A. M. P.; GIL-PÉREZ, D. **Formação de professores de ciências: tendências e inovações**. 5 ed. São Paulo: Cortez, 2001.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.** São Paulo:summus,1986.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 2002.

DAVIS, P. J.; HERSH R. **A experiência matemática.** São Paulo: Francisco Alves, 1985.

DEMO, P. **Metodologia d oconhecimento.** São Paulo: Atlas, 2000.

DOLCE, O.; IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar.** v. 2. São Paulo: Atual, 1991.

DUTRA, L. H. de A. **Epistemologia da aprendizagem.** Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

FAZENDA, I. C. R. **Interdisciplinaridade: um projeto em parceria.** São Paulo: Loyola, 1991.

FAZENDA, I. C. R. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: Efetividade ou ideologia.** São Paulo: Loyola, 2002.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores associados, 2006.

FLICK, U. **Uma introdução à pesquisa qualitativa.** Porto Alegre: Bookman, 2004.

FONSECA M. C. F. R. **Educação matemática de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FONTANA, R. A. C.; CRUZ, M. N. **Psicologia e trabalho pedagógico.** São Paulo: Atual, 1997.

GEWANDSZNAJDER, F.; LINHARES, S. **Biologia hoje.** 14 ed. São Paulo: Ática, 2003.

GIARDINETTO, J. R. B. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana.** Campinas: Autores associados, 1999.

GONÇALVES, L. A. O.; SILVA, P. B. G. **O jogo das diferenças: o multiculturalismo e seus contextos.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2000.

HENRY, J. **A Revolução Científica e as Origens da Ciência Moderna.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática: ciência e aplicações.** v. 3. São Paulo: Atual, 2001.

IMBERÓN, F. **Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.** 3 ed. São Paulo: Cortez, 2002.

JAPIASSÚ, H. In: FAZENDA, I. C. R. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro**: Efetividade ou ideologia. São Paulo: Loyola, 2002.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. São Paulo: 34, 2006.

Le MOIGNE, J. L.; MORIN, E. **A inteligência da complexidade**. São Paulo: Peirópolis, 2000.

LOPES, S. G. B. C. **Bio**: volume único. 3 ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

LOPES, S. **Bio**: volume único. São Paulo: Saraiva, 2004.

MACHADO, N. J. **Coleção Matemática por assunto**. São Paulo: Scipione, 1988.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 1995.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**. 6 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MATTIAZZO-CARDIA, E.; MORAES, M. S. S. **A Matemática e os cursos de ciências biológicas**. Encontro Paulista de Educação Matemática, 7, São Paulo: SBEM, 2004.

MATURANA, H. R.; VARELA, F. J. **A árvore do conhecimento: as bases biológicas da compreensão humana**. 4 ed. São Paulo: Palas Athena, 2004.

Mc LAREN, P.; FARAHMANDPUR, R. **Pedagogia revolucionária na globalização**. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORIN, E. **A religação dos saberes: o desafio do século XXI**. 3 ed. Rio de Janeiro: Bertrand, 2002.

MORIN, E. **Cabeça bem feita**. Rio de Janeiro: Bertrand, 2004.

MORGADO, A.C. *et al.* **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PERRENOUD, P. **Construir as competências desde a escola**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PINHEIRO, M. **A água e a escala de pH.** Disponível em <http://www.ufpa.br/ccen/quimica/a%20agua%20e%20a%20escala%20de%20ph.htm>) Acesso em 26/10/2007.

RAGO, L. M.; MOREIRA, E. F. P. **O que é Taylorismo.** São Paulo: Brasiliense, 1984.

SANTOS, B S. **Um discurso sobre as ciências.** 2 ed. São Paulo: Cortez, 2004.

SASSON, C.; SILVA JUNIOR, S. **Biologia.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

SILVA, CIRCE M. S. A Matemática positivista e sua difusão no Brasil. Vitória: EDUFES, 1999.

SILVA JÚNIOR, G. B. **O ensino de função do primeiro grau.** Monografia (especialização) – Universidade Candido Mendes, Vitória, 2004. 73p.

SILVA JÚNIOR, G. B. **Biologia e Matemática:** A necessidade de religar saberes. Monografia (especialização) – Faculdade Saberes, Vitória, 2006. 112p.

SOARES J. L. **Biologia no terceiro milênio.** v. 2. São Paulo: Scipione, 1999.

TOMÉ, M. V. F. **Fotossíntese e respiração.** Disponível em: <http://www.redeambiente.org.br/Fatos.asp?artigo=69>. Acesso em: 25/10/2007.

USBERCO, J.; SALVADOR, E. **Química:** Físico-Química. v. 2. 10 ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

VEIGA-NETO, A.; WORTMANN, M. L. C. **Estudos culturais da ciência & educação.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.