



PUC Minas

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Thiago Linhares Brant Reis

INTEGRAL DEFINIDA: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem

Belo Horizonte
2015

Thiago Linhares Brant Reis

INTEGRAL DEFINIDA: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda

Belo Horizonte

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

R375i Reis, Thiago Linhares Brant
Integral definida: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem / Thiago Linhares Brant Reis. Belo Horizonte, 2015.
241 f.: il.

Orientador: Dimas Felipe de Miranda
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Cálculo - Estudo e ensino. 2. Cálculo integral. 3. Cálculo diferencial. 4. Estratégias de aprendizagem. 5. Material didático. I. Miranda, Dimas Felipe de. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.



PUC Minas

PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO ALUNO:
THIAGO LINHARES BRANT REIS

Realizou-se, no dia 10 de dezembro de 2015, às 13:30 horas, prédio 20, sala 306 da PUC Minas, Unidade Curação Eucarístico, a defesa de dissertação do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática com título: **INTEGRAL DEFINIDA: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem.**

A banca examinadora foi composta pelos seguintes professores:

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda – Orientador – (PUC Minas)
Prof. Dr. Luiz Carlos Picoreli de Araújo – (CEFET/MG)
Prof.ª Dr.ª Eliane Scheid Gazire – (PUC Minas)

A banca examinadora considerou a dissertação:

- Aprovada (o candidato terá até noventa dias para entregar o texto final da dissertação)
 Reprovada

Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da comissão.

Belo Horizonte, 10 de dezembro de 2015.

Karla Danielly Salviano Silva

Secretária do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda – Orientador – (PUC Minas)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial – (PUC Minas)

Prof. Dr. Luiz Carlos Picoreli de Araújo – (CEFET/MG)
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial – (PUC Minas)

Prof.ª Dr.ª Eliane Scheid Gazire – (PUC Minas)
Doutorado em Educação – (UNICAMP)

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer a Deus, a Jesus Cristo, ao Divino Espírito Santo, e aos meus Anjos da Guarda, pelo amor incondicional, pelo exemplo, pela inspiração e proteção constante.

Aos meus pais, Ana Lúcia Coelho Linhares e Hélio Eduardo Brant da Veiga Reis (sempre presente), por terem me dado a benção da vida. A vocês, minha eterna gratidão.

Aos meus irmãos Bruno, Juliana e Pedro, pela amizade sincera.

Á minha esposa Fabiana, companheira em todas as horas, pelo apoio, incentivo e paciência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dimas, por sua dedicação, comprometimento, paciência, sensibilidade, serenidade e apoio ao longo deste trabalho, contribuindo para meu amadurecimento como pesquisador e profissional. Penso que além de ser Doutor em Tratamento da Informação Espacial, é também Doutor em Tratamento das Pessoas.

Aos Professores Doutores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas, Amauri, Eliane, João Bosco, Lídia e Tânia, por terem colaborado com seus conhecimentos, experiências e saberes tão preciosos.

Ao casal de amigos Carlos e Érika Vidigal, pelo apoio e torcida.

Aos meus colegas do Mestrado, pelos momentos de convívio e pelas trocas de experiências.

Aos funcionários da secretaria, pelo convívio e pelas gentilezas.

Aos meus alunos que gentilmente participaram desta pesquisa, contribuindo com a realização das atividades.

Á revisora Professora Ana Luísa, pelo olhar crítico e profissional.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para que este sonho se tornasse realidade, o meu sincero Muito Obrigado!

"Não desista enquanto você ainda for capaz de fazer um esforço a mais. É nesse algo a mais que está a sua vitória."

Roberto Shinyashiki (2011, p.28).

RESUMO

Essa dissertação tem como objetivo apresentar os resultados de uma pesquisa, cuja proposta foi organizar uma sequência de atividades didáticas para o estudo de Integral Definida, explorando conteúdos e estratégias de aprendizagem. Aplicou-se essa sequência a um grupo voluntário de estudantes de engenharia da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em um Centro Universitário de Belo Horizonte. Objetivou-se acompanhar e observar a participação dos estudantes no desenvolvimento das atividades, organizadas conforme a teoria da Prática Educativa de Zabala (1998), com o apoio de calculadora e de dois *softwares* computacionais, o GeoGebra e o VCN. A pesquisa procurou indagar como o estudo de Integral Definida, intencionalmente preparado para trabalhar conceitos, significados e procedimentos de cálculo, é vivenciado por um grupo de estudantes de uma escola particular de engenharia. Tratou-se, para tanto, de uma Pesquisa-Ação, sendo propostas oito atividades didáticas envolvendo aproximações finitas, somatório, Limite de somas finitas, Teorema Fundamental do Cálculo, Limite de somas concebido como uma Integral Definida e aplicações geométricas. O tratamento dos dados coletados foi feito a partir da análise dos acertos e equívocos dos estudantes em paralelo com as categorias das teorias assumidas na pesquisa. A análise qualitativa dos resultados evidenciou a superação de dificuldades, a evolução do conhecimento e de habilidades dos estudantes no desenvolvimento das atividades, os quais se mostraram mais independentes e confiantes. O produto dessa pesquisa constituiu-se, portanto, de um Caderno de Atividades, disponibilizado como contribuição para um estudo complementar da Integral Definida.

Palavras-chave: Integral Definida. Cálculo Diferencial e Integral. Conteúdos de Ensino. Estratégias de aprendizagem. Sequência Didática.

ABSTRACT

This thesis aims to present the results of a survey, whose purpose was to organize a series of educational activities for the study of Definite Integral, exploring content and learning strategies. This sequence was applied to a volunteer group of engineering students of the discipline of Differential and Integral Calculus, in a University Center of Belo Horizonte. The objective was to monitor and observe student participation in the development of activities, organized according to the theory of Educational Practice of Zabala (1998), with the support of calculator and two computer software, GeoGebra and VCN. The research sought to investigate how the study of Integral Definitely, intentionally prepared to work concepts, meanings and procedures of calculus, is experienced by a group of students from a particular school of engineering. It was, therefore, an Action Research, eight educational activities proposals involving finite approximations, sum, limit of finite sums, fundamental theorem of calculus, sums limit designed as a Definite Integral and geometric applications. The treatment of the collected data was made from the analysis of the successes and mistakes of students in parallel with the categories of theories assumed in the research. The qualitative analysis of the results showed overcoming difficulties, the evolution of knowledge and skills of students in the development of activities, which were more independent and confident. The product of this research was constituted therefore an Activity Book, available as a contribution to a supplementary study of Definite Integral.

Keywords: Definite Integral. Differential and integral calculus. Teaching content. Learning strategies. Teaching sequence.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| FIGURA 1 – Newton e Leibniz e o Limite de somas | 29 |
| FIGURA 2 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo [0,1]... | 36 |
| FIGURA 3 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo [0,1], calculada por uma aproximação superior..... | 37 |
| FIGURA 4 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo [0,1], calculada por uma aproximação inferior e pela regra do ponto médio..... | 38 |
| FIGURA 5 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo [0,1], calculada por uma aproximação inferior e por uma aproximação superior, com bases menores | 38 |
| FIGURA 6 - Área limitada pela curva da função $y = f(x)$, no intervalo [a,b], calculada por uma soma de áreas de retângulos com medidas de bases distintas..... | 39 |
| FIGURA 7 - Área limitada pela curva da função $y = f(x)$, no intervalo [a,b], calculada por uma soma de áreas de retângulos com medidas de bases iguais | 40 |
| FIGURA 8 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo [1,5], calculada por uma soma inferior com dois retângulos de igual largura..... | 41 |
| FIGURA 9 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo [1,5], calculada por uma soma inferior com quatro retângulos de igual largura | 41 |
| FIGURA 10 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo [1,5], calculada por uma soma superior com dois retângulos de igual largura..... | 42 |
| FIGURA 11 - Área limitada pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo [1,5], calculada por uma soma superior com quatro retângulos de igual largura | 43 |
| FIGURA 12 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo [1,5], calculada por dois retângulos cujas alturas são dadas pelas imagens da função no ponto médio da base de cada retângulo (regra do ponto médio)..... | 43 |

| | |
|---|----|
| FIGURA 13 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por quatro retângulos cujas alturas são dadas pelas imagens da função no ponto médio da base de cada retângulo (regra do ponto médio)..... | 44 |
| FIGURA 14 - Valor médio | 45 |
| FIGURA 15 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \text{sen}x$, no intervalo $[0, \pi]$ | 46 |
| FIGURA 16 - Comprimento do arco | 47 |
| FIGURA 17 - Comprimento do segmento de reta | 47 |
| FIGURA 18 - Comprimento de uma curva qualquer | 48 |
| FIGURA 19 - Comprimento de uma curva qualquer, através da soma de n pequenos segmentos, representados pelas hipotenusas dos triângulos retângulos | 48 |
| FIGURA 20 - Triângulo retângulo..... | 49 |
| FIGURA 21 - Comprimento do arco da curva da função $f(x) = \text{sen}x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, utilizando oito triângulos retângulos com mesma medida de base | 50 |
| FIGURA 22 - Visualização do sólido gerado a partir da rotação da reta de equação $y = x$, no intervalo $[0, 4]$, em torno do eixo x | 51 |
| FIGURA 23 - Visualização do sólido gerado a partir da rotação da reta de equação $x = 1$, no intervalo $[0, 3]$, em torno do eixo y | 52 |
| FIGURA 24 - Visualização do sólido gerado a partir da soma dos volumes dos cilindros | 52 |
| FIGURA 25 - Visualização do sólido gerado a partir da soma dos volumes dos cilindros, com alturas menores | 53 |
| FIGURA 26 - Volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva de equação $f(x) = 2x + 1$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando oito cilindros com mesma medida de altura | 54 |
| FIGURA 27 - Área limitada pela curva de equação $f(x) = x - 1$ e pelo eixo x, no intervalo $[1, 5]$, utilizando o limite de somas | 56 |
| FIGURA 28 - Volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva de equação $f(x) = x$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando o limite de somas..... | 58 |
| FIGURA 29 - Teorema do valor médio | 63 |

| | |
|--|----|
| FIGURA 30 - Gráfico da função $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$ | 64 |
| FIGURA 31 - Área limitada pela reta de equação $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$. | 64 |
| FIGURA 32 - Valor médio da função $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$ | 65 |
| FIGURA 33 - Teorema fundamental do Cálculo | 67 |
| FIGURA 34 - Área sob a curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x=1$ e $x= 5$ | 71 |
| FIGURA 35 - Vista lateral do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x , da área limitada pela curva da função $f(x) = 2x + 1$, no intervalo $[0,2]$ | 73 |
| FIGURA 36 - Comprimento da curva calculado pelo VCN | 75 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|---|------------|
| QUADRO 1 - Elementos estruturantes das 8 atividades..... | 85 |
| QUADRO 2 - Tipos de equívocos..... | 161 |

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação inferior, pela regra do ponto médio e por uma aproximação superior, com número de subintervalos distintos39

LISTA DE FOTOS

| | |
|---|-----|
| FOTO 1 - Alunos desenvolvendo o caderno de atividades | 83 |
| FOTO 2 - Preenchendo a região sudeste com polígonos, em grupo..... | 132 |
| FOTO 3 - Obtendo a altura do copo, em grupo..... | 147 |
| FOTO 4 - Obtendo a medida do raio maior, considerando a borda, em grupo | 147 |
| FOTO 5 - Obtendo a medida do raio menor, em grupo..... | 148 |
| FOTO 6 - Obtendo a medida do raio maior, desconsiderando a borda, em grupo..... | 152 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|---|------------|
| GRÁFICO 1 - Tipos de Equívocos x Frequência Relativa | 162 |
|---|------------|

LISTA DE PROTOCOLOS

| | |
|---|-----|
| PROTOCOLO 1 - Construção gráfica da atividade 1 - questão 1 - letra e – aluno D..... | 88 |
| PROTOCOLO 2 - Resolução manual da atividade 1 - questão 1 - letra e – aluno D..... | 89 |
| PROTOCOLO 3 - Resolução manual da atividade 1 - questão 1 - letra f – aluno D..... | 90 |
| PROTOCOLO 4 - Resolução manual da atividade 1 - questão 1 - letra f – continuação da questão– aluno D | 91 |
| PROTOCOLO 5 - Construção gráfica da atividade 1 - questão 2 - letra b – aluno D..... | 93 |
| PROTOCOLO 6 - Resolução da atividade 3 - questão 1 - letra b – aluno R..... | 97 |
| PROTOCOLO 7 - Resolução da atividade 3 - questão 1 - letra b – Tipo de equívoco – aluno R | 97 |
| PROTOCOLO 8 - Resolução da atividade 3 - questão 1 - letra c – aluno R..... | 98 |
| PROTOCOLO 9 – Parte da resolução da atividade 3 - questão 1 - letra c – aluno R..... | 99 |
| PROTOCOLO 10 - Resolução da atividade 3 - questão 2 – aluno R | 100 |
| PROTOCOLO 11 - Resolução da atividade 3 - questão 2 – Continuação – aluno R..... | 101 |
| PROTOCOLO 12 – Parte da resolução da atividade 3 - questão 2 – Tipo de equívoco – aluno R | 101 |
| PROTOCOLO 13 - Resolução da atividade 3 - questão 2 – aluno R | 101 |
| PROTOCOLO 14 - Resolução da atividade 3 - questão 3 – aluno R | 102 |
| PROTOCOLO 15 - Resolução da atividade 3 - questão 3 – Continuação – aluno R..... | 103 |
| PROTOCOLO 16 – Parte da resolução da atividade 3 - questão 3– aluno R.... | 104 |
| PROTOCOLO 17 - Resolução da atividade 4 - questão 1- aluno R | 106 |
| PROTOCOLO 18 - Resolução da atividade 4 - questão 2 – letra a – aluno D... | 107 |
| PROTOCOLO 19 - Resolução da atividade 4 - questão 2 – letra g – aluno D... | 108 |
| PROTOCOLO 20 - Resolução da atividade 4 - questão 3 – letra a – aluno R... | 109 |
| PROTOCOLO 21 - Resolução da atividade 5 - questão 1 – letra b – aluno D... | 112 |
| PROTOCOLO 22 - Resolução da atividade 5 - questão 2 – letra a – aluno D... | 114 |

| | |
|---|------------|
| PROTOCOLO 23 – Parte da resolução da atividade 5 - questão 2 – letra a – Tipo de equívoco – aluno D | 115 |
| PROTOCOLO 24 - Resolução da atividade 5 - questão 2 – letra a – Tipo de equívoco – aluno D | 116 |
| PROTOCOLO 25 - Resolução da atividade 5 - questão 4 – letra a – aluno D... | 117 |
| PROTOCOLO 26 - Resolução da atividade 5 - questão 4 – letra a – Continuação – aluno D | 117 |
| PROTOCOLO 27 - Resolução da atividade 5 - questão 4 – letra a – VCN – aluno D..... | 118 |
| PROTOCOLO 28- Resolução da atividade 5 - questão 5 – aluno D | 120 |
| PROTOCOLO 29 - Resolução da atividade 6 – letra a – aluno D..... | 122 |
| PROTOCOLO 30 - Resolução da atividade 6 – letra b – aluno D..... | 123 |
| PROTOCOLO 31 - Resolução da atividade 6 – letra b – Continuação – aluno D | 124 |
| PROTOCOLO 32 - Resolução da atividade 6 – letra c – aluno D..... | 125 |
| PROTOCOLO 33 - Resolução da atividade 6 – letra d – aluno D..... | 125 |
| PROTOCOLO 34 - Resolução da atividade 6 – letra e – aluno D..... | 126 |
| PROTOCOLO 35 - Resolução da atividade 6 – letra f – aluno D..... | 127 |
| PROTOCOLO 36 - Resolução da atividade 7 – VCN – aluno J | 129 |
| PROTOCOLO 37 - Resolução da atividade 7 – GeoGebra – aluno J..... | 130 |
| PROTOCOLO 38 - Resolução da atividade 8 – Questão 1 – Em grupo | 133 |
| PROTOCOLO 39 - Resolução da atividade 8 – Questão 1 – Continuação – Em grupo | 134 |
| PROTOCOLO 40 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra a – Obtenção dos pontos, ao longo da linha de fronteira, no mapa, em grupo | 136 |
| PROTOCOLO 41 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN a partir de 12 pontos, ao longo da linha de fronteira, em grupo | 137 |
| PROTOCOLO 42 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área acima do eixo das abscissas, no VCN, a partir de 12 pontos, ao longo da linha de fronteira, em grupo..... | 137 |
| PROTOCOLO 43 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN, a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área I, em grupo..... | 138 |

| | |
|--|-----|
| PROCOLO 44 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área no | 139 |
| PROCOLO 45 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Cálculo da área I no VCN, em grupo..... | 139 |
| PROCOLO 46 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área II, em grupo..... | 140 |
| PROCOLO 47 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área II, em grupo..... | 141 |
| PROCOLO 48 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra c – Cálculo da área II no VCN, em grupo..... | 141 |
| PROCOLO 49 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área III, em grupo..... | 142 |
| PROCOLO 50 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área III, em grupo..... | 143 |
| PROCOLO 51 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Cálculo da área III no VCN, em grupo..... | 143 |
| PROCOLO 52 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN a partir de 6 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área IV, em grupo..... | 144 |
| PROCOLO 53 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área no VCN a partir de 6 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área IV, em grupo..... | 145 |
| PROCOLO 54 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Cálculo da área IV no VCN, em grupo | 145 |
| PROCOLO 55 - Resolução da atividade 8 – questão 3 – Vista lateral do copo, em grupo..... | 148 |
| PROCOLO 56 - Resolução da atividade 8 – questão 3 – Volume do copo por aproximações finitas, em grupo | 149 |
| PROCOLO 57 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Obtenção da função - VCN, em grupo..... | 150 |

| | |
|---|------------|
| PROCOLO 58 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Visualização da reta - VCN, em grupo..... | 151 |
| PROCOLO 59 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Cálculo do volume do copo pela Integral Definida através do VCN, em grupo | 151 |
| PROCOLO 60 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Obtenção da função desconsiderando a borda - VCN, em grupo | 153 |
| PROCOLO 61 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Visualização da reta desconsiderando a borda - VCN, em grupo | 153 |
| PROCOLO 62 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Cálculo do volume do copo pela Integral Definida através do VCN, desconsiderando a borda, em grupo | 154 |
| PROCOLO 63- Resolução da atividade 8 – questão 5 – Obtenção de pontos numa curva qualquer- GeoGebra, em grupo | 157 |
| PROCOLO 64 - Resolução da atividade 8 – questão 5 – Obtenção das medidas das distâncias entre esses pontos - GeoGebra, em grupo | 157 |
| PROCOLO 65 - Resolução da atividade 8 – questão 6 – letra a - VCN, em grupo | 159 |
| PROCOLO 66 - Resolução da atividade 8 – questão 6 – letra b - VCN, em grupo | 160 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 22 |
| 2 | O CÁLCULO NA HISTÓRIA E NO ENSINO | 25 |
| 2.1 | O Cálculo na História | 25 |
| 2.2 | O Cálculo no Ensino | 30 |
| 2.3 | As Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia | 31 |
| 3 | INTEGRAL DEFINIDA, CONCEITOS E VISUALIZAÇÕES GEOMÉTRICAS | 33 |
| 3.1 | A notação sigma..... | 33 |
| 3.2 | Estimando com somas finitas | 36 |
| 3.2.1 | Área | 36 |
| 3.2.2 | Valor Médio..... | 44 |
| 3.2.3 | Comprimento do arco de uma curva plana..... | 46 |
| 3.2.4 | Volume de um sólido de revolução | 51 |
| 3.3 | Limites de somas finitas | 55 |
| 3.4 | O limite de somas visto como uma Integral Definida | 61 |
| 3.5 | Teorema do Valor Médio..... | 62 |
| 3.6 | Teorema Fundamental do Cálculo | 66 |
| 4 | TEORIAS EDUCACIONAIS E ASPECTOS METODOLÓGICOS | 76 |
| 4.1 | Os conteúdos de aprendizagem | 76 |
| 4.2 | Registros de representação semiótica..... | 79 |
| 4.3 | Aspectos metodológicos..... | 80 |
| 4.4 | Ferramentas computacionais..... | 82 |
| 4.4.1 | GeoGebra | 83 |
| 4.4.2 | Visual Cálculo Numérico (VCN) | 83 |
| 5 | APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES | 85 |
| 5.1 | ATIVIDADE 1: Aproximações finitas..... | 86 |
| 5.1.1 | Descrição e análise | 87 |
| 5.2 | ATIVIDADE 2: Somatório | 94 |

| | |
|--|------------|
| 5.2.1 Descrição e análise | 94 |
| 5.3 ATIVIDADE 3: Limite de somas finitas | 95 |
| 5.3.1 Descrição e análise | 96 |
| 5.4 ATIVIDADE 4: Teorema Fundamental do Cálculo | 104 |
| 5.4.1 Descrição e análise | 104 |
| 5.5 ATIVIDADE 5: O Limite de somas definido como uma Integral Definida ... | 110 |
| 5.5.1 Descrição e análise | 110 |
| 5.6 ATIVIDADE 6: Desenvolvendo habilidades para o cálculo de área | 120 |
| 5.6.1 Descrição e análise | 121 |
| 5.7 ATIVIDADE 7: O uso do VCN para o cálculo da Integral Definida e do GeoGebra para a visualização da curva..... | 127 |
| 5.7.1 Descrição e análise | 127 |
| 5.8 ATIVIDADE 8: Experimentando objetos quaisquer com lápis, borracha, régua, calculadora, GeoGebra e o VCN..... | 130 |
| 5.8.1 Descrição e análise | 131 |
| 5.9 Tipos de equívocos observados..... | 161 |
| | |
| 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS | 165 |
| | |
| REFERÊNCIAS..... | 167 |
| | |
| APÊNDICE A | 169 |

1 INTRODUÇÃO

Minha história com a Matemática passou a ser construída em um caminho mais sólido a partir da sétima série no Colégio Arnaldo de Belo Horizonte, em 1992, onde tive a oportunidade e o privilégio de ser aluno do Prof. Paulo Fernando Braga. Nessa época, comecei a dar as minhas primeiras aulas particulares, e tive o Prof. Paulo como meu orientador que, sem medir esforços, me orientou em cada uma das dúvidas que surgiram ao longo daquele ano.

Hoje, sou Licenciado em Matemática pelo UNI-BH (2003); Engenheiro Ambiental, pela FUMEC (2009); e Especialista em Estatística pela UFMG (2012).

No segundo semestre do ano 2000, iniciei, como profissional, a minha jornada como Professor de Matemática na Escola Estadual Geraldo Teixeira da Costa, em Santa Luzia e, a partir daí, não parei mais. Passei por inúmeras escolas estaduais, colégios particulares, pré-vestibulares até que, em 2011, iniciei o meu trabalho como Professor Universitário na Newton Paiva, onde estou até hoje. Em 2013, entrei para o UNI-BH, e hoje trabalho nas duas instituições, com as disciplinas Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo de Várias Variáveis, Geometria Analítica e Álgebra Linear, Equações Diferenciais, Estatística e Probabilidades para os cursos de Engenharia e Geologia.

Ao participar do curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na PUC Minas, percebi a importância da pesquisa e da utilização de novas metodologias e tecnologias, a fim de alcançar meus objetivos como Professor de Matemática, por meio do qual iniciei leituras de artigos e dissertações na área de Educação e Ensino de Matemática e passei a ter contato com atividades matemáticas didaticamente organizadas. As minhas aulas começaram a sofrer influências desse contexto e o uso de *softwares* como Winplot, GeoGebra e VCN tornaram as aulas mais envolventes e interessantes.

O tema Integral Definida é algo que me interessa desde a primeira apresentação que me foi feita no curso de Matemática. Interessei-me pelas definições, pelos conceitos, pelo manejo operacional e pelas aplicações no cálculo de área, volume e comprimento de curvas. Mas, como aluno e, após, como professor, algumas questões sempre me incomodaram bastante:

- Muitas pesquisas já constataram que a maioria dos alunos tem dificuldades no estudo de Cálculo Diferencial e Integral. O que eu, professor, poderia fazer?

- Historicamente, com que perspectiva se observa a Matemática e, em especial, a invenção do Cálculo atribuída a Newton e Leibniz?

- Qual a relação entre a aritmética, a álgebra e a geometria, que permite obter-se a área exata de uma determinada figura, através da Integral Definida? O que está por trás deste Cálculo? Como um professor pode explorar isso em benefício do aprendizado do aluno?

Assim, permeado por esses questionamentos, escolhi o tema dessa dissertação, Integral Definida, buscando a oportunidade de refletir sobre essas perguntas, que na realidade relacionam conceitos, significados e procedimentos de cálculo, bem como a atitude do estudante nesse ambiente de estudo. Para tanto, essa pesquisa apresentada tem, como objetivo geral, a busca por organizar e experimentar, com um grupo de alunos de engenharia, uma sequência de atividades didáticas para o estudo de Integral Definida, explorando estratégias de aprendizagem que visem relacionar conceitos, significados e procedimentos de cálculo; e como objetivos específicos:

- Implementar um ambiente para o estudo de Integral Definida, com textos de atividades didáticas e acesso a *softwares* matemáticos, que permitam o acompanhamento e a observação da ação de um grupo de alunos de engenharia;
- Utilizar a teoria dos conteúdos de aprendizagem no desenvolvimento das atividades, para que os alunos adquiram autonomia, participando da construção do próprio conhecimento;
- Produzir um caderno de atividades/produto, que contribua para o ensino e aprendizagem de Integral Definida, desenvolvendo o raciocínio e o entendimento do tema.

Assim, essa pesquisa procurou indagar **como podemos trabalhar com o conteúdo Integral Definida, relacionando conceitos, significados e procedimentos de cálculo em um grupo de estudantes de uma escola particular de engenharia?**

A proposta, então, foi realizar uma pesquisa de campo, na linha da Pesquisa-Ação de Fiorentini e Lorenzato (2006), submetendo o desenvolvimento de atividades didáticas planejadas a um grupo de três alunos voluntários, do segundo período de um curso de engenharia de uma Instituição particular de Belo Horizonte. Para tal, propôs-se formular oito atividades didáticas, envolvendo aproximações finitas,

somatório, Limite de somas finitas, Teorema Fundamental do Cálculo, Limite de somas concebido como uma Integral Definida e aplicações.

Estabeleceu-se que os dados seriam coletados a partir da análise dos registros de acertos e equívocos dos estudantes, e, também, das anotações feitas ao se acompanhar e observar a participação dos estudantes no desenvolvimento das atividades. Essas atividades foram organizadas conforme a teoria da Prática Educativa de Zabala (1998), com o apoio de calculadora e de dois *softwares* computacionais: GeoGebra e VCN.

Assim, essa dissertação apresenta, em 6 capítulos, a narrativa da pesquisa realizada, estando assim divididos:

Neste primeiro capítulo, com o título “Introdução”, tem-se o contexto geral da pesquisa.

No segundo capítulo, denominado “O cálculo na história e no ensino”, tem-se o resultado de um estudo realizado em diversos artigos e livros a respeito do tema, além das Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia.

No terceiro capítulo, de nome “Integral Definida, conceitos e visualizações geométricas”, têm-se a apresentação de conceitos e exercícios resolvidos com o auxílio dos *softwares* GeoGebra e VCN, a respeito do tema.

Já no quarto capítulo, com o título “Teorias educacionais e aspectos metodológicos”, têm-se uma abordagem a respeito dos conteúdos de aprendizagem, segundo Zabala (1998); registros de representação semiótica, segundo Duval (2009); aspectos metodológicos, segundo Barbier (2007), Bogdan e Biklen (1994) e Fiorentini e Lorenzato (2006); e a apresentação dos *softwares* VCN e GeoGebra.

Por sua vez, o quinto capítulo, com o título “Aplicação e análise das atividades”, traz a apresentação e a análise das questões do caderno de atividades resolvidas pelos alunos, com seus acertos e/ou equívocos.

Finalmente no capítulo 6 encontram-se as considerações finais deste trabalho, seguido das referências utilizadas, dos anexos e dos apêndices, onde pode ser encontrado o caderno de atividades construído a partir dessa pesquisa, seu produto final.

2 O CÁLCULO NA HISTÓRIA E NO ENSINO

Neste capítulo, procurou-se mostrar o estudo teórico realizado, permeado por um histórico acerca do Cálculo, além de debater sobre o tema Integral Definida tendo como base, entre outras obras e textos, as Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia.

2.1 O Cálculo na História

Segundo Santos Filho (2002), as origens do Cálculo remontam à Grécia antiga, sendo os seus precursores Eudoxo de Cnido (390-338 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). Eudoxo, discípulo de Platão (427-428 a.C.) - fundador da Academia em Atenas, a mais importante da Grécia – foi considerado o maior matemático do seu tempo e desenvolveu o Método da Exaustão, uma base para o Cálculo Integral. Arquimedes desenvolveu métodos para determinar áreas de regiões limitadas por curvas e volumes de regiões limitadas por superfícies, utilizando, muitas vezes, o Método da Exaustão. Aos problemas de Cálculo de áreas de figuras planas, os matemáticos antigos se referiam como “quadratura”, sendo famoso o problema da quadratura do círculo, que nada mais é do que a determinação de um quadrado com a área equivalente à área de um determinado círculo.

Muitos outros matemáticos trabalharam com o Cálculo, alguns tentando provar a sua consistência lógica, outros utilizando o seu poder operacional, sem se preocupar com as questões filosóficas da sua origem.

O francês Pierre de Fermat (1601-1665) abordou a quadratura de hipérbolas infinitas usando um conjunto de retângulos inscritos cujas áreas relacionavam-se como termos de uma Progressão Geométrica. Assim como Fermat, o francês René Descartes (1596-1650) também estava interessado na introdução dos métodos algébricos na geometria, com o objetivo de tornar as soluções independentes das propriedades das curvas, possibilitando, assim, a generalização das soluções. Ambos também fizeram estudos sobre tangentes, utilizando métodos algébricos.

Durante a primeira metade do século XVII, utilizando-se de um método ou outro, os matemáticos já tinham solução, tanto para determinação das tangentes, quanto para a quadratura de curvas do tipo $y = x^n$ (sendo n inteiro e positivo). O

matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) conseguiu relacionar tangentes e quadraturas diretamente, através do conceito de movimento, generalizando e estendendo ideias já desenvolvidas por Galileu, do qual foi aluno, e do italiano Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), seu amigo e sócio. No caso desta curva do movimento, em particular, Torricelli compreendia a relação inversa entre a tangente e a quadratura, porém, não publicou seus trabalhos a respeito do assunto, enquanto estava vivo. Suas ideias foram transmitidas por intermédio do seu discípulo italiano Stefano degli Angeli (1623-1697) aos matemáticos ingleses Isaac Barrow (1630-1677) e James Gregory (1638-1675).

Em um trabalho denominado *Geometriae pars universalis* (A parte universal da Geometria), de 1668, Gregory faz uma exposição contendo operações para determinação de arcos, tangentes, áreas e volumes que estariam vinculados a um trabalho de Cálculo infinitesimal. Esta obra mostra que ele já tinha compreensão da relação inversa entre tangente e quadratura, pois em determinada proposição ao longo do trabalho, ele passa diretamente da quadratura de uma curva à construção da tangente. Barrow, que foi professor de Newton, foi um pouco além, e no seu *Lectiones Geometriae*, de 1670, apresenta o que se conhece como Teorema Fundamental do Cálculo, através da inversibilidade entre uma quadratura e uma tangente.

Ainda no século XVII, com a divulgação dos trabalhos do inglês Isaac Newton (1642-1727) e do alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ocorreu uma significativa mudança na Ciência. Tão significativa que, tradicionalmente, a origem do Cálculo é atribuída a eles. Entretanto, entre a Grécia antiga e o final do século XVII, muita Matemática foi desenvolvida na busca do entendimento dos problemas das quadraturas e das tangentes, o que possibilitou aos dois grandes matemáticos realizarem esta invenção.

Assim, diante do exposto, pode-se, então, resumir o cenário da época em que Newton e Leibniz desenvolviam os seus métodos para o Cálculo:

- o modelo de Arquimedes, embora prestigiado, era pouco usado devido à dificuldade de aplicação prática;
- a representação algébrica conquistava espaço rapidamente;
- a notação de Descartes se propagava rapidamente;
- a pesquisa de métodos gerais com possibilidade de aplicação em todas as curvas ganhava espaço em relação aos métodos utilizados para curvas específicas;

- a quadratura se tornou reconhecida como modelo geométrico para todos os métodos de integração (cubatura, retificação de arcos etc.);

- a relação entre os métodos de construção das tangentes e a determinação dos pontos extremos já estava estabelecida;

- a relação inversa entre integração (quadratura) e diferenciação (determinação das tangentes) já havia sido tratada por muitos matemáticos, tais como Torricelli, Gregory e Barrow, sendo que Barrow publicou uma demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, em 1670;

- a ideia da descrição de curvas por meio da análise de movimentos havia sido usada para determinar tangentes, quadraturas e para relacionar uma com a outra;

- para a quadratura de curvas algébricas, já havia uma regra específica do

tipo: $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$, onde p é um número racional diferente de -1 ;

- interesses crescentes em métodos de tangentes, principalmente com Fermat e Descartes, levaram Frans Van Schooten (1615-1660) a idealizar um algoritmo, ou seja, um conjunto de regras para a passagem do problema na forma da equação de uma curva para a solução final, que seria a construção da tangente; e

- havia um grande interesse na possibilidade de expansão em séries como meios de integração, estimulado principalmente por John Wallis (1616-1703).

A partir da análise do cenário em que se encontrava o estudo do Cálculo, por volta de 1663, coube a Newton estender para todas as curvas e unificar os vários processos e foi Leibniz quem os relacionou através de uma notação eficaz e operacional, ressaltando que ambos o fizeram sem que um conhecesse o trabalho do outro, porém, uma grande polêmica se estabeleceu entre ambos para provar de quem seria a primazia da invenção. Essa polêmica retardou o desenvolvimento da Matemática inglesa em um século, pois a notação de Leibniz que era muito mais flexível e, portanto, mais útil para o desenvolvimento do Cálculo, foi adotada no continente a começar pelos franceses e rejeitada pelos ingleses.

O fato é que Leibniz iniciou seus estudos de Cálculo infinitesimal em 1675 e os publicou no periódico *Acta Eruditorum*, em 1684 (revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782), enquanto Newton só publicou algo relativo ao Cálculo três anos mais tarde, no seu *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Princípios

matemáticos da filosofia natural), onde, em algumas passagens, o Cálculo era abordado, estando, porém, na forma geométrica. Já o tratado *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (O método das fluxões e séries infinitas) foi a mais extensa exposição do seu Cálculo, sendo escrita em 1671, sendo publicado em 1736. Hoje parece bastante claro que a descoberta de Newton antecede a de Leibniz em cerca de 10 anos, e que os trabalhos de Leibniz foram feitos independentemente dos trabalhos de Newton, apesar de Leibniz ter publicado seus trabalhos primeiro.

Para Newton, as quantidades que considerava perceptíveis, porém indefinidamente crescentes, são consideradas fluentes e as velocidades com que elas fluem são consideradas fluxões. Já Leibniz baseou suas descobertas em algumas ideias que se revelaram especialmente importantes, a saber: a busca de um simbolismo e de uma notação, vinculados à sua ideia de uma linguagem simbólica geral, uma vez que ele não estava interessado em resultados especiais, mas em métodos tão gerais quanto possível. Reconheceu, também, que a determinação das tangentes e o cálculo de áreas são processos inversos.

Um dos conceitos básicos do Cálculo de Leibniz é o da Diferencial, onde dy é a diferencial de uma variável y , ou seja, a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de y , e dx é a diferencial de uma variável x , ou seja, a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de x . E foi Leibniz quem criou o atual símbolo da Integral, representando um S , a inicial da palavra Suma, que significa Soma.

Leibniz não publicou suas descobertas imediatamente, apenas nove anos depois, em outubro de 1684, no *Acta eruditorum Lipsiensium* (Atas dos eruditos de Leipzig, o primeiro periódico científico da Alemanha, fundado em 1682), um artigo intitulado “Um novo método para máximos e mínimos assim como para tangentes não impedido por quantidades nem fracionais nem irracionais e um importante tipo de cálculo para elas”. Também com Leibniz ficou estabelecida claramente a ideia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas. O seu simbolismo algébrico se mostrou muito mais eficiente que o de Newton, sendo até hoje adotado universalmente.

De um modo geral, os livros de Cálculo tratam Newton e Leibniz como os inventores do Cálculo, mas entende-se que ao tempo deles já havia muitas contribuições ao seu desenvolvimento, feitas por grandes matemáticos. Newton e Leibniz, na verdade, não inventaram o Cálculo, mas fizeram algo diferente, fizeram

algo maior que seus antecessores, ou, como Newton mesmo disse, em 1676: “Se consegui enxergar mais longe foi porque estava apoiado sobre os ombros de gigantes”.

Porém, mesmo diante do que foi exposto, entende-se que no final das contas, Newton e Leibniz receberam o mérito de serem os inventores do Cálculo, pois:

- os vários métodos infinitesimais dos seus antecessores eram muito restritos a determinadas curvas;

- ambos criaram um sistema coerente de métodos a fim de resolver problemas sobre todos os tipos de curvas (quadraturas, tangentes etc.), independentes de suas naturezas;

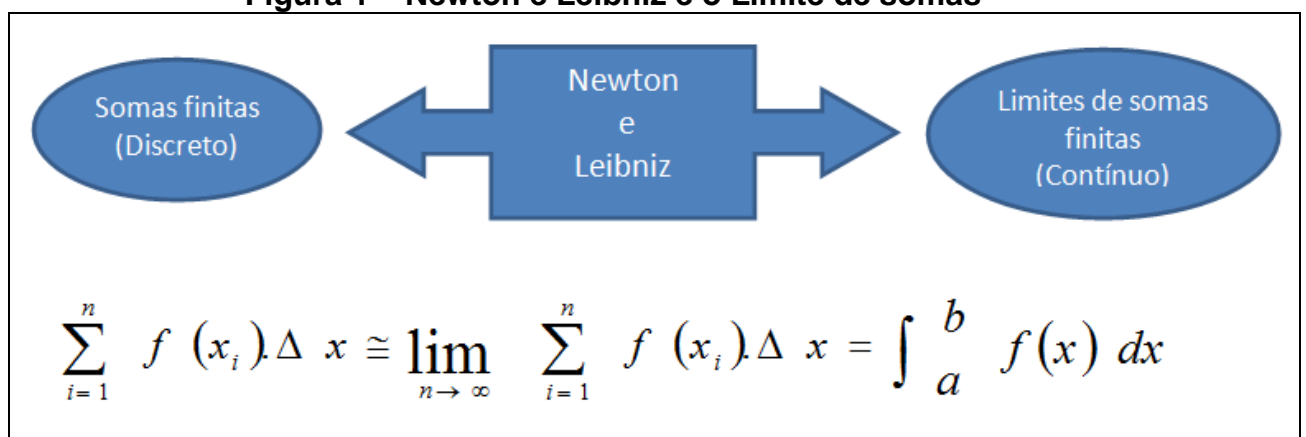
- o Teorema Fundamental do Cálculo foi reconhecido universalmente a partir deles, mas Barrow já o havia demonstrado. Esse é o teorema que trata da relação inversa entre a diferenciação e a integração. Através deste Teorema reconheceu-se o relacionamento recíproco entre os problemas de quadraturas e das tangentes;

- ambos criaram um sistema de notação e de símbolos pelo qual podiam aplicar analiticamente os seus novos métodos, na forma de um algoritmo claro e simples, dando origem ao formulário do Cálculo Integral e Diferencial;

- acrescentaram às somas por aproximações finitas, noções de limite, aperfeiçoando a técnica, tornando-a mais precisa e rápida;

- se promoviam melhor que seus antecessores.

Figura 1 – Newton e Leibniz e o Limite de somas



Fonte: Elaborado pelo autor

2.2 O Cálculo no Ensino

O Cálculo Diferencial e Integral é uma matéria presente em diversos cursos de graduação e pós-graduação. Desdobra-se em disciplinas (Cálculo I, Cálculo II etc.), constituindo parte importante nos currículos dos cursos de Matemática, Física, Química, Engenharias em geral, Economia, entre outros.

Essas disciplinas, normalmente, são consideradas muito difíceis, com altos índices de reprovação, independentemente da instituição de ensino, do curso e do professor. Os pesquisadores, de forma recorrente, creditam tal dificuldade ao ensino de toda a Matemática. A dificuldade em ensinar e/ou aprender Matemática é real nas mais diversas séries, e nos mais diversos cursos. Dificuldade muitas vezes atribuída à formalização excessiva, que esvazia os conteúdos matemáticos de relações com a cultura, e a forte relação entre esses conteúdos, exigindo, assim, uma continuidade na formação do educando. No caso do Cálculo, estes problemas ganham dimensões maiores, já que se fazem necessárias habilidades aritméticas, algébricas e geométricas “adquiridas” na Matemática Elementar, como pré-requisito. Porém, a maioria dos alunos que entra para a faculdade, chega sem esses tais pré-requisitos, sendo que alguns cursos, numa tentativa de amenizar a situação, ainda estabelecem em seus currículos, disciplinas envolvendo os Fundamentos de Matemática Elementar, antes de iniciar o estudo do Cálculo. Mesmo assim, em geral, o problema persiste.

Segundo Santos Filho (2002), no Cálculo inicia-se para o aluno uma nova forma de pensar e traduzir o mundo, sendo esse o momento em que o aluno se vê diante da Matemática Superior. Acredita-se que a dificuldade acontece em decorrência do fato de o aluno iniciante em Cálculo ser colocado diretamente em contato com resultados que foram sistematizados de forma laboriosa desde o século XVII e que representam o coroamento da Ciência Moderna inaugurada pelo italiano Galileu Galilei (1564–1642).

Assim, o ensino de Cálculo, hoje, mantém e impõe essa estrutura, devendo o aluno aprender seguindo um caminho inverso ao desenvolvimento histórico do Cálculo, conforme já constatou Eves (2004, p.417).

Segundo Batista (2010), por exemplo, a ideia básica do Cálculo, que consiste em usar o processo de limite para derivar resultados finitos, remonta aos antigos gregos. Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) teria sido um dos primeiros a usar o

conceito daquilo que hoje chama-se de limite, sem formalização alguma, para calcular a área e o volume de várias figuras planas e sólidas, com as quais lidava no cotidiano, partindo da necessidade e da experiência humana. Sua ideia era inscrever uma série de polígonos regulares, com um número cada vez maior de lados, e, portanto, com medidas cada vez menores, num círculo.

Em confronto com essa ideia, vê-se, hoje, no ensino de Cálculo, que a geometria nem sempre ocupa posição de destaque, sendo as operações algébricas sempre consideradas como mais necessárias. Boyer (1996, p. 440), registra que entre os aspectos mais notáveis na Matemática contemporânea aparece um ressurgimento da geometria, ainda que em vestes modernas. Ele ainda registra a ideia de que “o grande matemático do futuro, assim como o do passado, fugirá do caminho muito palmilhado. No futuro, as grandes ideias deverão ser simplificadoras.”

Portanto, reflexões realizadas nessa direção conduziram o processo de elaboração das atividades da presente dissertação, buscando levar o estudante a visualizar geometricamente a situação e elaborar seu próprio raciocínio de maneira informal, confrontando-o com o das demais pessoas e, claro, acompanhado e questionado pelo professor.

Segundo Courant e Robbins (2000), a Matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Mas, em especial para estudantes de engenharia, ao se aproximar o ensino de Cálculo de um semelhante ponto de partida, parece colocar-lhes muitos obstáculos e dificuldades no caminho da aprendizagem, sendo alguns textos didáticos, às vezes, criticados por tentar apresentar a Matemática com tal proposta.

Dessa forma, uma construção, por aproximação, de um conceito matemático, numa perspectiva mais histórica, parece tornar-se mais eficaz no processo de ensino e contribuir para solidificar o conhecimento do estudante.

2.3 As Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia

As Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia ressaltam que “o desafio que se apresenta ao ensino de engenharia no Brasil é um cenário mundial que demanda uso intensivo da ciência e tecnologia e exige profissionais altamente qualificados.” (BRASIL, 2001, p. 1). Assim, nesse novo cenário, a concepção de currículo como grade curricular é substituída por outro conceito: “o conjunto de

experiências de aprendizado que o estudante incorpora durante o processo participativo de desenvolver um programa de estudos coerentemente integrado.” (BRASIL, 2001, p.1).

É importante, então, compreender o conceito desse processo participativo. Nesse sentido, ainda de acordo com o documento, “[...] entende-se que o aprendizado só se consolida se o estudante desempenhar um papel ativo de construir o seu próprio conhecimento e experiência, com orientação e participação do professor.” (BRASIL, 2001, p. 2).

Além disso, vale ressaltar que a Matemática, a Física e a Informática fazem parte do núcleo de conteúdos básicos do currículo de Engenharia e são trabalhadas ao longo do curso, visando dar condições ao futuro profissional da Engenharia de exercer sua profissão com excelência. Para isso, ainda segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia, é importante que essas disciplinas contribuam para que os alunos adquiram, entre outras, competências e habilidades para:

- a) aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à Engenharia;
 - b) projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;
 - c) conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos;
 - d) identificar, formular e resolver problemas de Engenharia;
 - e) comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica;
 - f) assumir a postura de permanente busca de atualização profissional.
- (BRASIL, 2001).

Dessa forma, os professores dos cursos de Engenharia devem viabilizar aos seus alunos propostas metodológicas que propiciem o desenvolvimento de tais habilidades.

A sequência didática, metodologia utilizada nesta pesquisa, é uma proposta para trabalhar com mais significado, um conteúdo de Cálculo Integral, do núcleo de conteúdos básicos dos currículos das Engenharias, pois ajuda o aluno a adquirir habilidades relacionadas à competência do aprender a aprender, o que lhe permite ter autonomia cada vez maior em sua aprendizagem.

3 INTEGRAL DEFINIDA, CONCEITOS E VISUALIZAÇÕES GEOMÉTRICAS

Um dos grandes avanços da geometria clássica foi obter fórmulas para determinar área de figuras planas como triângulos e círculos, volume de sólidos de revolução, como cilindros, cones e esferas, assim como determinar o comprimento de curvas.

Neste trabalho serão apresentadas algumas maneiras de se calcular área, valor médio, comprimento de arco e volume, de figuras nem sempre conhecidas, tendo, como ferramentas, a notação sigma, a estimação por somas finitas, limites de somas finitas, limite de somas finitas visto como uma Integral Definida, e, por fim, o Teorema Fundamental do Cálculo.

3.1 A notação sigma

Segundo Stochiero (1992),

Desde os tempos imemoriais, quando o homem deparou-se com as primeiras necessidades de contar, tem sido incessante a busca de técnicas e processos que lhe favorecessem os cálculos. Se nos primeiros ensaios houve a utilização dos dedos das mãos ou de pequenos fragmentos de pedra lascada, com o passar dos séculos tais recursos revelaram-se ineficazes. (STOCHIERO, 1992, p.39).

Posteriormente, os egípcios, os babilônios, os gregos e os romanos desenvolveram técnicas mais aprimoradas de contagem. Porém, somente a partir do século IX, através de Mohamed ibn Musa Alchwarizmi, surgiu o sistema de numeração posicional dotado de apenas dez algarismos, contribuindo decisivamente para o avanço da Matemática nos séculos subsequentes. (STOCHIERO, 1992).

Tal qual esse desafio histórico, o estudioso das ciências matemáticas deve trazer dentro de si o cuidado de sempre utilizar uma simbologia simples e adequada que represente, de forma sucinta e inequívoca, as operações que deseja realizar. Assim, se quiser determinar a soma dos 100 primeiros números naturais,

$1+2+3+\dots+100$, usa-se a notação: $\sum_{i=1}^{100} i$

Sendo:

Σ : letra **sigma** maiúscula, do alfabeto grego, correspondente à nossa letra S, de soma. Nas operações matemáticas, tal símbolo recebe a denominação específica de **somatório**;

i : índice da soma, representando onde começa e onde termina a soma.

Assume valores inteiros;

1: limite inferior da soma;

100: limite superior da soma.

Exemplos:

$$\bullet \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$\bullet \sum_{j=1}^5 (j+2) = (1+2) + (2+2) + (3+2) + (4+2) + (5+2) = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$$

$$\bullet \sum_{i=3}^6 \frac{1}{i+1} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{5+1} + \frac{1}{6+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

$$\bullet \sum_{i=1}^n f(i) = f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n)$$

Tem-se, como propriedades do somatório, portanto, segundo Stochiero (1992):

$$\text{i) } \sum_{i=1}^n k = k.n, \text{ sendo } k \text{ uma constante dada.}$$

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^n k.f(i) = k.\sum_{i=1}^n f(i)$$

$$\text{iii) } \sum_{i=1}^n [f(i) + g(i)] = \sum_{i=1}^n f(i) + \sum_{i=1}^n g(i)$$

$$\text{iv) } \sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0) \text{ (STOCHIERO, 1992, p.41).}$$

Além disso, o Cálculo Somatório apresenta algumas igualdades notáveis de grande utilidade, entre as quais podem ser citadas como mais utilizadas:

A soma dos primeiros n inteiros positivos :

A história (STOCHIERO, 1992) diz que Gauss, orientador de Riemann, a descobriu por volta dos 8 anos de idade:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

A soma dos quadrados dos primeiros n inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exemplo 1: Calcular o somatório em cada caso abaixo:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^3 7 = 7 \cdot 3 = 21$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^3 7i = 7 \cdot \sum_{i=1}^3 i = 7 \cdot (1 + 2 + 3) = 7 \cdot 6 = 42$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^3 (2i - 5) = \sum_{i=1}^3 2i - \sum_{i=1}^3 5 = 2 \cdot \sum_{i=1}^3 i - 5 \cdot 3 = 2 \cdot (1 + 2 + 3) - 15 = 2 \cdot 6 - 15 = -3$$

Exemplo 2: Calcular a soma dos 100 primeiros números naturais:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = 5050.$$

Exemplo 3: Calcular a soma dos quadrados dos 100 primeiros números naturais:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{100 \cdot (100+1) \cdot (2 \cdot 100 + 1)}{6} = 338350. \text{ (STOCHIERO, 1992,}$$

p.44).

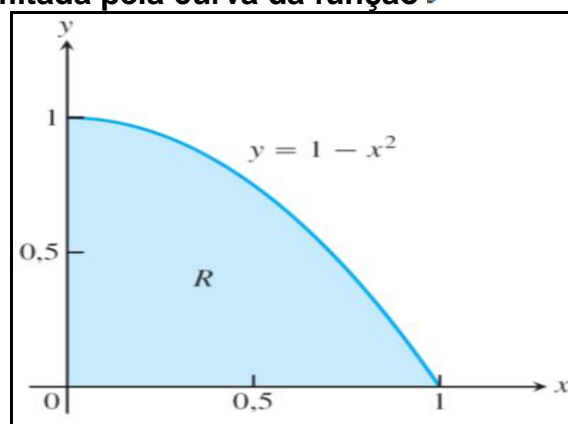
3.2 Estimando com somas finitas

A ideia básica da integração é que muitas quantidades podem ser calculadas quando divididas em pedaços menores e, então, soma-se a contribuição de cada parte. Essas somas finitas representam a base da definição da integração, podendo ser utilizadas em várias aplicações, como áreas, volumes e comprimentos de curvas.

3.2.1 Área

Segundo Thomas, Weir e Hass (2009), embora não se tenha ainda uma fórmula geométrica simples para calcular a área de formas com contorno curvo, como a região R , é possível aproximá-la de um modo simples, utilizando retângulos para preencher a área. Assim, quanto maior for a quantidade de retângulos utilizados para preencher a mesma área, menor será o Δx , e, conseqüentemente, maior será a precisão da aproximação.

Figura 2 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p.354.

O cálculo da área, portanto, pode ser realizado através da soma das áreas dos retângulos, pela fórmula:

$$S_n = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n$$

Logo, a medida da área é dada por: $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ ou $S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$,

Onde:

Δx_i é a medida da base do retângulo ou o comprimento do intervalo $[x_i - x_{i-1}]$;

c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_i - x_{i-1}]$;

$f(c_i)$ é a imagem de c_i , ou melhor, a medida da altura do retângulo;

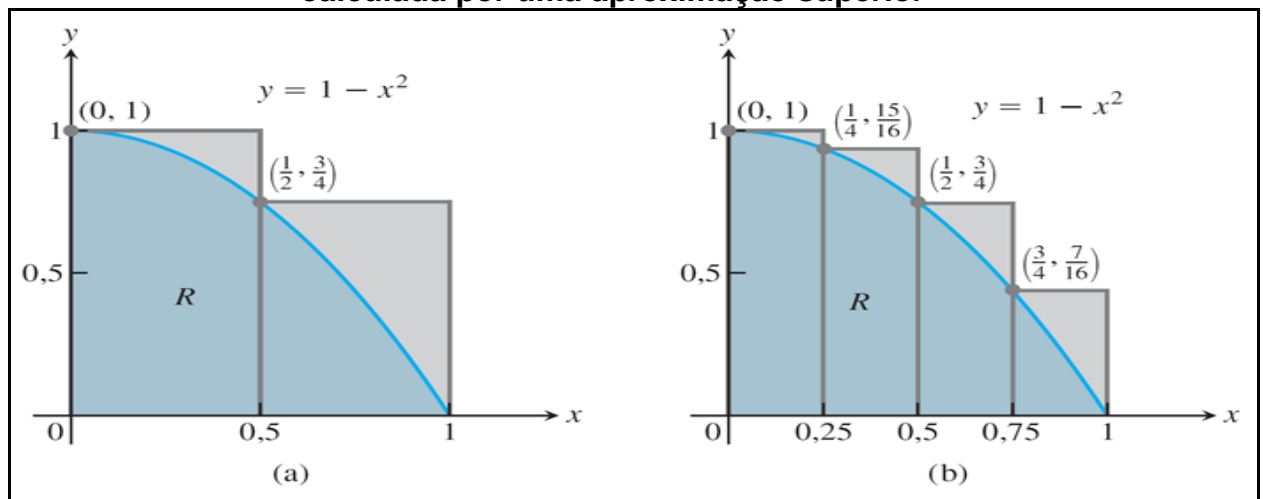
$f(c_i) \cdot \Delta x_i$ é o produto que dá a área do retângulo.

S_n é a soma das áreas dos n retângulos.

Observe que para se calcular a medida da área da figura 1, serão utilizados alguns retângulos, como será visto adiante.

Como mostrado na figura 3, nota-se que em (a), foram utilizados dois retângulos. Somando essas áreas, obtém-se 0,875 u.a., uma aproximação superior à área da região R. Já em (b), foram utilizados quatro retângulos. Somando essas áreas obtém-se 0,78125 u.a., uma aproximação superior, porém, melhor.

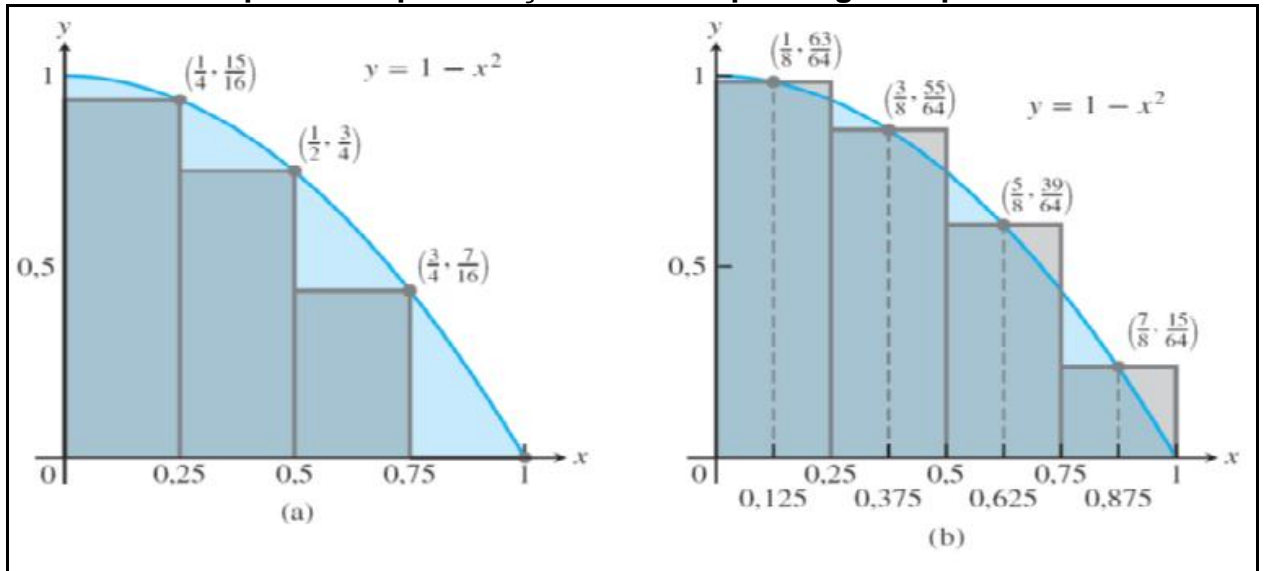
Figura 3 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação superior



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p.355.

Já na figura 4, em (a), foram usados três retângulos. Somando essas áreas, obtemos 0,53125 u.a., uma aproximação inferior à área da região R. Em (b), foi utilizado o ponto médio x de cada base de retângulo para determinar a altura $y=f(x)$. Somando essas áreas, obtém-se 0,671875 u.a. Essa é a regra do ponto médio, que entre as formas utilizadas, é a que melhor se aproxima de R.

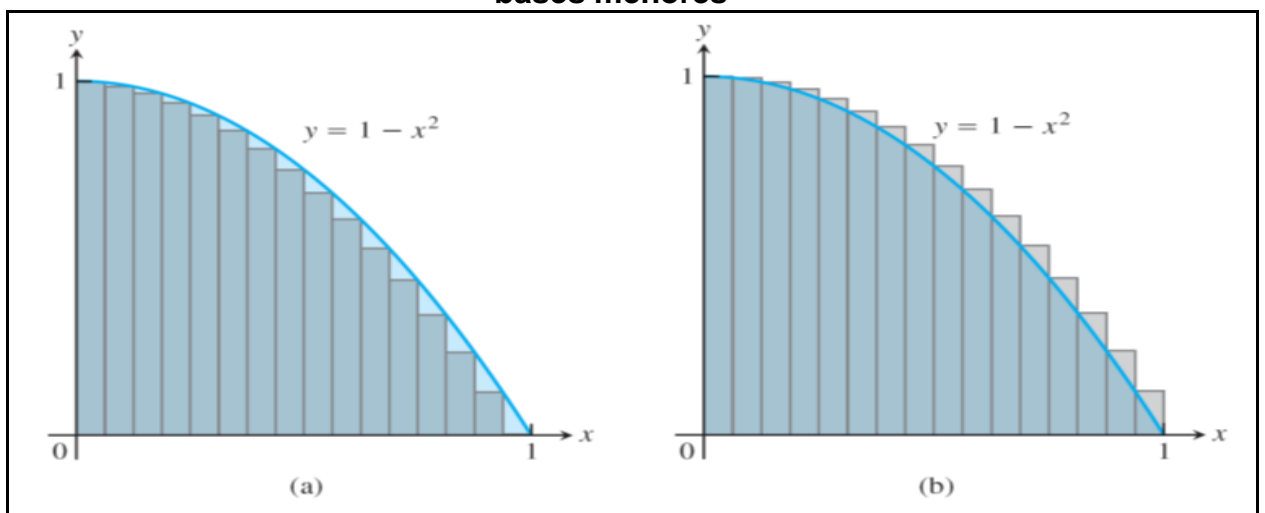
Figura 4 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação inferior e pela regra do ponto médio



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 356.

Vale a pena, portanto, observar que quanto menores forem as medidas das bases desses retângulos (Δ_x), mais subintervalos serão obtidos e, portanto, mais próximos da área real se estará, como indicado na figura 5:

Figura 5 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação inferior e por uma aproximação superior, com bases menores



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 357.

Como visto, em (a), foram utilizados dezesseis retângulos inscritos. Somando essas áreas, obtém-se 0,634765625 u.a., uma aproximação inferior à área da região R. Já em (b), também foram utilizados dezesseis retângulos circunscritos. Somando

essas áreas, obtém-se 0,697265625 u.a., uma aproximação superior. A regra do ponto médio para esses 16 retângulos semi-inscritos dá uma aproximação da área total no valor de 0,6669921875, ou seja, bem próxima da área real. Eis as aproximações finitas da área de R (TABELA 1):

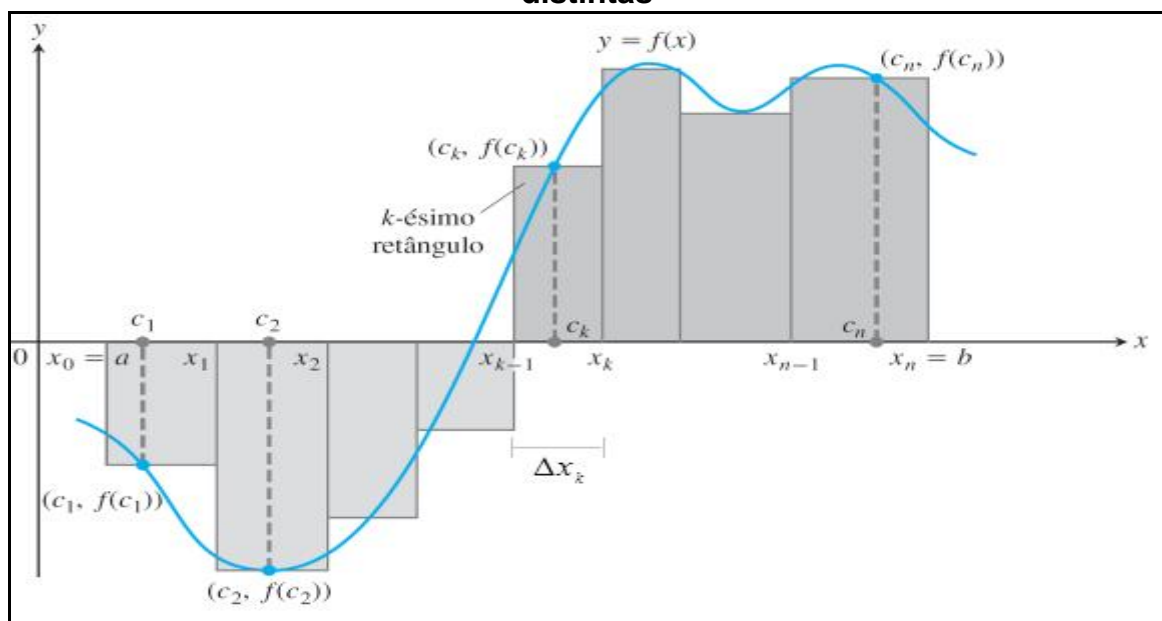
Tabela 1 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação inferior, pela regra do ponto médio e por uma aproximação superior, com número de subintervalos distintos

| Número de subintervalos | Soma inferior | Regra do ponto médio | Soma superior |
|--------------------------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|
| 2 | ,375 | ,6875 | ,875 |
| 4 | ,53125 | ,671875 | ,78125 |
| 16 | ,634765625 | ,6669921875 | ,697265625 |
| 50 | ,6566 | ,6667 | ,6766 |
| 100 | ,66165 | ,666675 | ,67165 |
| 1.000 | ,6661665 | ,66666675 | ,6671665 |

Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p.357.

Na figura 6, observa-se que os retângulos aproximam a região que fica entre a curva da função $f(x)$ e o eixo x . Nesse caso, os n subintervalos têm larguras diferentes.

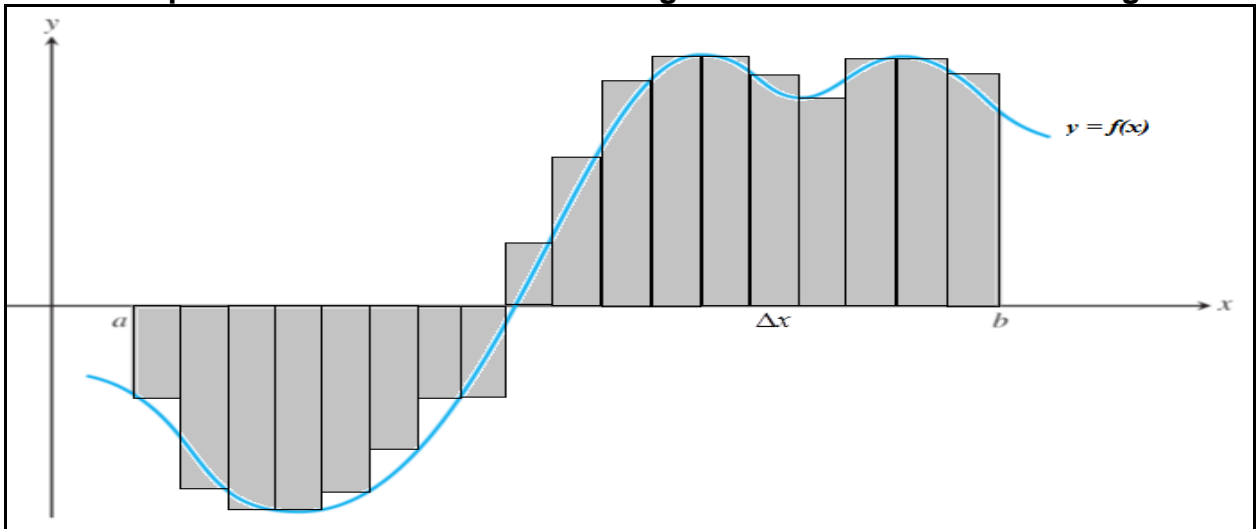
Figura 6 - Área limitada pela curva da função $y = f(x)$, no intervalo $[a,b]$, calculada por uma soma de áreas de retângulos com medidas de bases distintas



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 371.

Já na figura 7, os n subintervalos têm a mesma largura, que pode ser calculada por $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde Δx é a largura dos mesmos.

Figura 7 - Área limitada pela curva da função $y = f(x)$, no intervalo $[a,b]$, calculada por uma soma de áreas de retângulos com medidas de bases iguais



Fonte: Adaptada de Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 370.

Exemplo:

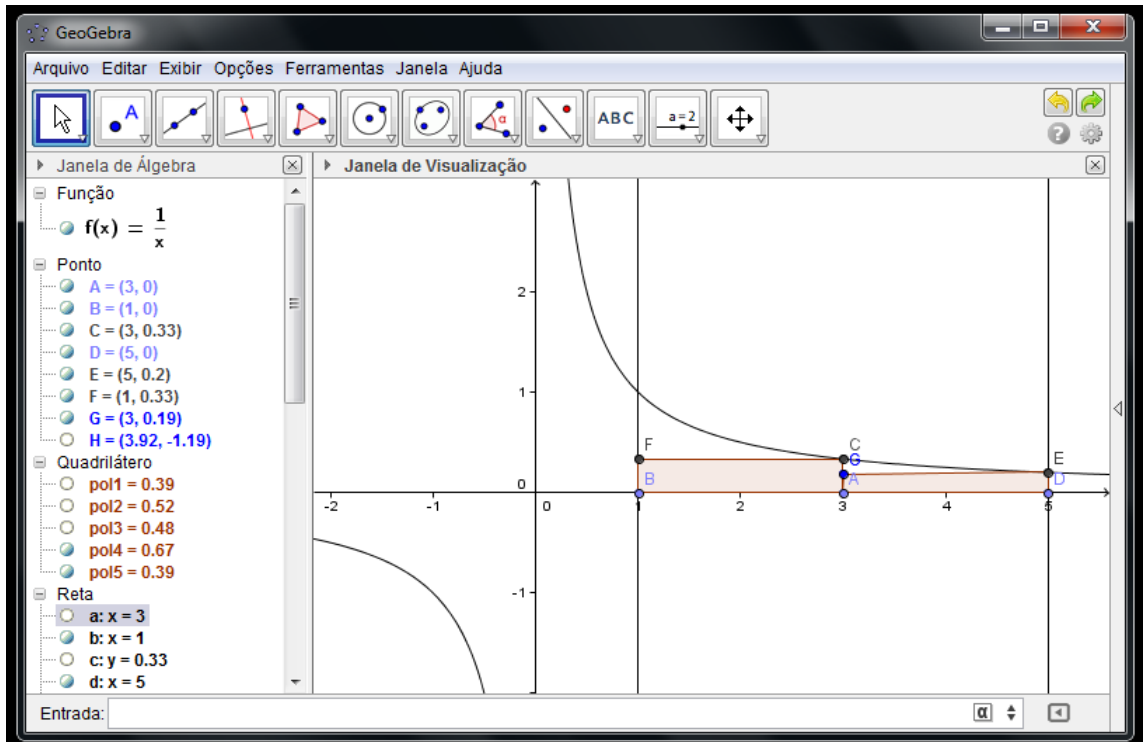
Através das aproximações finitas, estimar a área sob a curva da função

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ entre } x=1 \text{ e } x=5 \text{ utilizando:}$$

a) Uma soma inferior com dois retângulos de iguais larguras.

Tendo, como base o trabalho com o *software* GeoGebra, tem-se, então, a figura 8, a seguir:

Figura 8 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por uma soma inferior com dois retângulos de igual largura

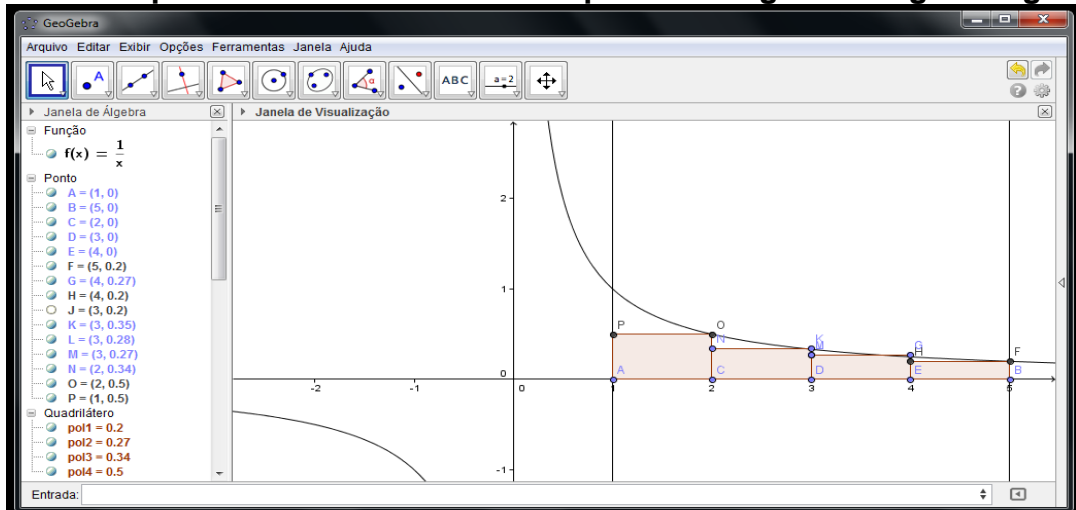


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

No trabalho com o *software* GeoGebra, tem-se, então, como medida da soma das áreas dos retângulos: $0,67+0,39 = 1,06$ u.a.

b) Uma soma inferior com quatro retângulos de iguais larguras.

Figura 9 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por uma soma inferior com quatro retângulos de igual largura

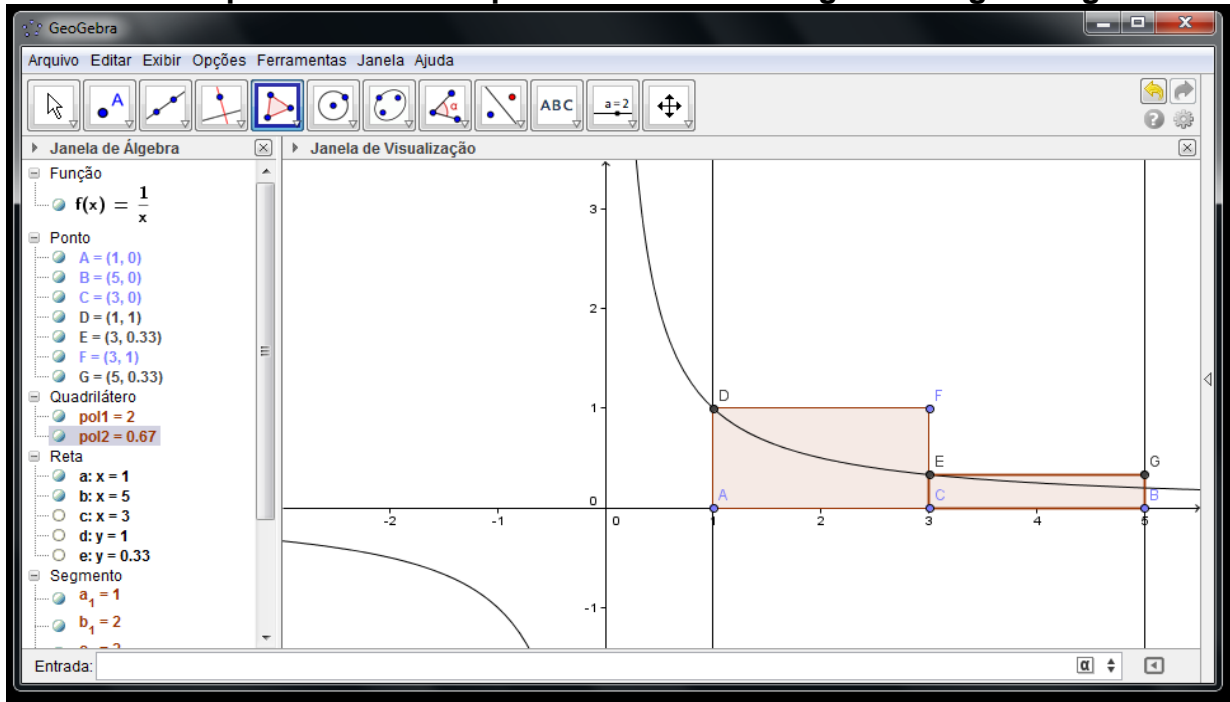


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Como se pode notar, pela figura 8, tem-se, como área = $0,2+0,27+0,34+0,5 = 1,31$ u.a.

c) Uma soma superior com dois retângulos de iguais larguras.

Figura 10 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por uma soma superior com dois retângulos de igual largura

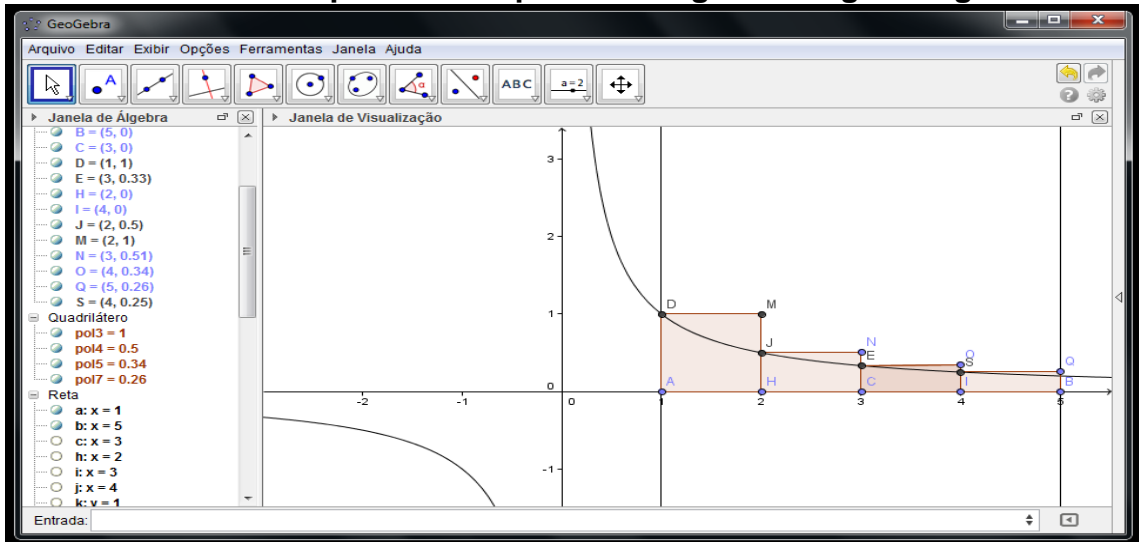


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Como pode ser notado na figura 10, o valor da área limitada foi de $2 + 0,67 = 2,67$ u.a.

d) Uma soma superior com quatro retângulos de iguais larguras.

Figura 11 - Área limitada pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por uma soma superior com quatro retângulos de igual largura

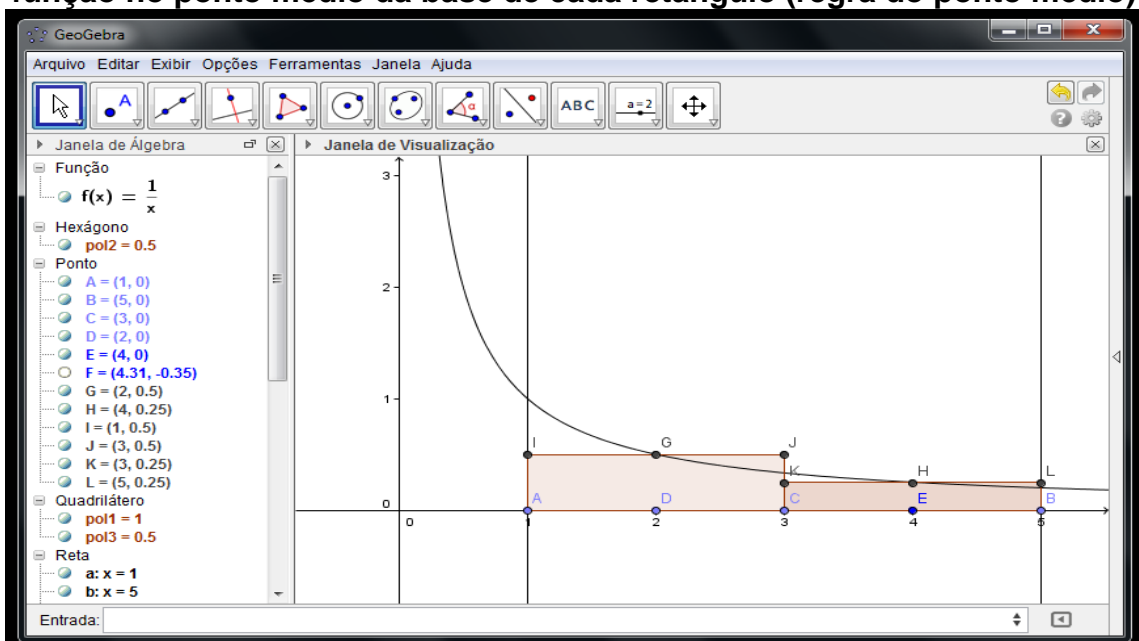


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Portanto, a área encontrada foi de $1 + 0,5 + 0,34 + 0,26 = 2,1$ u.a.

e) Dois retângulos cujas alturas sejam dadas pela imagem da função no ponto médio da base do retângulo (regra do ponto médio).

Figura 12 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por dois retângulos cujas alturas são dadas pelas imagens da função no ponto médio da base de cada retângulo (regra do ponto médio)

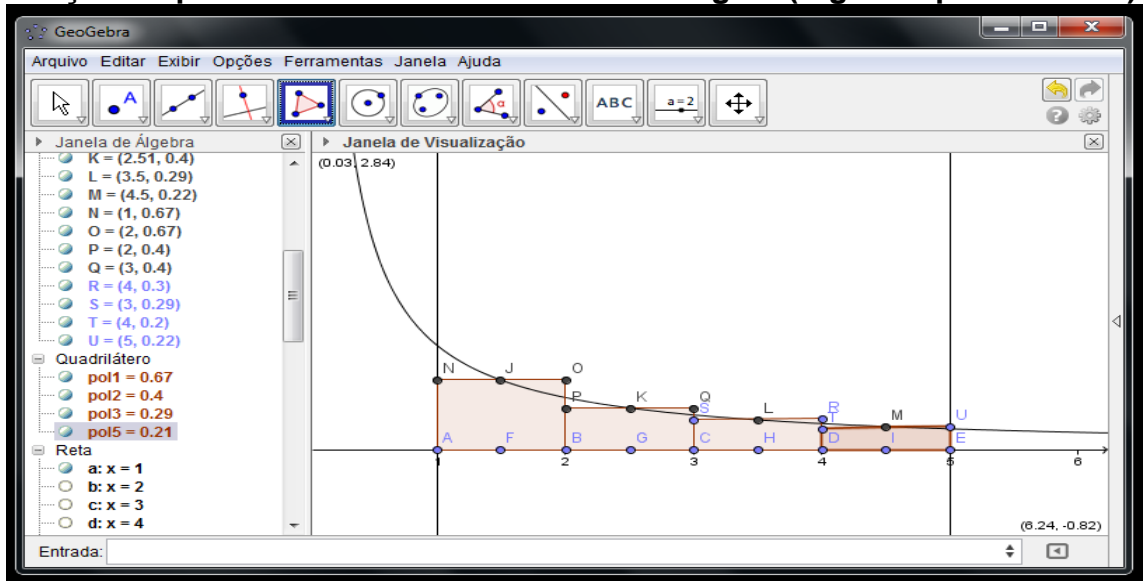


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

A área calculada pelo *software* dos retângulos foi de $1 + 0,5 = 1,5$ u.a.

f) Quatro retângulos cujas alturas sejam dadas pela imagem da função no ponto médio da base do retângulo (regra do ponto médio).

Figura 13 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por quatro retângulos cujas alturas são dadas pelas imagens da função no ponto médio da base de cada retângulo (regra do ponto médio)



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

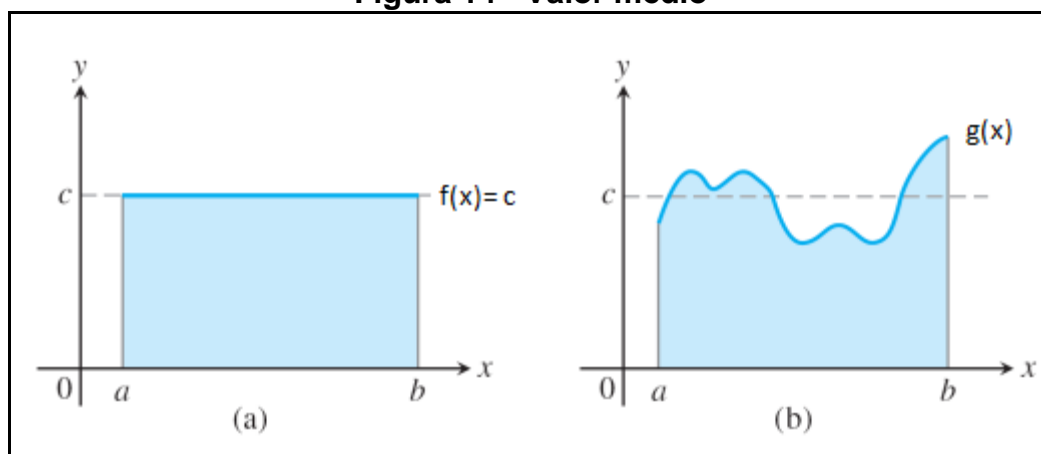
Dessa forma, a partir do *software* utilizado, pode-se notar que a área = $0,67 + 0,4 + 0,29 + 0,21 = 1,57$ u.a.

Pode-se inferir, portanto, diante dos exercícios exemplificados que quanto menores forem as medidas das bases desses retângulos, mais subintervalos teremos e, portanto, mais próximos da área real estaremos. Em todos os casos, as aproximações chegarão perto da área real, desde que todos os retângulos sejam suficientemente estreitos. Dessa forma, quando se tem poucos retângulos, a regra do ponto médio é a que melhor se aproxima.

3.2.2 Valor Médio

Geometricamente, o valor médio de $f(x)$, sendo $f(x) > 0$, é a altura média de um retângulo, utilizada para calcular a área aproximada entre a curva e o eixo das abscissas, num determinado intervalo (FIGURA 14).

Figura 14 - Valor médio



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 360.

Em (a), foi utilizada uma figura cuja fórmula para o cálculo de área é conhecida:

Área do retângulo = Base x Altura

$$A = (b - a) \cdot c$$

Logo,

$$c = \frac{A}{b - a}$$

O valor médio de $f(x) = c$ no intervalo $[a, b]$ é, portanto, a área do retângulo dividida por $(b - a)$. Em (b), já foi utilizada uma figura cuja fórmula para o cálculo de área é desconhecida. Nem por isso o procedimento será diferente, pois a ideia continua sendo a mesma. O valor médio de $g(x)$, ou seja, a altura média da área abaixo da curva, no intervalo $[a, b]$ é, portanto, a tal área dividida por $(b - a)$.

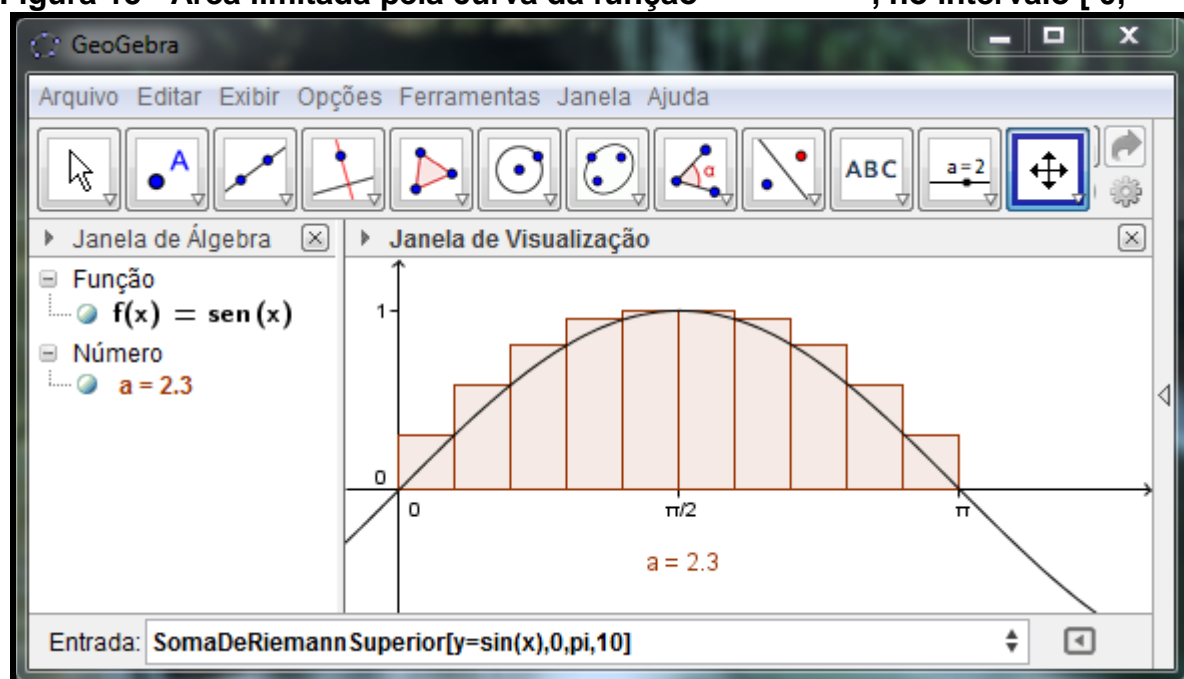
Portanto, para se calcular o valor médio, deve-se, primeiro, calcular a medida da área e, então, dividi-la pelo comprimento da base. O resultado obtido será o tal valor médio, ou melhor, a altura média. Multiplicando o comprimento da base pelo valor médio, obtém-se a área da figura. Caso não seja possível calcular as medidas exatas, serão obtidas medidas bem próximas.

Exemplo:

Através das aproximações finitas, estimar a área sob a curva da função $f(x) = \text{sen}x$, entre $x = 0$ e $x = \pi$ e, logo em seguida, estimar o valor médio da função, nesse intervalo, utilizando dez retângulos circunscritos:

Resolução com o auxílio do *software* GeoGebra:

Figura 15 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \text{sen}x$, no intervalo $[0, \pi]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Pode-se notar na figura 14, que, após a inserção dos dados no *software*, chegou-se às seguintes medidas:

Área total $\cong 2,3$ u. a.

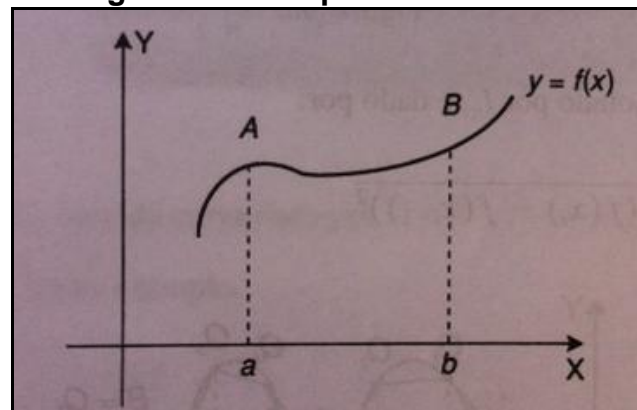
Comprimento da base total = $\pi \cong 3,14$ u.c.

Logo, o valor médio é igual a $2,3 \div 3,14 \cong 0,73$ u.c.

3.2.3 Comprimento do arco de uma curva plana

Segundo Flemming e Gonçalves (2006, p. 335), “a representação de uma função $y = f(x)$ num intervalo $[a,b]$ pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. A porção da curva do ponto A ($a, f(a)$) ao ponto B ($b, f(b)$) é chamada arco”. O objetivo, portanto, é estimar o comprimento desse arco, intuitivamente (FIGURA 16).

Figura 16 - Comprimento do arco

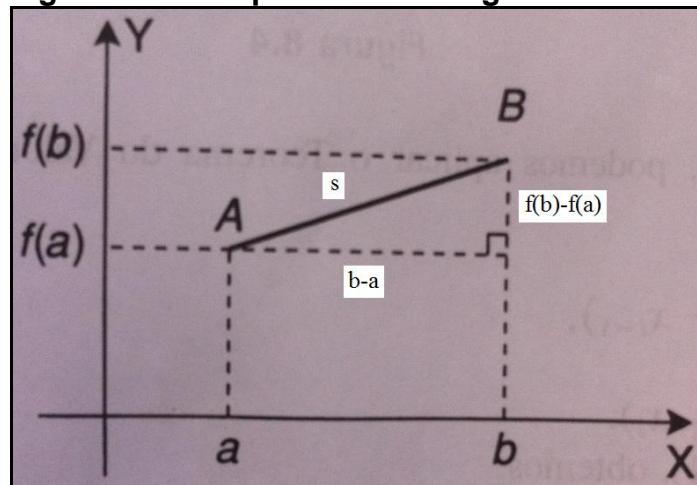


Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 335.

Observe:

a) O gráfico abaixo no intervalo $[a, b]$ representa um segmento de reta (FIGURA 17).

Figura 17 - Comprimento do segmento de reta



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves, 2006, p. 335.

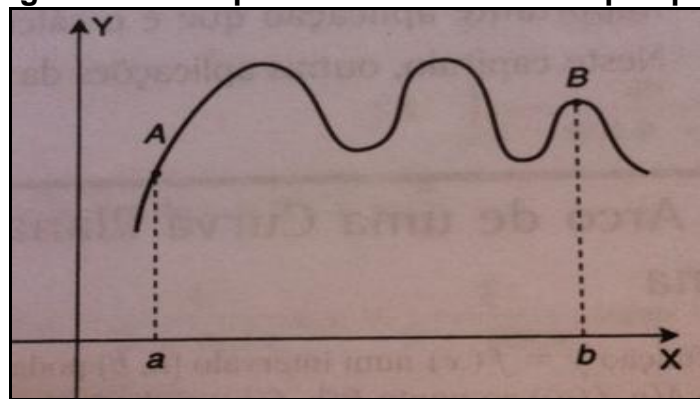
O comprimento s desse segmento AB indicado na figura 16 pode ser calculado através do Teorema de Pitágoras. Veja:

$$s^2 = (b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2$$

$$s = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$$

b) Já o gráfico abaixo, no mesmo intervalo, representa uma curva qualquer (FIGURA 18).

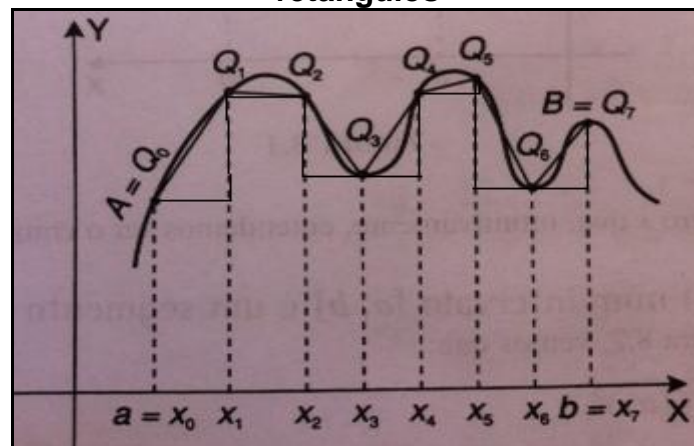
Figura 18 - Comprimento de uma curva qualquer



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 336.

O comprimento s dessa curva mostrada na figura 18 pode ser calculado através da soma de n pequenos segmentos, obtidos também pelo Teorema de Pitágoras. Nesse caso, cada segmento estará representando a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Figura 19 - Comprimento de uma curva qualquer, através da soma de n pequenos segmentos, representados pelas hipotenusas dos triângulos retângulos



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves, 2006, p. 336.

Assim, S_n é a soma das medidas das hipotenusas determinadas no intervalo dado. Observe que quanto menor for o Δ_x , mais próximo do comprimento real se estará. Portanto:

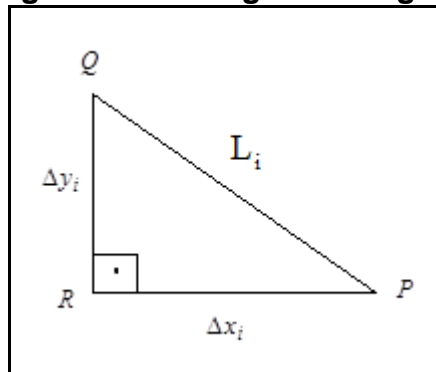
$$S_n = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (f(x_1) - f(x_0))^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} + \dots + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}$$

Logo,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}.$$

Analisando sob outro aspecto cada triângulo gerado, tem-se, através do Teorema de Pitágoras (FIGURA 20):

Figura 20 - Triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, S_n é a soma das medidas das hipotenusas L_i

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i$$

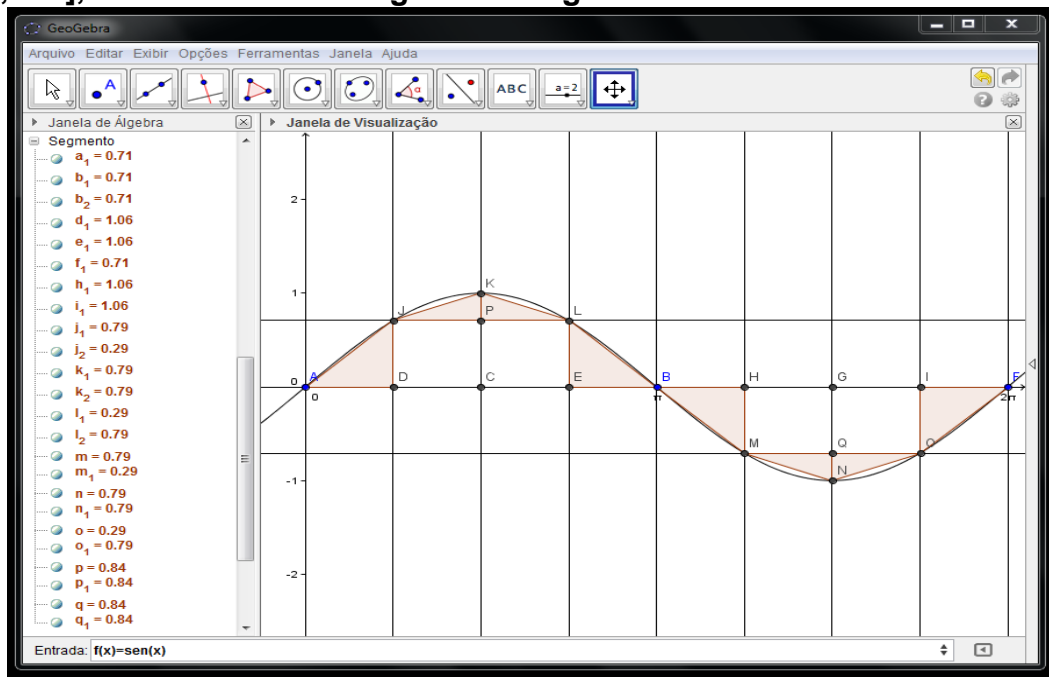
$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left[1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right]} \cdot \Delta x_i$$

Exemplo:

Através das aproximações finitas, estimar o comprimento do arco da curva da função $f(x) = \text{sen}x$, entre $x = 0$ e $x = 2\pi$, utilizando oito triângulos retângulos com mesma medida de base.

Resolução com o auxílio do *software* GeoGebra:

Figura 21 - Comprimento do arco da curva da função $f(x) = \text{sen}x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, utilizando oito triângulos retângulos com mesma medida de base



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Dessa forma, as medidas dos catetos do triângulo ADJ são dadas por:

$$\overline{AD} = 0,79$$

$$\overline{DJ} = 0,71$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, pode-se calcular a medida da hipotenusa

\overline{AJ} :

$$\overline{AJ}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DJ}^2$$

$$\overline{AJ}^2 = 0,79^2 + 0,71^2$$

$$\overline{AJ}^2 = 1,1282$$

$$\overline{AJ} = 1,06$$

Obs.: Como o GeoGebra calcula a medida da hipotenusa, não é necessário utilizar o Teorema de Pitágoras. Portanto, a partir de agora, serão apresentadas as medidas das outras sete hipotenusas já calculadas pelo *software*.

Triângulo JPK:

$$\overline{JK} = 0,84$$

Triângulo KLP:

$$\overline{KL} = 0,84$$

Triângulo BEL:

$$\overline{BL} = 1,06$$

Triângulo BHM:

$$\overline{BM} = 1,06$$

Triângulo MNQ:

$$\overline{MN} = 0,84$$

Triângulo NOQ:

$$\overline{NO} = 0,84$$

Triângulo FIO:

$$\overline{OF} = 1,06$$

Agora, basta somar as medidas das oito hipotenusas obtidas, para se estimar o comprimento da curva, no intervalo dado.

Como $S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}$, tem-se, então:

$$S_8 = 1,06 + 0,84 + 0,84 + 1,06 + 1,06 + 0,84 + 0,84 + 1,06$$

$$S_8 = 7,6 \text{ u.c.}$$

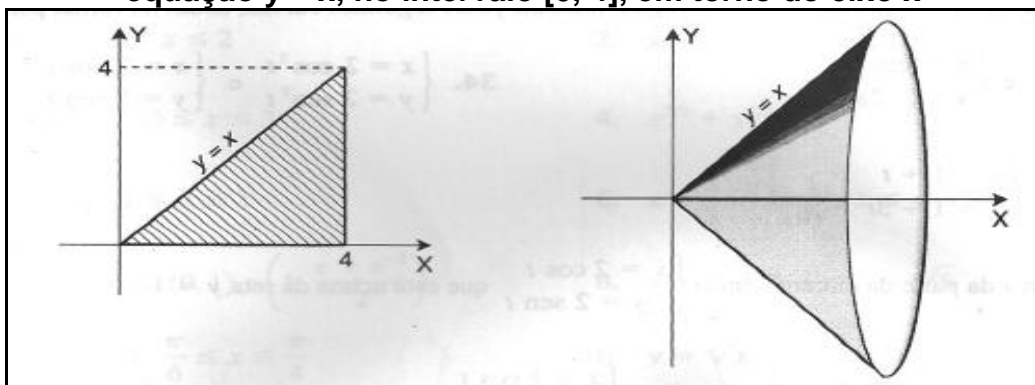
3.2.4 Volume de um sólido de revolução

Segundo Flemming e Gonçalves (2006), fazendo uma região plana girar em torno de uma reta no plano, obtém-se um sólido, que é chamado sólido de revolução. A reta ao redor da qual a região gira é chamada de eixo de revolução.

Observe alguns casos:

- a) Girando a região limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x$ e $x = 4$ em torno do eixo x , o sólido de revolução obtido é um cone, como indicado na figura 22.

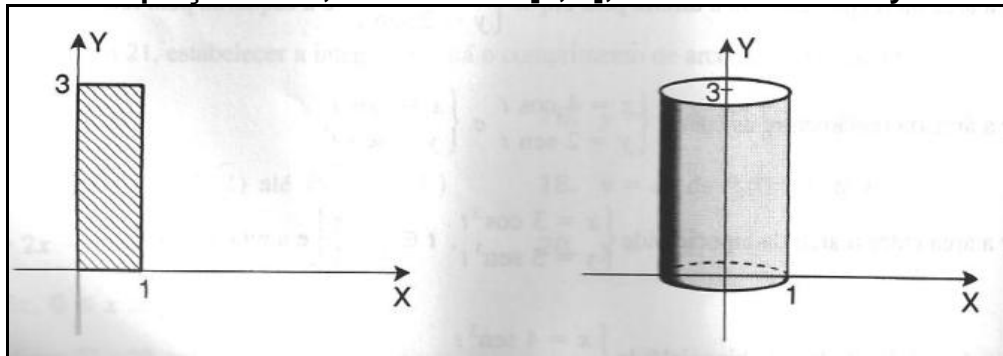
Figura 22 - Visualização do sólido gerado a partir da rotação da reta de equação $y = x$, no intervalo $[0, 4]$, em torno do eixo x



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 346.

- b) Girando o retângulo limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 3$ em torno do eixo y , obtém-se um cilindro (FIGURA 23).

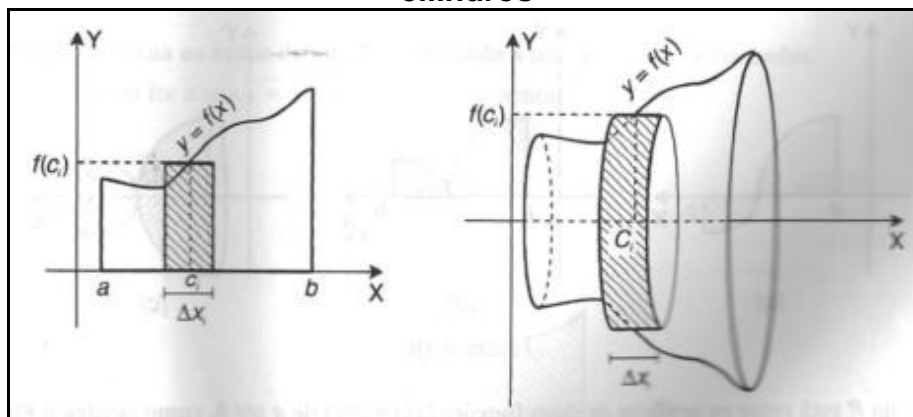
Figura 23 - Visualização do sólido gerado a partir da rotação da reta de equação $x = 1$, no intervalo $[0, 3]$, em torno do eixo y



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 346.

- c) Girando uma região plana qualquer em torno do eixo x , obtém-se o sólido de revolução representado na figura 24.

Figura 24 - Visualização do sólido gerado a partir da soma dos volumes dos cilindros



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 347.

Assim, seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhe-se um ponto qualquer c_i .

Para cada i , $i = 1, \dots, n$, constrói-se um retângulo R_i , de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo x , o sólido de revolução obtido passa a ser um cilindro. No cilindro, $f(c_i)$ passa a ser a medida do raio e Δx_i passa a ser a medida da altura, cujo volume é dado por: $V = \text{Área da base} \times \text{altura}$. Assim,

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

A soma dos volumes dos n cilindros, pode ser representada por V_n :

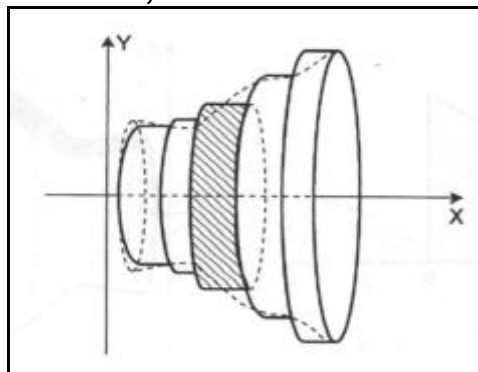
$$V_n = \pi \cdot f(c_1)^2 \cdot \Delta x_1 + \pi \cdot f(c_2)^2 \cdot \Delta x_2 + \dots + \pi \cdot f(c_n)^2 \cdot \Delta x_n$$

$$V_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i \text{ ou } V_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Essa fórmula dá uma aproximação do volume do sólido representado na figura 23.

A figura 25 ilustra a soma dos volumes dos cilindros se aproximando do volume real.

Figura 25 - Visualização do sólido gerado a partir da soma dos volumes dos cilindros, com alturas menores



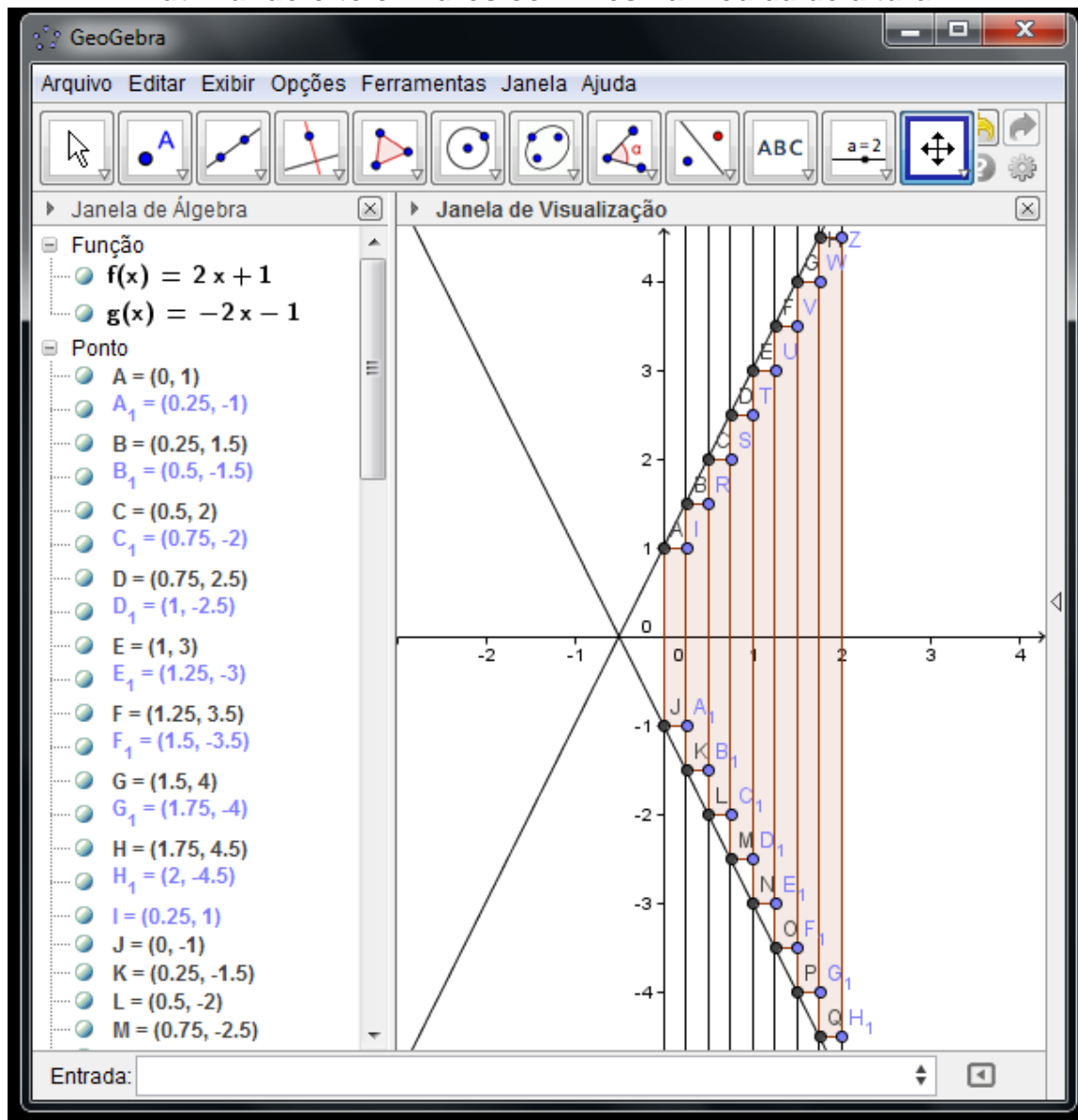
Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 348.

Exemplo:

Através das aproximações finitas, estimar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da reta $f(x) = 2x + 1$ em torno do eixo x , no intervalo $[0, 2]$, utilizando oito cilindros com mesma medida de altura.

Resolução com o auxílio do software GeoGebra:

Figura 26 - Volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva de equação $f(x) = 2x + 1$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando oito cilindros com mesma medida de altura



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Essa figura 26 apresenta a vista lateral do sólido gerado, obtendo-se oito cilindros de mesma altura com raios que variam de 1 a 4,5 u.c. A partir daí, calcula-se o volume de cada um deles, somando-os a fim de calcular o volume aproximado, como a seguir:

$$\text{Volume 1: } \pi \cdot 1^2 \cdot 0,25 \approx 0,78 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 2: } \pi \cdot 1,5^2 \cdot 0,25 \approx 1,77 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 3: } \pi \cdot 2^2 \cdot 0,25 \approx 3,14 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 4: } \pi \cdot 2,5^2 \cdot 0,25 \approx 4,9 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 5: } \pi \cdot 3^2 \cdot 0,25 \approx 7,07 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 6: } \pi \cdot 3,5^2 \cdot 0,25 \approx 9,62 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 7: } \pi \cdot 4^2 \cdot 0,25 \approx 12,57 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 8: } \pi \cdot 4,5^2 \cdot 0,25 \approx 15,9 \text{ u.v}$$

Tem-se, então, o volume total aproximado:

$$V_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

$$V_8 \approx 0,78 + 1,77 + 3,14 + 4,9 + 7,07 + 9,62 + 12,57 + 15,9$$

$$V_8 \approx 55,75 \text{ u.v}$$

Observe que quanto menor for a medida do intervalo da altura do cilindro, ou seja, a medida de Δx_i , mais cilindros são obtidos e mais próximos do volume real sua soma estará.

3.3 Limites de somas finitas

Como visto, as aproximações de somas finitas descritas anteriormente ficavam mais precisas conforme o número de termos crescia e a medida Δx_i dos subintervalos diminuía.

O exemplo a seguir (STOCHIERO, 1992, p. 50) mostra como calcular um valor limite quando a base do retângulo tende a zero e o número de retângulos cresce rumo ao infinito, ou seja, tende ao infinito.

“Calcular a área limitada pela reta $f(x) = x - 1$ e pelo eixo x , no intervalo $[1, 5]$, utilizando o limite de somas.”

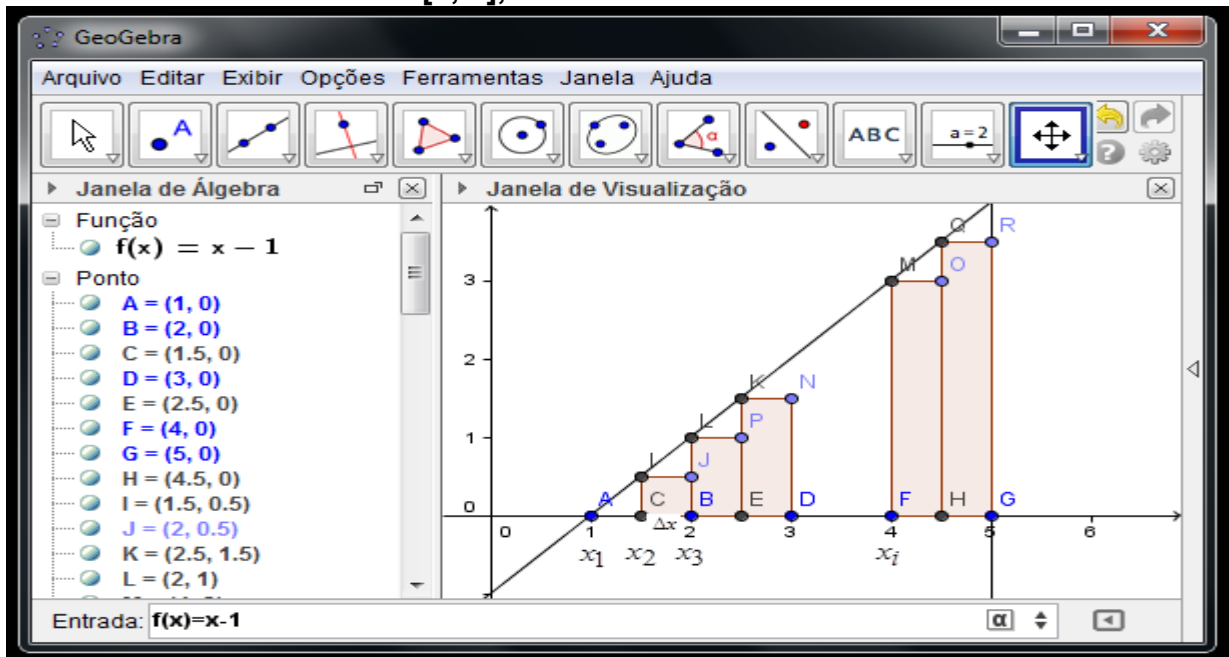
Isso será feito dividindo o intervalo em n subintervalos iguais e utilizando retângulos inscritos.

Ainda segundo Stochiero (1992),

[...] todo o raciocínio desenvolvido com a utilização dos retângulos inscritos também é válido para os retângulos circunscritos. Ao considerarmos o número n de retângulos circunscritos suficientemente grande, os fragmentos de área em excesso (que extrapolam a região dada) também serão desprezíveis e o resultado encontrado será o mesmo. Analogamente, a utilização de retângulos semi-inscritos nos conduz ao mesmo resultado. (STOCHIERO, 1992, p.54).

O que foi dito por Stochiero (1992) pode ser visualizado a partir da figura 27:

Figura 27 - Área limitada pela curva de equação $f(x) = x - 1$ e pelo eixo x , no intervalo $[1, 5]$, utilizando o limite de somas



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Assim, como pode ser notado na figura 27, tem-se que:

Número de subintervalos (ou número de retângulos): n

Comprimento de cada subintervalo x_i (ou comprimento da base de cada

retângulo): $\Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$

Altura de cada retângulo: $f(x_i)$

Percebe-se, então, que há, no exemplo acima, uma boa aproximação da área desejada, somando as áreas dos retângulos, ou seja, através do somatório:

$$A = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i.$$

Entende-se, ainda, que quanto menor for a medida da base do retângulo, mais retângulos no mesmo intervalo são obtidos e, portanto, mais próximos da área

real sua soma estará. Por isso, surgiu a necessidade de utilizar o Limite para aprimorar a eficácia do cálculo, conforme fórmula a seguir:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Vale a pena observar que aumentando o número n de retângulos indefinidamente, ou seja, $n \rightarrow \infty$, conseqüentemente, o comprimento de sua base Δx vai tendendo a zero, ou seja, $\Delta x \rightarrow 0$. Por isso, pode-se escrever a fórmula da área de outra forma também, quer seja:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Assim, voltando aos dados do exercício, tem-se que Δx é constante e que $f(x_i)$ varia de acordo com o intervalo, sendo necessário, então, determinar uma expressão para representar $f(x_i)$.

Analisando novamente a figura 26 entende-se que:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1 + \Delta x$$

$$x_3 = 1 + 2\Delta x$$

$$x_4 = 1 + 3\Delta x$$

.

.

.

$$x_i = 1 + (i-1)\Delta x$$

$$x_i = 1 + (i-1) \cdot \frac{4}{n}$$

Logo,

$$f(x_i) = x_i - 1$$

$$f(x_i) = 1 + (i-1) \cdot \frac{4}{n} - 1$$

$$f(x_i) = (i-1) \cdot \frac{4}{n}$$

Portanto, a área poderá ser calculada pela fórmula:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (i-1) \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \cdot \left(\frac{n^2 - n}{2} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} (n^2 - n)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} - n \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 - \frac{8}{n} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \cdot \left(\frac{n^2 + n - 2n}{2} \right)$$

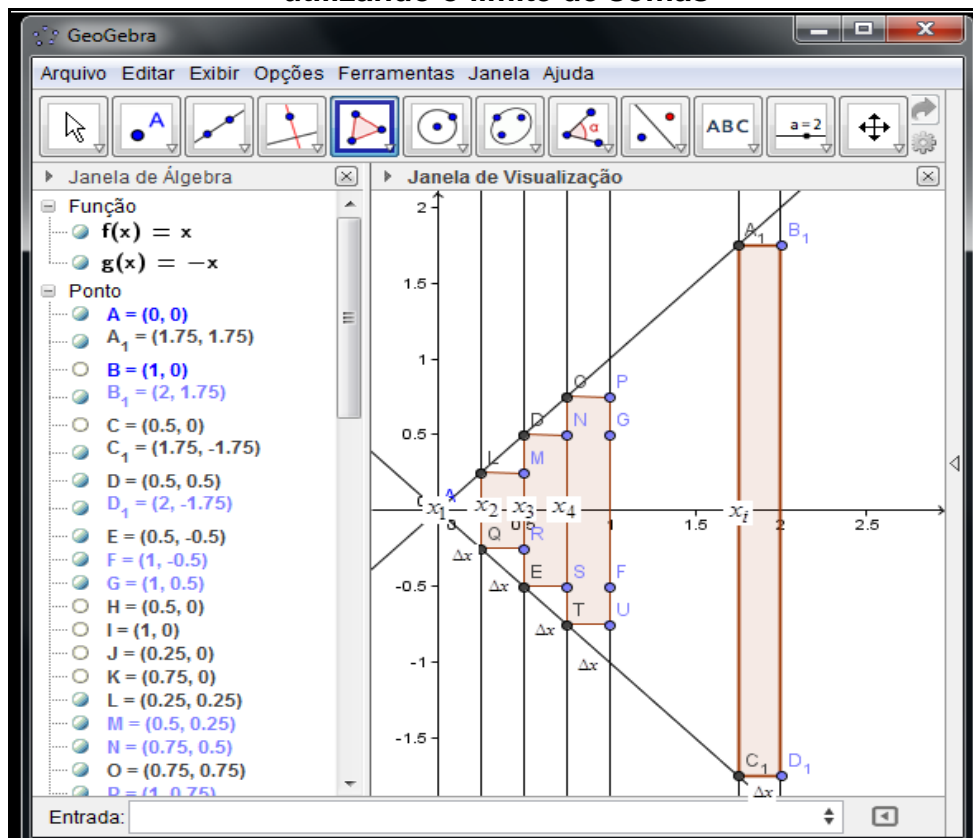
$$A \rightarrow 8 - 0$$

$$A \rightarrow 8 \text{ u.a.}$$

Eis outro exemplo:

Calcular o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva de equação $f(x) = x$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando o limite de somas. A resolução com o auxílio do GeoGebra é apresentada na figura 28.

Figura 28 - Volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva de equação $f(x) = x$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando o limite de somas



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Pode-se verificar, portanto, que a figura 28 representa a vista lateral dos n cilindros, com $n \rightarrow \infty$, de altura Δx , com $\Delta x \rightarrow 0$, que, juntos, tendem a formar um cone. Já foi compreendida, então, a possibilidade de uma boa aproximação do volume desejado, somando os volumes dos n cilindros, ou seja, através do somatório:

$$V_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Percebeu-se, ainda, que quanto menor for a medida da altura de cada cilindro, mais cilindros no mesmo intervalo serão obtidos e, conseqüentemente, mais próximos do volume real sua soma estará, o que permitiu a utilização do Limite para aprimorar a eficácia do cálculo, sob a fórmula:

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Vale a pena observar que, da mesma maneira como ocorreu no cálculo de área, aumentando o número n de cilindros rumo ao infinito, ou seja, $n \rightarrow \infty$, conseqüentemente, a medida de sua altura Δx vai diminuindo rumo a zero, ou seja, $\Delta x \rightarrow 0$. Por isso, pode-se escrever a fórmula do volume da seguinte maneira:

$$V_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x, \text{ onde:}$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Assim, ainda analisando a figura 28 tem-se que:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 + \Delta x$$

$$x_3 = 0 + 2\Delta x$$

$$x_4 = 0 + 3\Delta x$$

.

.

.

$$x_i = 0 + (i-1)\Delta x$$

$$x_i = (i-1) \cdot \frac{2}{n}$$

Logo,

$$f(x_i) = x_i$$

$$f(x_i) = (i-1) \cdot \frac{2}{n}$$

Portanto,

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot \left[(i-1) \cdot \frac{2}{n} \right]^2 \cdot \frac{2}{n}$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1) \cdot \frac{4}{n^2} \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1) \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + n \right) \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 - n + n \right) \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right) \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1) - 6n^2}{3} \right) \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4\pi}{3n^3} (2n^3 - 3n^2 + n) \right]$$

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{n} + \frac{4\pi}{3n^2} \right]$$

$$V_n \rightarrow \frac{8\pi}{3} \text{ u. v.}$$

3.4 O limite de somas visto como uma Integral Definida

O símbolo \int foi introduzido por Leibniz e é denominado sinal de integração. Esse símbolo representa um **S** alongado, isso porque a Integral é um limite de Somas finitas.

Na notação $\int_a^b f(x) dx$, $f(x)$ é chamado integrando; a e b são os limites de integração, onde a é o limite inferior e b o limite superior; algebricamente, dx indica que a variável da função integrando é x ; geometricamente, dx indica o quanto x está variando, no cálculo de uma área, volume, curva etc., podendo representar comprimento da base, largura ou altura de uma determinada figura.

A soma $S = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ é chamada soma de Riemann, em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann¹ (1826-1866), onde Δx_i é a largura do intervalo.

S , então, representa a soma das áreas dos retângulos limitados entre a curva da função $f(x)$ e o eixo x ou $g(y)$ e o eixo y . Esse é o conceito geométrico da Integral Definida, que permite, entre outras coisas, o cálculo da área de forma integral. Logo, a Integral Definida de f em $[a,b]$ é o limite das somas de Riemann, sob a fórmula:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Segundo Stewart (2014, p.350), o “Teorema Fundamental do Cálculo” é apropriado, pois estabelece uma conexão entre os dois ramos centrais do Cálculo, o Diferencial e o Integral, considerados como inversos um do outro. Isto significa que se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada (ou vice-versa), volta-se à função original, como visto a seguir:

¹ Bernhard Riemann realizou seu doutorado sob orientação de Gauss, na Universidade de Gottingen, e lá permaneceu para ensinar. Gauss não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, mas referiu-se a Riemann como uma “mente criativa ativa, verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil”. Infelizmente, faleceu aos 39 anos, de tuberculose. (STEWART, 2014, p.350).

Integral indefinida:

$$\int f(x) dx = g(x) + c \rightarrow \text{Admite infinitas soluções.}$$

Integral definida:

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a) \rightarrow \text{Admite uma única solução.}$$

Onde $g(x)$ é a primitiva de $f(x)$, isto é, uma função tal que $g'(x) = f(x)$.

Ainda segundo Stewart (2014, p.360), é necessária uma distinção cuidadosa entre Integral indefinida e Integral Definida, já que, enquanto a Integral indefinida é uma função ou uma família de curvas, a Integral Definida é um número.

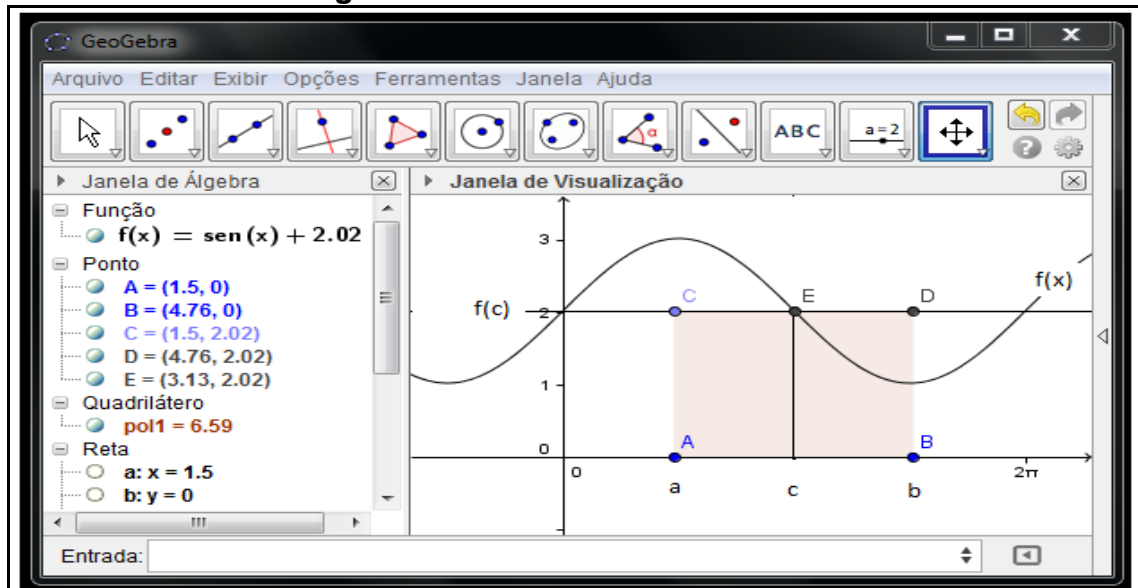
3.5 Teorema do Valor Médio

Seja f integrável em $[a,b]$, então, o Valor Médio $f(c)$ em $[a,b]$, também chamado de Média é dado por:

$$M_{(f)} = f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Geometricamente, sendo $f(x) > 0$, $(b - a)$ é a base do retângulo e $f(c)$ é a altura média desse retângulo. Assim, o produto entre a base e a altura gera a área sob a curva $f(x)$, limitada pelo eixo x , no intervalo $[a,b]$. Observe na figura 29 que uma região é aproveitada e a outra não, pois uma acaba compensando a outra. Com isso, obtém-se uma área muito próxima da real, que pode ser calculada intuitivamente por $\int_a^b f(x) dx$. O interessante é, inicialmente, calcular o valor médio $f(c)$ e logo em seguida, calcular o valor de c , pois é ele que equilibra essa espécie de balança.

Figura 29 - Teorema do valor médio



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

De acordo com a figura 29, pode-se verificar que, como $f(c)$ representa a altura média do retângulo, é possível, a partir dessa informação, chegar ao número representado por c . Esse Teorema, portanto, mostra que é possível calcular a área sob a curva através do cálculo da área de um retângulo.

Exemplo:

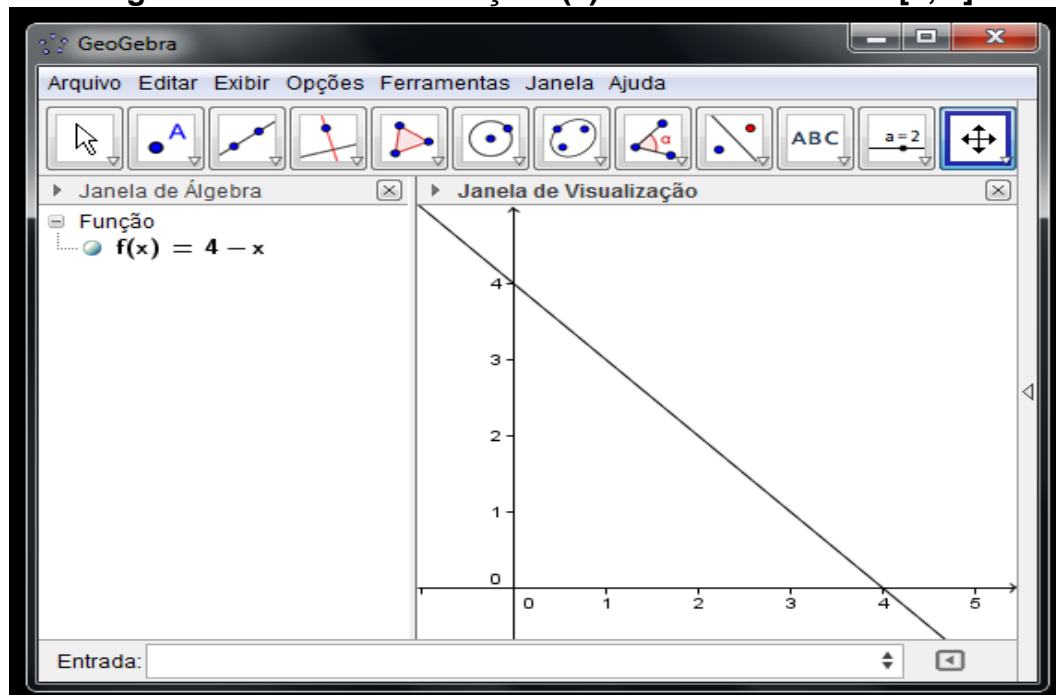
Determinar o valor médio de $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$ e em que valor c do domínio dado, f realmente assume esse valor:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Resolução:

Primeiramente, torna-se necessário, para resolver essa questão, o desenho do gráfico (FIGURA 30):

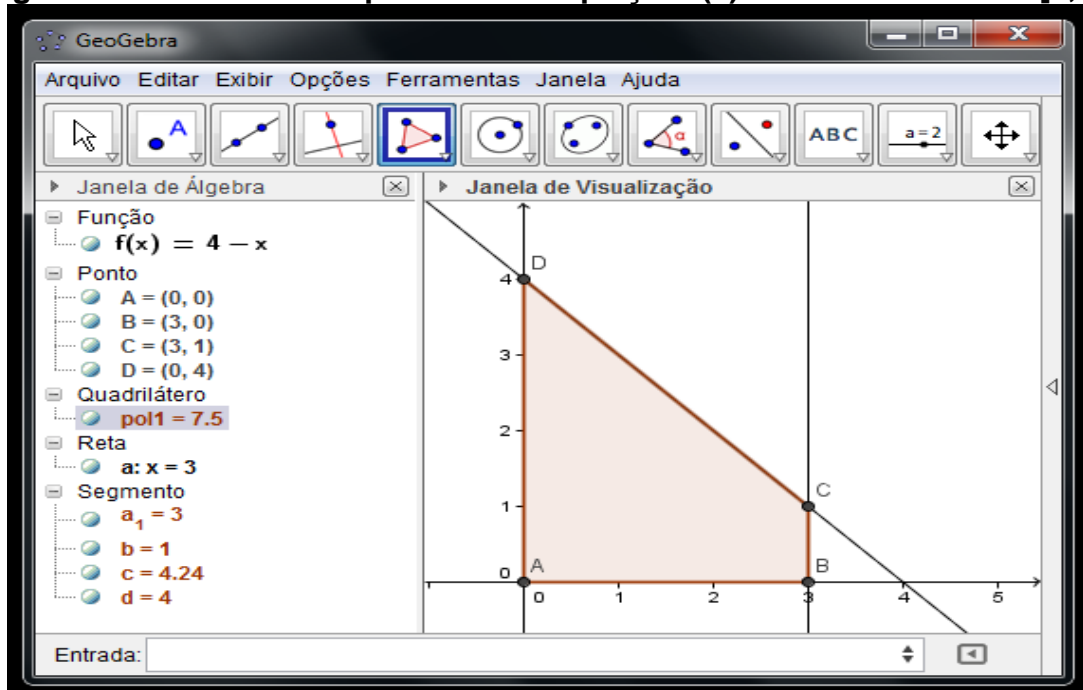
Figura 30 - Gráfico da função $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Após o desenho do gráfico, é preciso limitar a área de acordo com o intervalo dado, como apontado na figura 31:

Figura 31 - Área limitada pela reta de equação $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Utilizando a fórmula do valor médio e os dados da figura 31, pode-se calcular $f(c)$ e o valor de c , como abaixo:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$f(c) = \frac{1}{3-0} \cdot \int_0^3 (4-x) dx$$

$$f(c) = \frac{1}{3} \cdot \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3$$

$$f(c) = \frac{1}{3} \cdot \left(4 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right) - 0$$

$$f(c) = \frac{1}{3} \cdot (12 - 4,5)$$

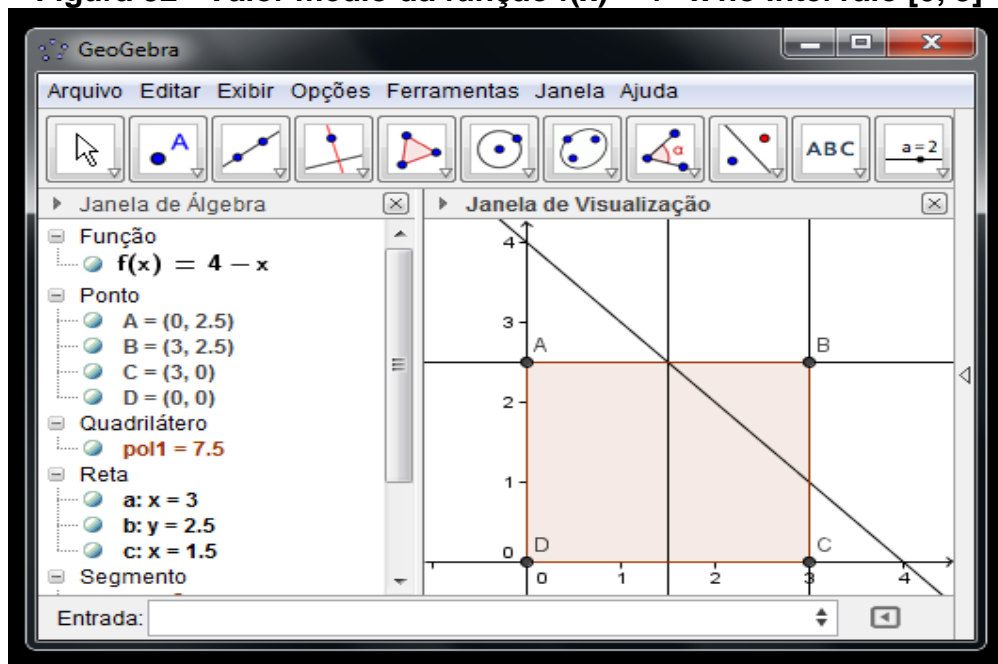
$$f(c) = \frac{7,5}{3}$$

$$f(c) = 2,5$$

Assim, se $f(x) = 4 - x$ e $f(c) = 2,5$, então $4 - c = 2,5$. Logo, $c = 1,5$.

Portanto, o retângulo indicado na figura 31 com base no intervalo $[0,3]$ e altura 2,5 tem área igual à área entre o gráfico de f e o eixo x , no mesmo intervalo. Dessa forma, $c = 1,5$ é o valor de x que equilibra a balança, ou seja, que fornece a altura desejada exata.

Figura 32 - Valor médio da função $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

O retângulo, naturalmente, assume uma forma geométrica diferente da original, porém, com mesma área. Observe que a área que sobra no retângulo equivale à área que falta na figura original.

3.6 Teorema Fundamental do Cálculo

O Cálculo Diferencial surgiu de um problema cujo objetivo era obter a equação da reta tangente a uma curva num determinado ponto, enquanto o Cálculo Integral surgiu de um problema cujo objetivo era o cálculo da área de uma figura plana com forma desconhecida.

O inglês Isaac Barrow (1630-1677), mentor de Isaac Newton em Cambridge, Inglaterra, descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados, percebendo que derivação e integração são operações inversas. O “Teorema Fundamental do Cálculo” fornece a relação inversa precisa entre a derivação e a integração.

Como já dito anteriormente, Leibniz e Newton observaram que o Teorema Fundamental do Cálculo os capacitou a calcular áreas e Integrais Definidas muito mais facilmente que Barrow, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas, e sim usando a primitiva da função envolvida.

Segundo Courant e Robbins (2000, p. 499), a noção de integração e de diferenciação tinha sido razoavelmente bem desenvolvida antes do trabalho de Newton e de Leibniz. Para desencadear a evolução da nova análise Matemática, apenas mais uma descoberta era necessária. Os dois processos de Limite aparentemente não relacionados, envolvidos na diferenciação e na integração de uma função, estão intimamente relacionados. São, de fato, inversos um do outro, como as operações adição e subtração, multiplicação e divisão. Não existe portanto, um Cálculo Diferencial e outro Cálculo Integral separados, mas um só Cálculo.

Ainda segundo Courant e Robbins (2000):

O grande feito de Leibniz e Newton foi o de terem pela primeira vez identificado e explorado claramente este Teorema Fundamental do Cálculo. Naturalmente, sua descoberta situava-se no caminho correto do desenvolvimento científico, sendo perfeitamente natural que vários homens tenham chegado a uma compreensão clara da situação, de modo independente e quase ao mesmo tempo. (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 499).

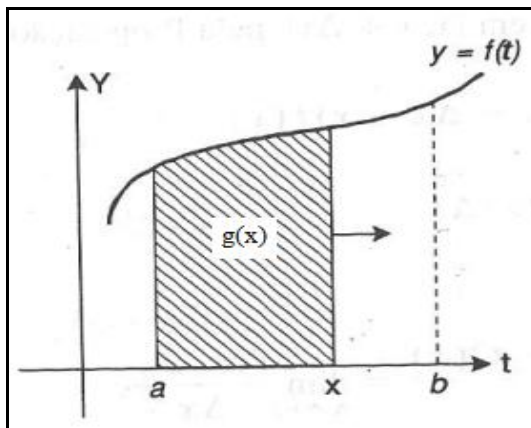
Esse Teorema é dividido em duas partes. Segundo Thomas, Weir e Hass (2009, p. 389), tem-se que:

Parte 1:

Se f é contínua em $[a, b]$, então, $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e sua derivada é $f(x)$. Assim:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} g(x) = f(x)$$

Figura 33 - Teorema fundamental do Cálculo



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves, 2006, p. 265).

Então, da forma como explicitado, entende-se a possibilidade de relacionar as operações de derivação e integração, conforme o exemplo a seguir:

Exemplo:

Calcular $\frac{d}{dx} \int_0^x \cos t dt$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx} \left. \sin t \right|_0^x \\ &= \frac{d}{dx} (\sin x - \sin 0) \\ &= \frac{d}{dx} \sin x \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Parte 2:

Na parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, Thomas, Weir e Hass (2009, p. 392) afirma que, se f é contínua em qualquer ponto de $[a,b]$ e se g é uma primitiva de f neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(t) dt = g \Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Vale a pena observar o quanto fica mais simples, prática e rápida a resolução de cada exercício visto anteriormente, agora pela Integral Definida, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Embora o Teorema possa ser surpreendente à primeira vista, ele fica plausível se sua interpretação for realizada em termos físicos. Assim, se $v(t)$ é a velocidade de um objeto e $s(t)$ é a sua posição no instante de tempo t , então, $v(t)=s'(t)$, de forma que s é uma primitiva de v .

Considerando um objeto que se move sempre no sentido positivo e fazendo a conjectura de que a área sob a curva da velocidade é igual à distância percorrida, tem-se, então:

$$\int_a^b v(t) dt = s(t) \Big|_a^b = s(b) - s(a)$$

Segundo Stochiero (1992), algumas propriedades do Teorema Fundamental do Cálculo são fundamentais, tais como:

i) Se os limites de integração são iguais, a Integral é nula:

$$\int_a^a f(x).dx = 0$$

ii) Se houver a inversão da ordem dos limites de integração, a Integral troca o sinal:

$$\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$$

iii) Sendo a Integral $\int_a^b k.f(x).dx$, o fator constante k pode ser transposto para fora do símbolo da Integral:

$$\int_a^b k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$$

iv) A Integral de uma soma algébrica de funções é igual à soma algébrica das Integrais das funções parciais:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx$$

v) A Integral Definida pode ser decomposta na soma algébrica de duas ou mais Integrais parciais:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$

Segundo George Thomas, Weir e Hass (2009), a possibilidade de encontrar funções a partir de suas taxas de variação é uma das ferramentas de cálculo mais eficientes. Veja alguns exemplos de simples aplicação:

1) Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $s(t) = 10t - 4,9t^2$.

a) Calcule a velocidade quando $t = 2$.

Sabendo que a derivada da função posição gera a função velocidade, basta derivar $s(t)$ para obtermos $v(t)$:

Dessa forma:

$$s'(t) = 10 - 9,8t$$

$v(t) = 10 - 9,8t$ (Essa é a função que irá informar a velocidade da bola em cada instante t).

Para $t = 2$, tem-se:

$$v(2) = 10 - 9,8 \cdot 2$$

$$v(2) = - 9,6 \text{ m/s}$$

Vale ressaltar que o sinal negativo indica que a bola já passou pelo ponto crítico (máximo) e, portanto, já está voltando (caindo/descendo) para o solo.

b) Com que aceleração a bola atinge a superfície?

A função aceleração pode ser obtida derivando a função velocidade cuja variável é o tempo. Acontece que não se sabe, por enquanto, quanto tempo essa bola leva para voltar ao solo. Esse deve ser o primeiro cálculo para esse exercício.

Assim, sabendo que a posição da bola, ao longo do tempo, é orientada pela função $s(t) = 10t - 4,9t^2$, tem-se que obter os valores de t que zeram s , ou seja, tempo inicial e tempo final, conforme explicitado:

$$10t - 4,9t^2 = 0$$

$$t(10 - 4,9t) = 0$$

$$t = 0 \text{ s (inicial) ou } t = \frac{10}{4,9} \text{ s (final)}$$

Agora que já se sabe o tempo final, ou seja, quanto tempo ela demora para retornar ao solo, fica fácil calcular a aceleração da bola quando a mesma atinge a superfície:

$$v(t) = 10 - 9,8t$$

$$v'(t) = -9,8$$

$$a(t) = -9,8 \text{ m/s}^2$$

Observe que, nesse caso, não foi necessário utilizar o tempo final.

2) Sabendo que a aceleração de um corpo em queda livre a partir do repouso é de $9,8 \text{ m/s}^2$, determine:

a) A velocidade do corpo após 2 segundos:

$$v(t) = \int a(t) dt$$

$$v(t) = \int 9,8 dt$$

$$v(t) = 9,8t + c$$

Como o corpo cai partindo do repouso, $v(0) = 0$, logo:

$$9,8 \cdot 0 + c = 0$$

$$c = 0$$

Portanto, a função velocidade é $v(t) = 9,8t$

Então,

$$v(2) = 9,8 \cdot 2$$

$$v(2) = 19,6 \text{ m/s}$$

b) A posição do corpo após 2 segundos:

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$s(t) = \int 9,8t dt$$

$$s(t) = 9,8 \frac{t^2}{2} + c$$

$$s(t) = 4,9 t^2 + c$$

Assim, se a altura inicial é $s(0) = h$, positiva para baixo a partir da posição de repouso, então:

$$4,9 \cdot 0^2 + c = h$$

$$c = h$$

Logo, a função posição será $s(t) = 4,9 t^2 + h$.

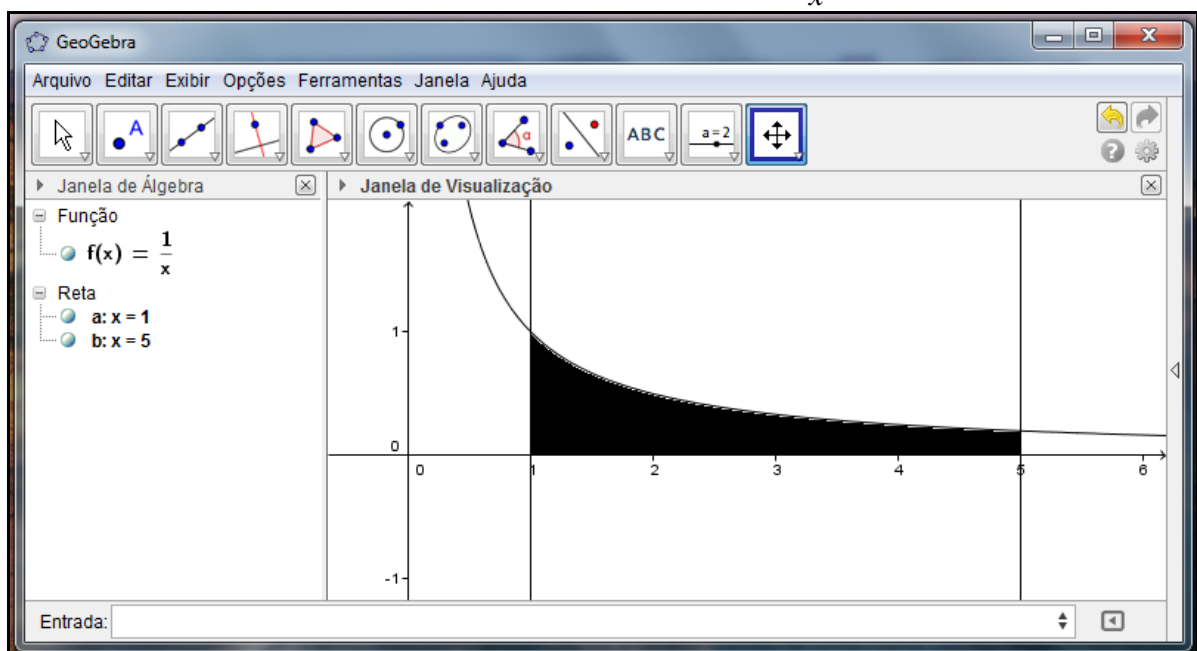
Portanto, $s(2) = 19,6 + h$.

3) Calcular a área sob a curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x=1$ e $x=5$,

utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo:

Para resolver essa questão, torna-se necessário, inicialmente, esboçar o gráfico, auxiliando no seu entendimento (FIGURA 34).

Figura 34 - Área sob a curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x=1$ e $x=5$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Após esboçado o gráfico, deve-se determinar os limites de integração. Como nesse caso, os limites de integração foram dados $[1, 5]$, passa-se, então, para o terceiro e último passo, que é calcular a área:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$A = \int_1^5 \frac{1}{x} dx$$

$$A = \ln x \Big|_1^5$$

$$A = \ln 5 - \ln 1$$

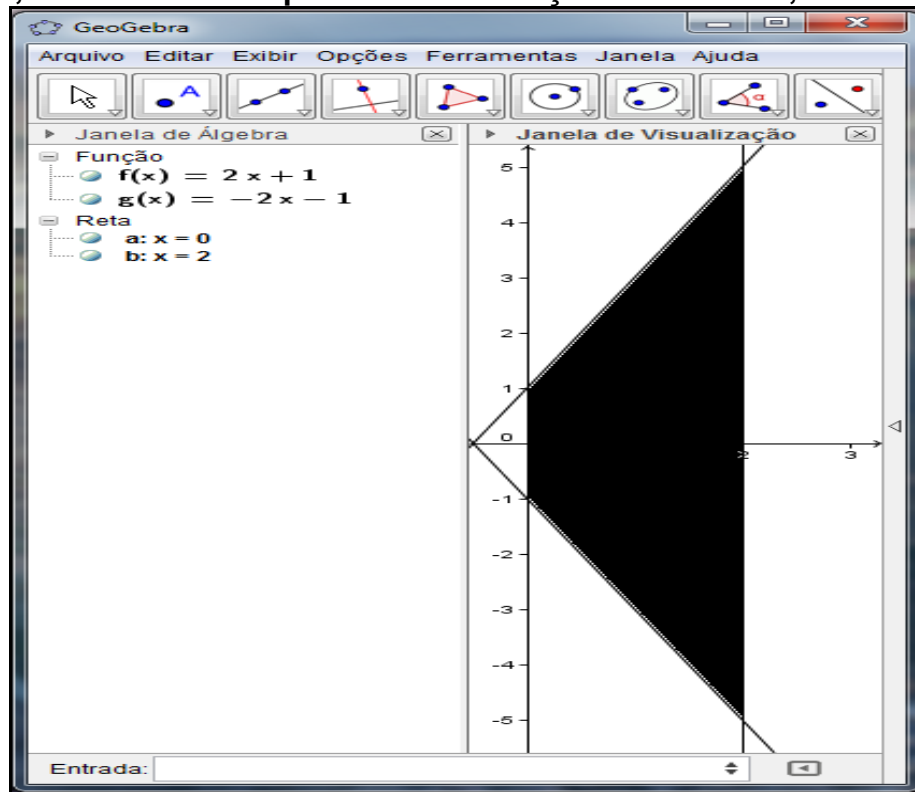
$$A = 1,609 \text{ u.a.}$$

Esse exercício já foi calculado anteriormente pelo método das aproximações finitas. Ressalta-se nessa comparação que, enquanto pelo método das aproximações finitas obtém-se 1,57 u.a., pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtém-se 1,609 u.a., uma medida próxima, porém, mais precisa que a do método anterior.

- 4) Calcular o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x , da área limitada pela curva da função $f(x) = 2x + 1$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo:

Para se resolver a questão proposta, assim como nas demais, torna-se necessário esboçar o gráfico, como mostra a figura 35:

Figura 35 - Vista lateral do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva da função $f(x) = 2x + 1$, no intervalo $[0, 2]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Após desenhar o gráfico, é preciso determinar os limites de integração. Nesse caso, os limites de integração foram dados $[0, 2]$, permitindo diretamente o cálculo do volume:

$$V_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

$$\begin{aligned}
 V_n &= \int_0^2 \pi \cdot (2x+1)^2 dx \\
 V_n &= \pi \cdot \int_0^2 (4x^2 + 4x + 1) dx \\
 V_n &= \pi \cdot \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + x \right]_0^2 \\
 V_n &= \pi \cdot \left[\left(\frac{4 \cdot 2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 + 2 \right) - 0 \right] \\
 V_n &= \pi \cdot \left[\frac{32}{3} + 10 \right] \\
 V_n &= \frac{62}{3} \pi \text{ u.v.} \\
 V_n &= 65,97 \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

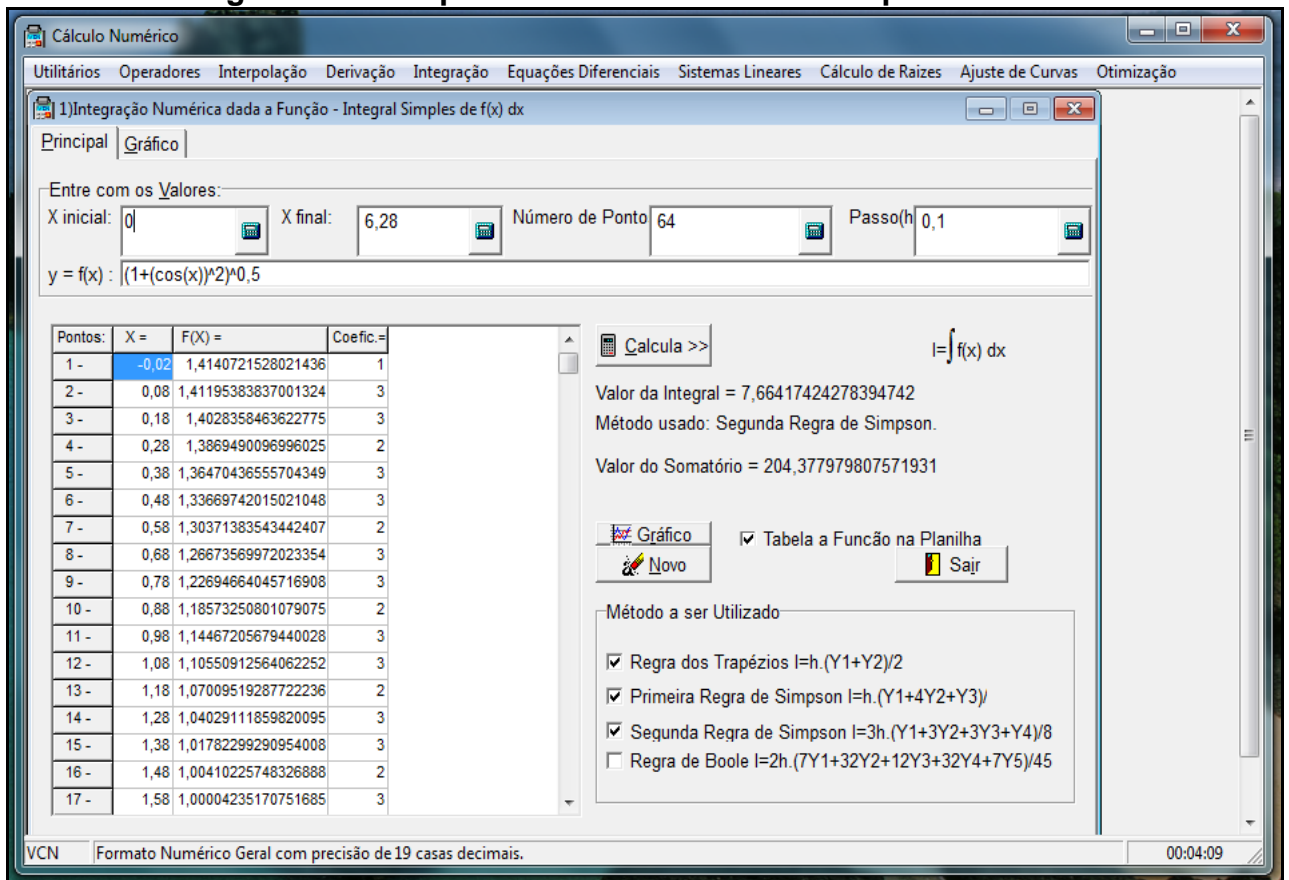
Esse exercício já foi calculado anteriormente pelo método das aproximações finitas. Ressalta-se, assim como no exercício anterior, que pelo método das aproximações finitas, obtém-se 55,75 u.v., enquanto que pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o resultado é de 65,97 u.v., uma medida próxima, porém, mais precisa que a anterior.

- 5) Calcular o comprimento do arco da curva da função $f(x) = \text{sen}x$, entre $x = 0$ e $x = 2\pi$, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i \\
 L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \\
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx
 \end{aligned}$$

Essa Integral não pode ser facilmente calculada à mão, por isso a necessidade de uso de um *software*, como o VCN, como mostra a figura 36.

Figura 36 - Comprimento da curva calculado pelo VCN



Fonte: Elaborada pelo autor no VCN

Logo,

$$L = 7,66 \text{ u.c.}$$

Ressalta-se que também esse exercício já foi calculado anteriormente pelo método das aproximações finitas, notando-se que pelo método das aproximações finitas, obtém-se um comprimento de 7,6 u.c., com oito triângulos retângulos, enquanto que pelo Teorema Fundamental do Cálculo, é encontrado comprimento igual a 7,66 u.c., que, apesar de ser uma medida próxima, é mais precisa.

4 TEORIAS EDUCACIONAIS E ASPECTOS METODOLOGICOS

Ao iniciar-se essa pesquisa, foi dada atenção aos suportes teóricos, procurando orientações metodológicas, educacionais e didáticas adequadas, de cujos princípios foram feitas aproximações. O conjunto de Atividades Didáticas foi organizado, aplicado e observado, em sua execução, pelo professor/pesquisador, especialmente à luz das teorias educacionais de Zabala (1998) e de Duval (2009). O desenho ou estrutura metodológica geral da pesquisa fundamentou-se em Fiorentini e Lorenzato (2006).

4.1 Os conteúdos de aprendizagem

A aprendizagem, segundo Zabala (1998, p.63), de uma forma sintética, é uma construção pessoal que cada aluno realiza graças à ajuda que recebe de outras pessoas. Esta construção, através da qual se pode atribuir significado a um determinado objeto de ensino, implica a contribuição por parte da pessoa que aprende, de seu interesse e disponibilidade, de seus conhecimentos prévios e de sua experiência.

Em tudo isso, desempenha um papel essencial a pessoa especializada (professor), que ajuda a detectar um conflito inicial entre o que já se conhece e o que se deve saber; que contribui para que o aluno se sinta capaz e com vontade de resolvê-lo; que propõe o novo conteúdo como um desafio interessante, cuja resolução terá alguma utilidade; que intervém de forma adequada nos progressos e nas dificuldades que o aluno manifesta, apoiando-o e prevendo, ao mesmo tempo, a atuação autônoma do aluno.

Esse é um processo que não só contribui para que o aluno aprenda certo conteúdo, mas também faz com que aprenda a aprender e que perceba que é capaz de aprender.

Para Zabala (1998, p.30), o termo conteúdo vai além do simples caráter cognitivo, ampliando o termo para “Conteúdo de Aprendizagem”, entendido como “tudo quanto se tem que aprender para alcançar determinados objetivos que não apenas abrangem as capacidades cognitivas, como também incluem as demais capacidades”, tais como motoras, de organização, de generalização, de crítica, de reflexão, de relação interpessoal, de inserção social, entre outras. Porém, essas

capacidades fazem parte do “currículo oculto”, como pontua o autor, não aparecendo, em geral, no plano de ensino de uma disciplina.

As Atividades dessa presente pesquisa, inspiradas nesse conceito de Conteúdo de Aprendizagem, constituíram-se em uma Sequência Didática, que, em Zabala (1998), pode ser entendida como um conjunto de atividades ou tarefas, ordenadas, estruturadas e articuladas visando à realização de objetivos educacionais estabelecidos. Esse conjunto de atividades foi elaborado e aplicado, conforme os quatro tipos ou categorias de conteúdos de aprendizagem elencados pelo autor, sendo eles: factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais.

- **conteúdos factuais** se referem ao conhecimento de fatos, acontecimentos, dados e fenômenos concretos e singulares. Devido às características desse tipo de conteúdo, a aprendizagem envolve a repetição do conhecimento e é uma aprendizagem do tudo ou nada, pois não se pode dar meio certo para a data de um evento ou nome de uma pessoa. Assim, esse tipo de conteúdo envolve a capacidade de memorização do aluno, que pode utilizar-se de estratégias pedagógicas que envolvam exercícios de fixação, repetição verbal ou escrita, construção de esquemas, ou agrupamento por categorias. São exemplos de conteúdos factuais: datas comemorativas, nomes de pessoas, localização de um território, altura de uma montanha etc.
- **conteúdos conceituais** devem favorecer a compreensão do conceito a fim de utilizá-lo para a interpretação ou conhecimento de situações e, até mesmo, para a construção de outras ideias. São exemplos de conteúdos conceituais: densidade, função algébrica, potência etc.
- **conteúdos procedimentais** devem incluir regras, técnicas, métodos; exigem destrezas ou habilidades, estratégias, procedimentos, que deverão ser utilizados para se atingir um objetivo. São exemplos de conteúdos procedimentais: ler, desenhar, observar, calcular, classificar, traduzir, inferir etc.
- **conteúdos atitudinais** devem abordar aspectos relacionados a valores, atitudes e normas. Os valores são princípios ou ideias éticas que permitem às pessoas emitir um juízo sobre as condutas e seu sentido. São exemplos de valores: a solidariedade, o respeito, a responsabilidade, a liberdade etc. As atitudes são tendências ou predisposições relativamente estáveis das pessoas para atuar de certa maneira. São as formas como as pessoas

realizam suas condutas de acordo com valores determinados. São exemplos de atitudes: cooperar com o grupo, ajudar os colegas, respeitar o meio ambiente, participar das tarefas escolares etc. Já as normas são padrões ou regras de comportamento que se devem seguir em determinadas situações obrigatórias a todos os membros de um grupo social. Exemplo de norma: para se obter o título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática na PUC MINAS, o aluno deve ter sido frequente, estar aprovado nas disciplinas, e ter a sua dissertação aprovada pela banca examinadora. (ZABALA, 1998).

Ainda segundo Zabala (1998), o professor, ao elaborar as atividades escolares, deve se propor a explorar estes conteúdos para levar o aluno a adquirir uma formação mais global. Porém, mesmo num modelo de ensino tradicional (aula expositiva, estudo individual do aluno, revisão do conteúdo, prova, avaliação final), em que o conteúdo conceitual é muito forte, o professor pode ter oportunidade de explorar um pouco dos demais conteúdos.

Já em um modelo de ensino não tradicional, em que, por exemplo, se trabalha com Projetos (situação problemática, formulação de questões, respostas intuitivas ou suposições, fontes de informação, busca de informação, elaboração de solução, conclusões, generalização, fixação ou memorização, prova ou exame, avaliação do processo), todos os tipos de conteúdos de aprendizagem podem ser explorados, contribuindo para uma formação mais completa e cidadã do estudante. Neste caso, os alunos controlam o ritmo da sequência didática de atividades, atuando constantemente e utilizando uma série de técnicas e habilidades, como o diálogo, o trabalho em pequenos grupos, a pesquisa bibliográfica etc. Com isso, acabam aprendendo a “ser” de uma determinada maneira, mais tolerantes, cooperativos, respeitosos, rigorosos, responsáveis etc.

Assim, diante do exposto e coerente com a teoria de Zabala (1998), na sequência didática da presente pesquisa foram elaboradas e aplicadas atividades que:

- levassem em conta os conhecimentos prévios que cada aluno pudesse ter;
- seus conteúdos fossem propostos de forma que se tornassem significativos e funcionais;
- permitissem inferir se eram adequadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno;

- representassem um desafio alcançável para o aluno, com acesso à orientação;
- promovessem uma atitude favorável, ou seja, que fossem motivadoras e educassem;
- estimulassem a autoestima e o autoconceito em relação às aprendizagens;
- ajudassem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender;
- permitissem ao aluno ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens.

Nesse contexto, a proposta de trabalho apresentada aos sujeitos dessa pesquisa procurou estimulá-los e direcioná-los para que se tornassem agentes da construção do próprio conhecimento e de sua cidadania.

4.2 Registros de representação semiótica

As representações semióticas, ou seja, as produções constituídas pelo emprego de regras de sinais (por exemplo, enunciado em língua natural, numérica, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica, entre outros), parecem ser o meio de que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para as tornarem visíveis ou acessíveis ao outro.

Segundo Duval (2009) em Matemática, as representações semióticas são necessárias ao desenvolvimento da atividade Matemática. Citando Granger (1979), o autor afirma que:

De maneira mais global, pode-se constatar que o progresso do conhecimento vem acompanhado sempre da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que coexistem mais ou menos com o primeiro dentre eles, aquele da língua natural. Assim, a formação do pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e suas relações (GRANGER, 1979 citado por DUVAL, 2009, p.16).

Dessa forma, as representações mentais e as representações semióticas não podem ser opostas como dois domínios totalmente diferentes. O desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções, como proposto por Vygotsky (1984) e Piaget (1979). “A isto, é preciso juntar o fato de que a pluralidade dos sistemas semióticos permite uma

diversificação das representações de um mesmo objeto, aumenta as capacidades cognitivas dos sujeitos e, em seguida, as suas representações mentais” (BENVENISTE, 1974; BRESSON, 1987; citados por DUVAL, 2009, p.17).

Dessa forma, acredita-se que um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas próprias possibilidades, sobre a comparação com suas diversas traduções, pode ser de grande valia, sendo, inclusive, um dos objetivos desse trabalho.

Ainda segundo Duval (2009), não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação, já que, desde Descartes e Kant, ela está no centro de toda reflexão que se preocupa com as questões da possibilidade e da constituição de um conhecimento certo. Assim, a noção de representação torna-se essencial como forma sob a qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento, tratando-se de uma codificação da informação.

Além disso, para Duval (2009), converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. A conversão é então, uma transformação externa em relação ao registro da representação inicial. Pode-se dizer, portanto, que a execução de todo o trabalho realizado para fins dessa pesquisa perpassou pelo delineamento de Duval, já que sempre houve a preocupação com os registros e dados obtidos, como a ocorrência de falas, acontecimentos e, também, os protocolos realizados pelos alunos.

4.3 Aspectos metodológicos

Este trabalho se propôs a implementar Atividades Didáticas destinadas ao estudo da Integral Definida, para explorar conteúdos e estratégias de aprendizagem. Tratou-se de uma Pesquisa-Ação, entendida como uma forma de pesquisa qualitativa participativa, com o pesquisador interagindo com o público ou sujeito pesquisado.

Barbier (2007) entende que na pesquisa-ação o pesquisador tem uma interação direta com o objeto pesquisado, participa das decisões do grupo

pesquisado e oferece aos seus membros conhecimento científico e metodologia para realizar uma determinada ação.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa-ação é uma metodologia muito utilizada como um caminho na busca de elementos teóricos e práticos voltados ao esclarecimento e/ou entendimento de algum problema ou situação observada.

Os educadores Fiorentini e Lorenzato (2006) definem pesquisa-ação da seguinte forma:

A pesquisa-ação é um processo investigativo de intervenção em que caminham juntas a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa. Ou seja, a prática educativa, ao ser investigada, produz compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas na transformação dessa mesma prática, gerando novas situações de investigação. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 69).

Nessa modalidade de pesquisa, o pesquisador se vale da observação para fazer a coleta de dados. Dessa forma, estando inserido no ambiente a ser estudado, o pesquisador é um observador crítico e reflexivo, buscando elementos para compreendê-lo ao mesmo tempo em que o transforma. Entretanto, dar clareza ao grupo investigado, da natureza e dos objetivos do trabalho que está sendo realizado é uma preocupação ética importante. Para Lüdke e André (1986, p.26), “a observação ocupa um lugar privilegiado nas novas abordagens de pesquisa educacional”, mas fazer uso de tal método de coleta exige alguns cuidados, tanto no que tange aos aspectos éticos, quanto à confiabilidade da pesquisa.

Portanto, entende-se que o planejamento se torna essencial e envolve a análise das diversas possibilidades de ações, sendo o papel fundamental do pesquisador ajudar ao grupo no processo de pensar, agir, refletir e avaliar.

A pesquisa-ação, como já dito, tem natureza qualitativa, não se preocupando com mensurar o objeto, mas interessando-se por suas categorias e atributos, tais como; qualidade, relação e ação, mas algumas quantificações, julgadas necessárias, não são proibidas.

Desse modo, no ambiente de pesquisa qualitativa, interessa a obtenção de dados que sejam oriundos de um diálogo entre o pesquisador e seus pesquisados, captando o sentido que os sujeitos da pesquisa atribuem aos objetos com os quais estão em contato.

Diante do exposto, optou-se por essa metodologia por ser propósito desse pesquisador, que na qualidade de professor, enfrenta, no dia a dia, em sala de aula,

as recorrentes dificuldades dos alunos na aprendizagem do Cálculo Integral e na Matemática, em geral. A proposta, então, foi observar, analisar e intervir em um pequeno grupo de alunos voluntários de um curso de Engenharia Civil, já repetentes na disciplina de Cálculo, que desenvolveriam um conjunto de atividades didáticas planejadas.

Assim, as atividades foram realizadas sob a orientação do professor pesquisador, num Centro Universitário de Belo Horizonte, onde ele trabalha.

Os estudantes participaram da pesquisa fora do horário normal de aula, das 12 às 13:40 horas, no laboratório de informática, durante 14 dias. Ao todo, foram 3 estudantes, que foram convidados a participar da pesquisa, a fim de ampliar sua visão em relação ao conteúdo, valendo 28 horas/aula complementares no curso de graduação em engenharia da Instituição. Porém, antes de partirem para a resolução das atividades, eles foram orientados a realizarem uma leitura prévia, escrita pelo próprio pesquisador (Capítulo 3 deste trabalho), necessária à resolução da sequência de atividades. Inicialmente, elas foram discutidas e desenvolvidas individualmente ou em trio, com a intervenção do professor pesquisador, sempre que necessário.

A partir da aplicação desse caderno, percebeu-se que algumas atividades necessitavam de reajustes para melhorar a compreensão por parte do leitor, o que foi feito no produto final. Vale a pena ressaltar, também, que o tempo inicialmente previsto para o desenvolvimento das atividades foi de 20 horas/aula, o que não foi alcançado, em função da complexidade de algumas questões e do rendimento dos alunos. Houve, portanto, a necessidade de oito horas a mais, totalizando 28 horas/aula.

4.4 Ferramentas computacionais

Dois *softwares* foram escolhidos como ferramentas computacionais auxiliares para o desenvolvimento das Atividades Didáticas da pesquisa, sendo esses: o GeoGebra e Visual Cálculo Numérico (VCN), por serem gratuitos e de fácil manuseio. A foto 1 mostra os alunos sujeitos da pesquisa trabalhando com os *softwares* individualmente

Foto 1 - Alunos desenvolvendo o caderno de atividades



Fonte: Imagens do pesquisador.

4.4.1 GeoGebra

O GeoGebra é um *software* gratuito de Matemática², de fácil manuseio, tanto para estudantes do ensino básico como superior. Foi criado por Markus Hohenwarter³, cujo projeto foi iniciado em 2001, na Universidade de Salzburg, Áustria.

O *software* GeoGebra possibilita o trabalho em geometria, álgebra, estatística e cálculo e sua interface principal de trabalho opera em duas e três dimensões. De fácil aprendizado, visualização clara e interativa, agrega valor positivo, principalmente pelo ganho em tempo de trabalho e resultados obtidos.

4.4.2 Visual Cálculo Numérico (VCN)

O Visual Cálculo Numérico (VCN) é um *software* gratuito de Matemática⁴ com interface de entrada numérica direta, ou seja, não exige uma programação prévia. Foi desenvolvido pelos professores Célio Humberto Vasconcelos, Cristina Almeida Magalhães, Dimas Felipe de Miranda, Lamounier Josino de Assis, Luiz C. Picoreli de Araújo, Marcos Almeida Magalhães, Pedro Américo Almeida Magalhães e Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior, na PUC MINAS.

² GEOGEBRA. **Download**. Disponível em: www.geogebra.org/download. Acesso em: 10 ago. 2014.

³ Professor de Educação Matemática na Universidade Johannes Kepler, de Linz, na Áustria.

⁴ PUC MINAS. **Laboratório de Cálculo Numérico**. Disponível em: www.matematica.pucminas.br/lcn/vcn1.htm. Acesso em: 12 ago. 2014.

O VCN possibilita opções como tratamento de funções reais de uma variável real; representações de erros e operadores numéricos, interpolação e extrapolação, derivação e integração numérica, equações diferenciais, cálculo de raízes, sistemas lineares, ajuste de curvas e aproximação de funções, otimização, somatório e produtório de termos em sequências numéricas, em sua maioria com opção de interpretação gráfica dos intervalos numéricos trabalhados.

Seu fácil manuseio, perante conceitos prévios formados, agrega agilidade, confiabilidade e análise do comportamento dos dados inseridos.

5 APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Para facilitar o acompanhamento da descrição e análise das atividades, optou-se por apresentar, no Quadro 1, os elementos estruturantes das 8 atividades que compõem o Caderno, produto desta pesquisa.

Quadro 1 - Elementos estruturantes das 8 atividades

| ATIVIDADE | DURAÇÃO | OBJETIVOS GERAIS | METODOLOGIAS |
|---|----------------|---|---|
| Atividade 1: Aproximações finitas (2 Questões) | 2 h/aula | Estimar medidas de áreas, volumes e comprimentos de arcos. | Utilizar as aproximações finitas, o <i>software</i> GeoGebra e o cálculo manual. |
| Atividade 2: Somatório (3 Questões) | 2 h/aula | Lidar com o símbolo Somatório. | Utilizar a definição e as propriedades do Somatório e o cálculo manual. |
| Atividade 3: Limite de somas finitas (3 Questões) | 4 h/aula | Avaliar Limites de somas e aplicar em cálculo de área e volume. | Utilizar propriedades dos Limites, do Somatório e o cálculo manual. |
| Atividade 4: Teorema Fundamental do Cálculo (3 Questões) | 4 h/aula | Entender o Teorema Fundamental do Cálculo e aplicá-lo em cálculos de medidas geométricas. | Utilizar a notação de Integral e o cálculo manual. |
| Atividade 5: O Limite de somas definido como uma Integral Definida (5 Questões) | 4 h/aula | Explorar a Integral Definida como limite de somas. | Utilizar a relação entre a álgebra e a geometria (equações e gráficos) através do cálculo manual. |
| Atividade 6: Desenvolvendo habilidades para o cálculo de área. (1 Questão) | 2 h/aula | Explorar diferentes modelos para estimar medidas geométricas. | Utilizar conceitos para a montagem dos modelos, o cálculo manual, o GeoGebra e o VCN. |
| Atividade 7: O uso do VCN e do GeoGebra para o cálculo da Integral Definida (2 Questões) | 2 h/aula | Desenvolver habilidades para o cálculo de Integrais Definidas. | Utilizar conceitos para a montagem dos modelos, o cálculo manual, o GeoGebra e o VCN. |
| Atividade 8: Experimentando diferentes mídias e modelos (6 Questões) | 8 h/aula | Representar matematicamente modelos físicos e avaliar suas medidas. | Utilizar conceitos, fórmulas, o cálculo manual, o GeoGebra e o VCN. |

Fonte: Dados da pesquisa.

Entende-se por hora/aula (h/aula) o tempo de cinquenta minutos. No total, foram 25 questões, distribuídas em 8 atividades, desenvolvidas durante 14 dias, com 2 horas/aula por dia, num total de 28 horas/aula.

Em todas essas atividades, cujo texto completo está no Caderno de Atividades e é produto dessa pesquisa (APÊNDICE A), existe um objetivo comum, que é incentivar o desenvolvimento das habilidades e autonomia do aluno quanto ao estudo da Integral Definida e à utilização de *softwares*, tais como o GeoGebra e o VCN. Vale ressaltar, ainda, que foi utilizado, como texto extra-aula, o capítulo 3 desta dissertação, servindo, portanto, como base de conhecimento prévio do aluno sujeito dessa pesquisa, antes e durante a execução das atividades em sala de aula, contendo conceitos e exercícios resolvidos sobre aproximações finitas que objetivavam colocar o aluno em contato com alguns conteúdos na linha “do que saber”, e de “como saber fazer”.

Esse conjunto de atividades foi elaborado, aplicado e analisado conforme os quatro tipos ou categorias de conteúdos de aprendizagem, presentes em Zabala (1998), quer sejam: factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais, já descritos no capítulo metodológico.

Além disso, a análise das atividades também teve como suporte a teoria de Duval (2009), já descrita no segundo capítulo deste trabalho. Ressalta-se que, a fim de resguardar a identidade dos sujeitos dessa pesquisa, serão utilizadas as consoantes D, J e R para referir-se aos alunos participantes.

5.1 ATIVIDADE 1: Aproximações finitas

A atividade 1 possuía os seguintes objetivos específicos:

- calcular medidas de áreas a partir das aproximações finitas, utilizando o *software* GeoGebra;
- calcular medidas de volumes a partir das aproximações finitas, utilizando o *software* GeoGebra;
- calcular medidas de comprimentos de arcos partir das aproximações finitas, utilizando o *software* GeoGebra;
- incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida e à utilização do *software* GeoGebra.

5.1.1 Descrição e análise

Essa atividade foi realizada em 2 h/aula na sala laboratório de informática da instituição. As questões foram resolvidas individualmente, utilizando o GeoGebra para desenvolver habilidades com o *software*, visualizar e discretizar as figuras geométricas em corte. Os alunos utilizaram também lápis, papel, borracha e calculadora para desenvolverem os cálculos à mão.

A atividade 1 era composta por 2 questões. A primeira, versava sobre área e volume, contendo 6 itens, de **a** até **f**., sendo que os itens **e** e **f** foram escolhidos para análise, pois envolviam o cálculo do volume de um sólido de revolução, o que exigia dos alunos habilidades já adquiridas nos itens anteriores sobre cálculo de área.

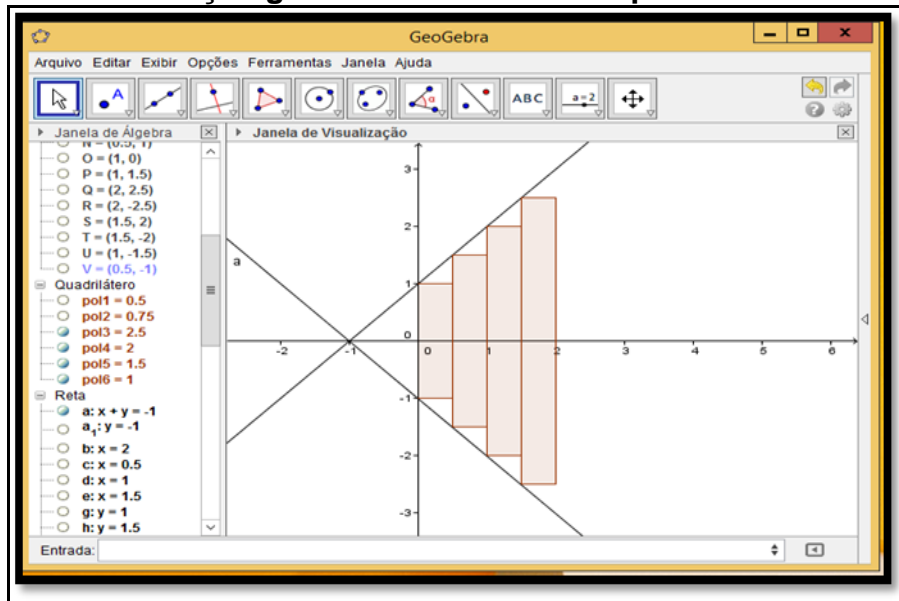
Questão 1:

Dada a função $f(x) = x + 1$ limitada no intervalo $[0, 2]$, calcular através das aproximações finitas, utilizando o GeoGebra:

e) O volume do sólido gerado pela rotação da área limitada pela função em torno do eixo x , com quatro cilindros inscritos de mesma altura, neste intervalo.

Para resolver esse item, o primeiro passo seria explorar a representação gráfica usando o GeoGebra, *software* que era ainda desconhecido pelos alunos. O professor pesquisador realizou as devidas orientações para a correta utilização das ferramentas do *software*, e os alunos não tiveram maiores dificuldades no uso dos comandos. O Protocolo 1 apresenta a construção do aluno D. Ele, neste momento, escolheu discretizar a variável contínua x , no intervalo $[0, 2]$, em 4 faixas, com 0,5 unidade cada.

Protocolo 1 - Construção gráfica da atividade 1 - questão 1 - letra e – aluno D



Fonte: Dados da pesquisa.

O segundo passo seria o cálculo aproximado do volume, requerido por solução manual (usando papel, lápis e calculadora). Pela leitura prévia realizada, os alunos reconheceram que o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico da função dada, em torno do eixo x, subdividido em cilindros inscritos de mesma altura, era determinado pela soma dos volumes de cada um desses cilindros, e que a fórmula seria dada por:

$$V = \sum \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \text{ou} \quad V = \sum_{i=1}^n \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x$$

O Protocolo 2 apresenta a resolução do aluno D, acrescida da correção do professor pesquisador.

Protocolo 2 - Resolução manual da atividade 1 - questão 1 - letra e – aluno D

| le) | | | |
|--|----------------------------------|--------|-------------|
| Cilindro I | R: 1,5 | h: 0,5 | F(x) = x+1 |
| Cilindro II | R: 2 | h: 0,5 | imagem (y) |
| Cilindro III | R: 2,5 | h: 0,5 | f(x) = -x-1 |
| Cilindro IV | R: 3 | h: 0,5 | |
| $V = \sum \pi r(x_i)^2 \cdot \Delta x$ | | | |
| I. | $V = \sum \pi (1,5)^2 \cdot 0,5$ | | |
| | $V = 3,53 \text{ u.v.}$ | | |
| II. | $V = \sum \pi (2)^2 \cdot 0,5$ | | |
| | $V = 6,28 \text{ u.v.}$ | | |
| III. | $V = \sum \pi (2,5)^2 \cdot 0,5$ | | |
| | $V = 9,61 \text{ u.v.}$ | | |
| IV. | $V = \sum \pi (3)^2 \cdot 0,5$ | | |
| | $V = 14,13 \text{ u.v.}$ | | |
| | $V_T = 33,95 \text{ u.v.}$ | | |

NÃO deve-se utilizar o símbolo \sum no cálculo do volume do cilindro.

Fonte: Dados da pesquisa.

Vê-se, no protocolo 2, que o aluno registrou a expressão da fórmula do volume do cilindro como um dado factual, na concepção de Zabala (1998), realizando os procedimentos de cálculo dos volumes intermediários, efetuando a soma deles, obtendo um resultado aproximado do volume total. Porém, cometeu alguns equívocos, como, por exemplo, mantendo em cada linha de cálculo o símbolo \sum , como se fizesse parte do cálculo individual do volume de cada cilindro, o que indica a falta de compreensão do significado desse símbolo, realizando o procedimento operacional sem se preocupar com o que havia escrito inicialmente.

Outro equívoco de operação do mesmo aluno aconteceu ao calcular o volume do terceiro cilindro, em que extraiu da calculadora o valor 9,61 u.v., ao invés de 9,81 u.v. Provavelmente porque introduziu ou leu dados errados na calculadora.

Segundo Zabala (1998), o diálogo durante a execução das tarefas, as trocas de ideias, as trocas de soluções entre os colegas, o aproveitar-se do conhecimento do outro são benéficos a todos. Mas, observou-se que, muitas vezes, um aluno acaba confiando muito no raciocínio do colega e copia uma determinada resolução sem analisar se de fato está totalmente correto.

Foi possível verificar, ainda, que os alunos experimentaram, nesse item e, subdividir o intervalo em um número maior de cilindros, otimizando o resultado final do volume pedido.

Já o item f, também da questão 1, a seguir, foi desenvolvido com sistemática semelhante ao anterior.

Questão 1:

Dada a função $f(x) = x + 1$ limitada no intervalo $[0, 2]$, calcular através das aproximações finitas, utilizando o GeoGebra:

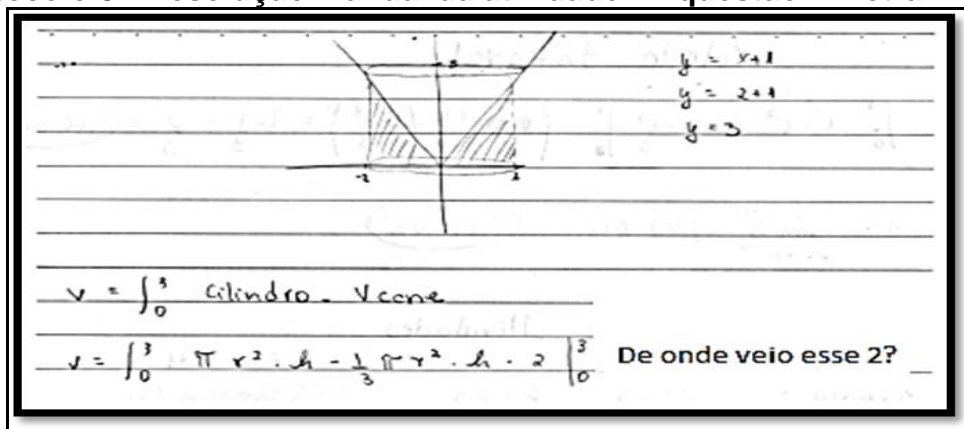
f) O volume do sólido gerado pela rotação da área limitada pela função, em torno do eixo y, com base nos conceitos de geometria sólida, nesse intervalo. Observe que, com a rotação, há a formação de dois sólidos, o de dentro e o de fora. Nesse caso, queremos o volume do sólido de fora.

Obs.: Não usar Integral Definida para o cálculo do volume!

O professor pesquisador realizou as devidas orientações, e os alunos conseguiram visualizar a representação gráfica no *software*.

Apresenta-se, no Protocolo 3, a resolução manual do aluno D, acometida de equívoco.

Protocolo 3 - Resolução manual da atividade 1 - questão 1 - letra f – aluno D



The image shows a student's handwritten work on lined paper. At the top, there is a hand-drawn graph of the function $f(x) = x + 1$ on the interval $[0, 2]$. The x-axis is labeled with 0 and 2, and the y-axis with 1 and 2. The area under the line is shaded. To the right of the graph, the equations $y = x + 1$, $y = 2 + 1$, and $y = 0$ are written. Below the graph, the student has written the formula $v = \int_0^2 \text{cilindro} - \text{Vcone}$. Below that, the student has written $v = \int_0^2 \pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \cdot 2 \Big|_0^2$ followed by the question "De onde veio esse 2?".

Fonte: Dados da pesquisa.

Como visto, foi solicitado, no item f, questão 1, usar conceitos da geometria sólida e não usar Integral. Porém, o aluno não realizou uma correta recepção do texto, pois misturou a Integral Definida com as fórmulas de geometria sólida, mesmo sendo esse aluno repetente na disciplina e já ter estudado o assunto. Analisando o protocolo 3 desse aluno, percebe-se que os aspectos geométrico e gráfico estão corretos, porém, observa-se um equívoco procedimental no momento em que ele acrescentou à estrutura de cálculo o símbolo da Integral, sem o devido rigor ou domínio da linguagem matemática, como apontado por Duval (2009, p.15), quando diz que “as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de

comunicação, mas necessárias ao desenvolvimento da atividade Matemática”. Esse mesmo aluno ainda cometeu um erro de interpretação ao multiplicar por 2 a Integral. Pode-se dizer, então, que o aspecto conceitual está parcialmente correto, mas o procedimental não, já que, nesse caso, o aluno deveria utilizar as fórmulas da geometria sólida no lugar da Integral. Talvez essa ideia não tenha ficado clara para o aluno ou bem destacada no texto da questão; fato que é corroborado pelas palavras de Duval (2009), quando afirma que:

A coordenação semiótica do aluno [...] não se revela necessária e unicamente para as matemáticas, ela é para o domínio da língua natural, ao menos para a parte do domínio que se manifesta não através do respeito de todas as regras da gramática, mas pela capacidade de escrever textos coerentes, organizados, argumentados, **pela capacidade de compreender os textos lidos ou de extrair deles a informação pertinente para uma questão.** (DUVAL, 2009, p.20). (Grifos nossos).

Vale ressaltar que, após a intervenção do professor pesquisador, o aluno melhorou o aspecto procedimental, o que pode ser notado no Protocolo 4, porém, ainda não tendo acertado totalmente a questão, sendo, então, o protocolo ainda acrescido da correção do professor pesquisador

Protocolo 4 - Resolução manual da atividade 1 - questão 1 - letra f – continuação da questão– aluno D

$V_1 = V_{cilindro} - V_{cone}$
 $V = \pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$
 $V = \pi 2^2 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2$
 $V = 12\pi - \frac{8}{3}\pi \rightarrow V = \frac{28}{3}\pi$

A altura do cone é igual a 3, e não igual a 2, como está escrito.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se, no protocolo 4, que o aluno corrigiu o equívoco, escrevendo de forma coerente ao enunciado da atividade. Além disso, quanto ao aspecto conceitual, as letras r e h utilizadas para representar as medidas do raio e da altura, respectivamente, tanto para o cilindro, quanto para o cone, foram adequadas, pois as medidas, tanto para um quanto para o outro são as mesmas. Quanto aos aspectos atitudinais e numéricos, acredita-se que por falta de atenção, o aluno, mesmo visualizando graficamente e geometricamente que as medidas das alturas são iguais, escreveu-as de forma equivocada para o cone; porém, acertou o cálculo

final. Concluiu-se, com esse acontecimento, que, provavelmente, ele tenha copiado a resposta de algum colega, pois, mesmo se equivocando em parte do procedimento de cálculo, chegou ao resultado correto.

Já a questão 2 dessa atividade 1 versava sobre comprimento de arco, contendo 2 itens, **a** e **b**. Para eles também deveriam-se usar os conceitos básicos da geometria, como nos itens anteriores da questão 1. O item **b** da questão 1 foi escolhido para análise, pois envolvia a mesma função da letra **a**, porém, com um número maior de triângulos.

Questão 2:

Através das aproximações finitas, estimar o comprimento do arco da curva da função $f(x) = \cos x$, entre $x = 0$ e $x = \pi$, utilizando o GeoGebra, com:

b) Oito triângulos retângulos com mesma medida de base.

Leia com atenção as instruções abaixo, antes de começar a resolver o exercício:

Abrindo o *software* GeoGebra, percebemos que o eixo x está, inicialmente, representando os números reais. Como a função é trigonométrica, devemos mudar a linguagem no eixo x , transformando os números reais em seus correspondentes ângulos, em radianos. Para isso, devemos:

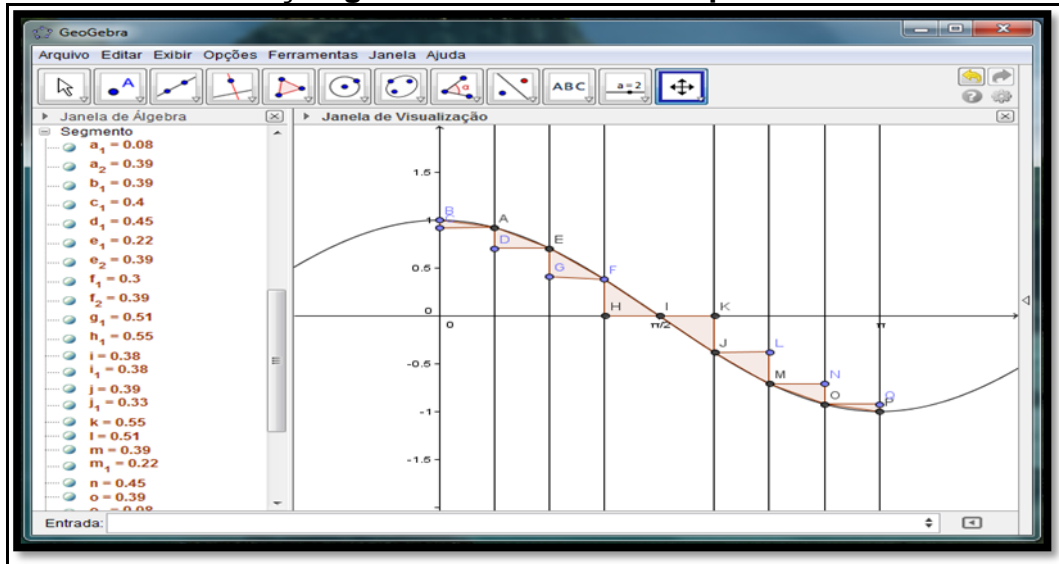
- posicionar o mouse sobre o eixo x e clicar com o botão direito;
- clicar sobre janelas de visualização;
- clicar sobre eixo x ;
- clicar sobre distância e “alterar para”;
- fechar a janela, voltando para o gráfico.

Obs.:

- No GeoGebra, $x = \pi$, escreve-se $x = \text{pi}$;
- Para movimentar o ponto com mais precisão, pressionamos Shift junto com a seta que guiará o ponto para a posição adequada;
- Utilizaremos as ferramentas novo ponto e polígono;
- O próprio GeoGebra calcula as medidas das hipotenusas necessárias ao exercício.

A situação do item b foi representada graficamente pelo aluno D no *software* e gerou o protocolo 5.

Protocolo 5 - Construção gráfica da atividade 1 - questão 2 - letra b – aluno D



Fonte: Dados da pesquisa.

As medidas das hipotenusas dos 8 triângulos retângulos, de bases iguais, escolhidos pelo aluno D, foram também facilmente obtidas por ele com recurso do próprio GeoGebra:

$$\overline{AB} = 0,4 \text{ cm}; \quad \overline{AE} = 0,45 \text{ cm}; \quad \overline{EF} = 0,51 \text{ cm}; \quad \overline{FI} = 0,55 \text{ cm}; \quad \overline{IJ} = 0,55 \text{ cm};$$

$$\overline{JM} = 0,51 \text{ cm}; \quad \overline{MO} = 0,45 \text{ cm}; \quad \overline{OP} = 0,4 \text{ cm}$$

Logo, o comprimento total da curva, no intervalo pedido, foi obtido, manualmente, pela soma das medidas das hipotenusas, resultando em 3,82 cm, aproximadamente.

Esta questão explorava, segundo Zabala, um conteúdo procedimental, visto que o aluno, para resolvê-la, deveria apresentar habilidades com as ferramentas do *software* GeoGebra, e conhecer os procedimentos e métodos necessários para o cálculo do comprimento da curva exigido; e um conteúdo conceitual, visto que o aluno deve conhecer o conceito de aproximações finitas, a definição de triângulo retângulo e que o comprimento da curva é dado pela soma das medidas das hipotenusas. O item trabalhava, também, segundo Duval (2009), aspectos algébricos, gráficos, geométricos e numéricos, como pode ser observado ao longo da resolução da atividade. Nesse sentido, o aspecto verbal também citado pelo autor, foi observado no momento em que o professor pesquisador realizou as

devidas orientações para a correta resolução da atividade e, também, no momento em que o aluno leu e interpretou a atividade segundo suas experiências e bagagens intelectuais.

Foi percebido, no decorrer da execução da atividade, que os alunos apresentaram um crescente interesse e curiosidade durante o desenvolvimento de todos os itens da atividade 1, aproveitando-se, especialmente, da facilidade ofertada pelo *software* de se obter números maiores de subdivisões do intervalo, com suas respectivas medidas, e encontrar resultados finais mais otimizados e convergentes para um determinado valor no intervalo considerado. Em decorrência disso, foi notado que os estudantes acabavam se desprendendo do texto da atividade, agindo de forma mais autônoma, o que remete a Zabala (1998), quando explicita sobre as relações que facilitam a aprendizagem, entre elas, a progressiva autonomia dos alunos na execução de ações, possibilitando que “aprendam a aprender”.

5.2 ATIVIDADE 2: Somatório

A atividade 2 possuía os seguintes objetivos específicos:

- Definir, calcular e interpretar o Somatório;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

5.2.1 Descrição e análise

A atividade 2 foi realizada em 2 h/aula, na sala laboratório de informática da instituição. As questões foram resolvidas individualmente, com a utilização de lápis, papel, borracha e calculadora. Ela era composta por 3 questões, que versavam sobre Somatório. A terceira questão foi escolhida para análise, pois envolvia a utilização da definição e das propriedades no cálculo manual, exigindo dos alunos habilidades já adquiridas nas questões anteriores. A seguir, a questão 3 com as resoluções feitas pelo aluno J no Word, com utilização da ferramenta *equation editor*.

Questão 3:

Calcular as somas abaixo:

$$a) \sum_{i=1}^{20} i = \frac{20 \cdot (20+1)}{2} = 210$$

$$b) \sum_{i=1}^{10} 7 = 7 \cdot 10 = 70$$

$$c) \sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{50 \cdot (50+1) \cdot (2 \cdot 50+1)}{6} = 42925$$

$$d) \sum_{i=1}^{30} (i^2 + 3i) = \sum_{i=1}^{30} i^2 + \sum_{i=1}^{30} 3i = \frac{30 \cdot (30+1) \cdot (2 \cdot 30+1)}{6} + 3 \cdot \frac{30 \cdot (30+1)}{2} = 10850$$

$$e) \sum_{i=1}^{20} (5i^2 - 4i + 3) = \sum_{i=1}^{20} 5i^2 - \sum_{i=1}^{20} 4i + \sum_{i=1}^{20} 3 = 5 \cdot \frac{20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20+1)}{6} - 4 \cdot \frac{20 \cdot (20+1)}{2} + 3 \cdot 20 = 13570$$

Esta questão explorava aspectos algébricos e numéricos, como pode ser observado ao longo da apresentação da resolução da atividade pelo aluno J. A questão abordava, também, um conteúdo conceitual, visto que o aluno, para resolvê-la, deveria conhecer e compreender o conceito e as propriedades do operador somatório; e um conteúdo procedimental, visto que o aluno deveria apresentar habilidades com cálculos algébrico e numérico.

Pôde-se notar que o aluno em questão apresentou interesse e certa facilidade durante o desenvolvimento da atividade, o que possibilitou a ele alcançar os objetivos propostos, assim como os demais alunos também apresentaram essa facilidade.

5.3 ATIVIDADE 3: Limite de somas finitas

A atividade 3 possuía os seguintes objetivos específicos:

- Calcular Limites de somas, utilizando propriedades do Limite e do Somatório;
- Calcular medida de área, utilizando o Limite de somas;

- Calcular medida de volume, utilizando o Limite de somas;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

5.3.1 Descrição e análise

Esta atividade foi realizada em 4 h/aula, na sala laboratório de informática da instituição e as questões foram resolvidas individualmente, com a utilização de lápis, papel, borracha e calculadora.

A atividade 3 era composta por 3 questões. A primeira, versava sobre a aplicação direta dos conceitos e das propriedades do Limite e do somatório, contendo 3 itens, de **a** até **c**. Os itens **b** e **c** da questão 1 foram escolhidos para análise, pois exigiam dos alunos habilidades já adquiridas no item **a**.

Essa questão exigia bastante atenção dos alunos e exigia constante orientação e supervisão do professor pesquisador. Ressalta-se que essa maior atenção foi pensada recorrendo a Zabala (1998), que preconiza:

O aluno necessita de incentivo e estímulos. É necessário que conheça a sua situação, em primeiro lugar, em relação a si mesmo e, em segundo lugar, em relação aos demais. Sem incentivos, sem estímulos e sem entusiasmo dificilmente poderá enfrentar o trabalho que lhe é proposto. Vimos e sabemos que sem uma atividade favorável em relação à aprendizagem não se avança, e esta atitude depende estreitamente da autoestima e do autoconceito de cada aluno. É imprescindível oferecer informações que o ajude a superar os desafios escolares. Portanto, tem que ser uma verdadeira ajuda, não unicamente uma constatação de carências que certamente o próprio aluno já conhece bastante bem. Tem que receber informação que o anime a continuar trabalhando ou a trabalhar. (ZABALA, 1998, p.216).

Eis, portanto, a questão:

Questão 1:

Calcular os Limites abaixo:

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4i^2}{n^3}$$

Inicialmente, vale ressaltar que o retorno ao texto disponibilizado (Capítulo 3) foi essencial para recordar conceitos, propriedades e procedimentos de cálculo e que, após sua leitura, o aluno R apresentou a seguinte resolução (PROTOCOLO 6). Essa resolução foi escolhida para ser apresentada nessa pesquisa, pois possuía alguns aspectos relevantes, como a simplificação de frações algébricas e o cálculo do Limite, como mostrado adiante.

Protocolo 6 - Resolução da atividade 3 - questão 1 - letra b – aluno R

The image shows a handwritten solution on lined paper for the limit of a sum of squares. The student starts with the expression $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4i^2}{n^3}$. They then rewrite it as $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2$. Next, they use the formula for the sum of squares, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, and substitute it into the expression. This leads to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \cdot \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{3} \right]$. The student then expands the numerator to $2n^2 + 3n + 1$, resulting in $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \cdot \left[\frac{2n^2 + 3n + 1}{3} \right]$. A note next to this step says "Atenção! Não cortar n^2 com n^2". The student then splits the fraction into $\frac{2}{3} + \frac{6n}{3n^2} + \frac{2}{3n^2}$. Finally, they take the limit as $n \rightarrow \infty$, where the terms with n in the denominator go to zero, leaving the final answer $\frac{4}{3}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Diante do protocolo mostrado e no decorrer da execução da atividade, pôde-se verificar que o aluno apresentou interesse, porém, grande dificuldade nos aspectos algébricos e procedimentais durante o desenvolvimento da atividade, em situações que envolviam simplificação de frações algébricas, como mostrado em detalhes no protocolo 7:

Protocolo 7 - Resolução da atividade 3 - questão 1 - letra b – Tipo de equívoco – aluno R

The image shows a handwritten mathematical expression on lined paper. It is the same expression as in Protocolo 6, but with a simplification error. The student has written $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \cdot \left[\frac{2n^2 + 3n + 1}{3} \right]$. The n^2 in the denominator of the fraction $\frac{2}{n^2}$ has a diagonal line through it, indicating an attempt to cancel it with the n^2 in the numerator of the fraction inside the brackets, which is an incorrect step.

Fonte: Dados da pesquisa.

Como pode ser notado no protocolo 7, o aluno chegou a simplificar o n^2 com o n^2 , em função da operação multiplicação existente entre eles, o que não é correto, pois não é só o $2n^2$ do numerador que está sendo dividido pelo n^2 do denominador, mas todo o numerador $2n^2 + 3n + 1$. Após a intervenção do professor pesquisador, o aluno corrigiu tal procedimento e executou normalmente a questão.

Já o item **c**, questão 1, foi desenvolvido com sistemática semelhante ao anterior:

Questão 1:

Calcular os Limites abaixo:

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{15}{n^2} \cdot (2i-3)^2$$

Um dos alunos respondeu da seguinte forma a mesma questão. Ressaltando-se, porém, que no protocolo 8 é apresentada a resolução da questão pelo aluno R, já corrigida pelo professor pesquisador.

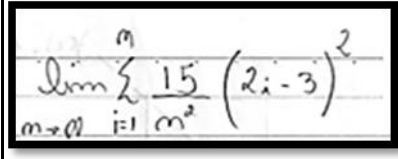
Protocolo 8 - Resolução da atividade 3 - questão 1 - letra c – aluno R

The image shows a handwritten student solution for the limit problem. The student starts with the expression $c) \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{15}{m^2} (2i-3)^2$. A note says "Atenção! Produto notável!". The student then expands the square: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{15}{m^2} \sum_{i=1}^m (4i^2 - 12i + 9)$. Next, they use the linearity of summation: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{15}{m^2} \left[\sum_{i=1}^m 4i^2 - \sum_{i=1}^m 12i + \sum_{i=1}^m 9 \right]$. They then substitute the formulas for the sum of squares and the sum of integers: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{15}{m^2} \left[\frac{4 \cdot m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{12 \cdot m(m+1)}{2} + 9m \right]$. After simplifying, they get: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{15}{m^2} \left[\frac{4m^3 - 12m^2 + 11m}{3} \right]$. This is further simplified to: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{5}{m^2} \left[4m^3 - 12m^2 + 11m \right]$. Finally, they write: $\lim_{m \rightarrow \infty} \left[20m - 60 + \frac{55}{m} \right] \rightarrow \infty$.

Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se notar, diante do exposto, que o aluno, apesar de ter mostrado interesse, possuía grande dificuldade em situações que envolviam produtos notáveis, como demonstrado, em detalhes, no protocolo 9, entendendo que o aluno passou por situações que exigiam atenção e habilidades algébricas.

Protocolo 9 – Parte da resolução da atividade 3 - questão 1 - letra c – aluno R



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{15}{n^2} (2i-3)^2$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento, o aluno chegou a desenvolver a potência $(2i-3)^2$ dessa forma $2i^2 - 9$, desconsiderando-a como um produto notável do tipo $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, e que, portanto, deve ser desenvolvido com mais critério e atenção, cometendo equívocos dos tipos algébrico e procedimental. Porém, após a intervenção do professor pesquisador, o aluno corrigiu tal procedimento.

A questão 2 dessa atividade 3 versava sobre cálculo de área utilizando o Limite de somas e contém um único item.

Questão 2:

Calcular a área limitada pela reta de equação $f(x) = x+1$ e pelo eixo x , no intervalo $[0, 2]$, utilizando o Limite de somas.

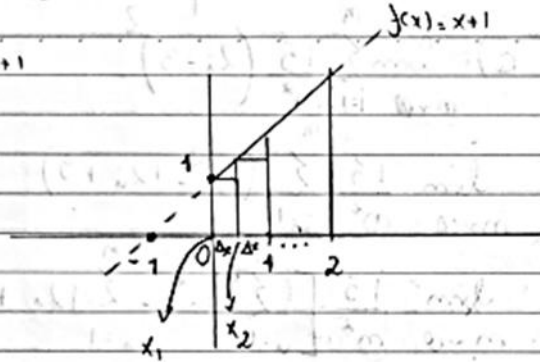
Essa questão apresentava um alto nível de dificuldade, segundo o aluno R e, portanto, a resolução da questão desenvolvida por ele foi escolhida para ser apresentada nessa pesquisa, como visto no protocolo 10. Antes, porém, torna-se necessário enfatizar, de acordo com o que diz Zabala (1998), que o exercício, para ser proposto deve:

[...] propor algumas metas que o aluno sabe que lhe são acessíveis, que não estejam muito distante de suas possibilidades e, sobretudo, que para superá-las possa contar com a ajuda dos professores. Tem que saber qual é o processo seguido a fim de compreender as causas dos avanços e dos tropeços. E esta é a função prioritária da informação que o aluno tem que receber [...]. (ZABALA, 1998, p.217).

Protocolo 10 - Resolução da atividade 3 - questão 2 - aluno R

2. $f(x) = x+1$

$\Delta x: x+1=0$
 $x=-1$
 $\Delta y: 1$



$x_1 = 0$
 $x_2 = 0 + \Delta x$
 $x_3 = 0 + 2 \Delta x$
 $x_i = 0 + (i-1) \cdot \Delta x$
 $x_i = (i-1) \cdot \frac{2}{m}$

$\Delta x = \frac{2-0}{m} = \frac{2}{m}$ *m Retângulos*

$A = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot \Delta x$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \left[(i-1) \cdot \frac{2}{m} \right] \cdot \frac{2}{m}$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \left[\frac{4}{m^2} \cdot (i-1) \right]$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4}{m^2} \left[\sum_{i=1}^m (i-1) \right]$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{m^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^m i - \sum_{i=1}^m 1 \right) \right]$

Fonte: Dados da pesquisa.

Segue, no protocolo 11, a continuação da resolução da atividade 3, questão 2, onde é apresentado o cálculo do MMC, de forma correta e precisa, pelo aluno R.

Protocolo 11 - Resolução da atividade 3 - questão 2 – Continuação – aluno R

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{m^2} \cdot \left(\frac{m \cdot (m+1)}{2} - m \right) \right]$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{m^2} \cdot \left(\frac{m^2 + m - 2m}{2} \right) \right]$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{m} \right) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 2$$

ATENÇÃO!
Não certem o 4
com o 2. Tiram
o MMC antes.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ressalta-se que o aluno, assim como em atividade anterior, apesar de ter demonstrado grande interesse na execução da atividade, apresentou dificuldade nos aspectos algébricos e procedimentais durante o desenvolvimento da atividade, fato que pode ter gerado, a partir dele, a informação de que aquela questão seria de difícil resolução, pois trabalhava situações que envolviam, novamente, simplificação de frações algébricas, como demonstrado no detalhe do protocolo 12.

Protocolo 12 – Parte da resolução da atividade 3 - questão 2 – Tipo de equívoco – aluno R

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{m^2} \cdot \left(\frac{m \cdot (m+1)}{2} - m \right) \right]$$

Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se notar que, nesse momento, o aluno chegou a simplificar o n com o n^2 , e o 4 com o 2, em função da operação multiplicação existente entre eles, o que não é correto, pois antes de simplificar, seria necessário calcular o MMC entre os denominadores dos termos que estão dentro dos parênteses, como está apresentado no protocolo 13, já corrigida a questão:

Protocolo 13 - Resolução da atividade 3 - questão 2 – aluno R

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{m^2} \cdot \left(\frac{m^2 + m - 2m}{2} \right) \right]$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Então, após a intervenção do professor pesquisador, o aluno corrigiu tal procedimento, executando corretamente a questão, como indicado no protocolo 11.

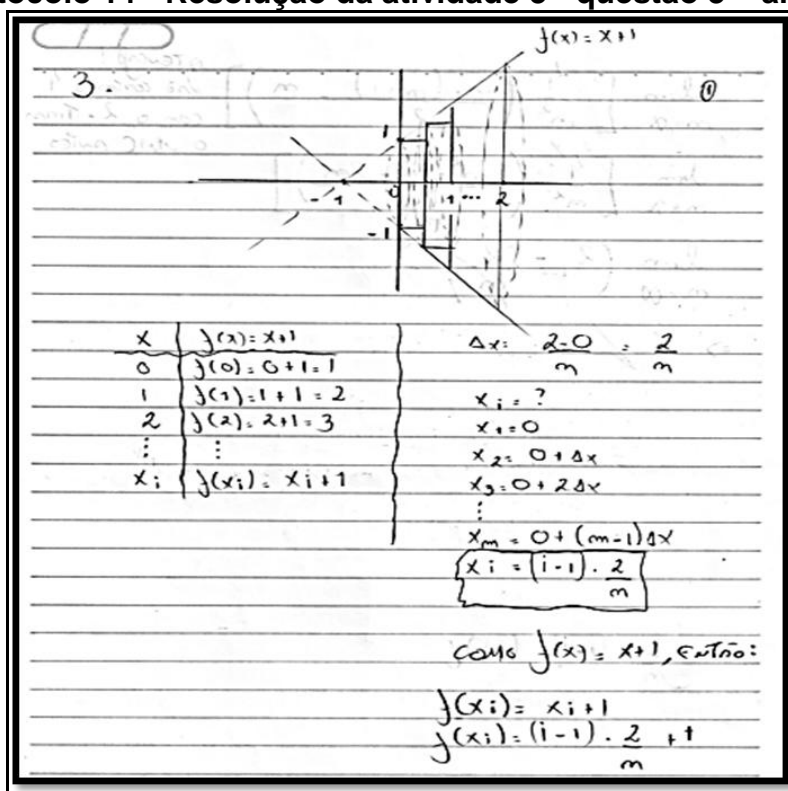
A questão 3 dessa atividade 3, por sua vez, trabalhava com o cálculo de volume utilizando o Limite de somas e continha um único item.

Questão 3:

Esboçar o sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da área limitada pela reta de equação $f(x) = x + 1$, no intervalo real $[0, 2]$ e calcular o volume desse sólido, utilizando o Limite de somas:

A resolução da questão desenvolvida pelo aluno R, sob orientação e supervisão do professor pesquisador, foi escolhida para ser apresentada nessa pesquisa, pois apresentava alguns aspectos relevantes, principalmente quanto ao tempo gasto para a devida resolução. Inicialmente, o retorno ao texto disponibilizado foi essencial para recordar conceitos, propriedades e procedimentos de cálculo, assim como aconteceu nas atividades anteriores.

Protocolo 14 - Resolução da atividade 3 - questão 3 – aluno R



Fonte: Dados da pesquisa.

Segue, no protocolo 15, a continuação da resolução da atividade 3, questão 3, onde é apresentado o cálculo do volume do sólido de revolução, pelo aluno R.

Protocolo 15 - Resolução da atividade 3 - questão 3 – Continuação – aluno R

$$\begin{aligned}
 V_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot \Delta x \\
 V_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{(i-1) \cdot 2 + 1}{m} \right)^2 \cdot \frac{2}{m} \right] \right\} \\
 V_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \left[\frac{(i^2 - 2i + 1) \cdot 4}{m^2} + \frac{4i}{m} - \frac{4 + 1}{m} \right] \cdot \frac{2}{m} \right\} \\
 &\quad \text{Teorema de Stolz (Cujano)} \\
 V_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \left[\frac{(i^2 - 2i + 1) \cdot 8}{m^3} + \frac{8i}{m^2} - \frac{8}{m^2} + \frac{2}{m} \right] \right\} \\
 V_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8}{m^3} \left(\sum_{i=1}^m i^2 - 2 \sum_{i=1}^m i + \sum_{i=1}^m 1 \right) + \frac{8}{m^2} \sum_{i=1}^m i - \frac{8}{m^2} \sum_{i=1}^m 1 + \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m 1 \right\} \\
 V_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8}{m^3} \left(\frac{m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)}{6} - \frac{2 \cdot m \cdot (m+1)}{2} + m \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8 \cdot m \cdot (m+1)}{m^2} - \frac{8 \cdot m}{m^2} + \frac{2 \cdot m}{m} \right\} \\
 V_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4}{m^3} \left(\frac{2m^3 - 3m^2 + m}{3} \right) + 4 - \frac{4}{m} + 2 \right\} \\
 V_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8}{3m^2} - \frac{8}{m} + \frac{26}{3} \right\} \\
 V_m &= \frac{26}{3} \text{ u.v.} \quad \text{TEMPO GASTO: 1h, 20min}
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno, da mesma forma como ocorreu na questão 1 dessa atividade, apesar de apresentar interesse, teve, grande dificuldade nos aspectos algébricos (DUVAL, 2009) e procedimentais (ZABALA, 1998) durante o desenvolvimento da atividade, principalmente em situações que envolvem produtos notáveis, como a demonstrada no protocolo 16. Duval (2009, p.14) informa, nesse sentido que:

Não se pode ter compreensão em matemáticas se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc, com suas

representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras... porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (DUVAL, 2009, p.14).

Protocolo 16 – Parte da resolução da atividade 3 - questão 3– aluno R

$$\sqrt{n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[\frac{(i-1) \cdot 2 + 1}{m} \right]^2 \cdot \frac{2}{m} \right\}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento mostrado no protocolo 16, e conforme preconizou Duval (2009), o aluno chegou a desconsiderar a potência como um produto notável do tipo $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$, elevando cada um dos termos ao quadrado. Porém, após a intervenção do professor pesquisador, tais procedimentos foram corrigidos. No caso específico dessa questão, vale ressaltar que foi despendido um tempo significativo para a sua resolução, com 1 hora e 20 minutos de execução.

5.4 ATIVIDADE 4: Teorema Fundamental do Cálculo

A atividade 4 possuía os seguintes objetivos específicos:

- Utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo;
- Reconhecê-lo como ferramenta prática para o cálculo de Integrais Definidas;
- Determinar os Limites de integração;
- Esboçar os gráficos que representam as áreas;
- Montar a Integral Definida;
- Calcular as medidas das áreas das regiões compreendidas entre curvas, utilizando a Integral Definida;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

5.4.1 Descrição e análise

A atividade foi realizada em 4 h/aula, na sala laboratório de informática da instituição e as questões foram resolvidas individualmente, com a utilização de lápis, papel, borracha e calculadora. Essa atividade foi pensada em base no que afirma

Duval (2009). Nas palavras do autor, essa atividade poderia ser considerada como de “conversão”, visto que traz um mesmo problema que deveria ser resolvido pelo Teorema Fundamental do Cálculo e não mais pelo Limite de somas finitas, como ocorreu na questão anteriormente discutida. Nesse sentido, expõe Duval (2009) que:

A conversão é então uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida. [...] Entretanto, a conversão requer que percebamos a diferença entre o sentido e a referência dos símbolos ou signos, ou entre o conteúdo de uma representação e aquilo que ela representa. Sem a percepção dessa diferença, a atividade de conversão torna-se impossível ou incompreensível. (DUVAL, 2009, p.59).

A atividade 4 era composta por 3 questões, sendo, então, a primeira versando sobre a resolução da questão anterior, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e suas propriedades. O principal objetivo nessa questão era mostrar como é rápida e eficaz a resolução dessa questão pelo Teorema. Eis a questão:

Questão 1:

Resolver o exercício anterior utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, ou melhor, a Integral Definida:

Para resolver essa questão o aluno deveria estar atento ao produto notável.

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

No protocolo 17, a resolução da questão por um dos alunos sujeitos da pesquisa.

Protocolo 17 - Resolução da atividade 4 - questão 1- aluno R

Cálculo pela integral definida:

$$V = \int_0^2 (x+1)^2 dx$$

$$V = \int_0^2 (x^2 + 2x + 1) dx$$

$$V = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x \right] dx$$

$$V = \int_0^2 \left[\frac{8}{3} + 4 + 2 \right] dx$$

$$V = \frac{26}{3} \text{ u.c.}$$

Sem comentários ↗

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse caso, os alunos não precisaram esboçar novamente o sólido, pois este já havia sido realizado na questão anterior. Optou-se pela demonstração do exercício pelo mesmo aluno que da atividade anterior, visto que um dos objetivos dessa atividade era mostrar a agilidade do método da Integral Definida em contraposição ao Limite de somas. Nesse sentido, vale lembrar que na atividade anterior esse aluno demandou 1 hora e 20 minutos para sua resolução e desta vez resolvendo essa questão através da Integral Definida, o tempo gasto foi de cerca de 2 minutos, graças a Newton, Leibniz e seus antecessores, como discorrido no capítulo 2 deste trabalho.

Pôde-se notar, portanto, diante do tempo gasto, que o aluno R demonstrou interesse e habilidade nos aspectos relevantes à pesquisa, tais como algébricos, numéricos, gráficos, geométricos, verbais, conceituais, e procedimentais, como pode ser observado ao longo da resolução da atividade. Isso torna-se ainda mais claro, quando se embasa no que coloca Duval (2009). Para ele:

A conversão, implícita ou explícita, das representações é necessária para aceder ao conteúdo representado do outro lado das limitações do representante [...], explorando as possibilidades de transformação dadas pelas regras do tratamento do registro do qual ele se sobressai. [...] Um sujeito no qual a coordenação dos registros é encontrada suficientemente desenvolvida pode muito bem se ater às representações de um só registro. [...] Mas na verdade, ele dispõe potencialmente de representações que se destacam de outros registros e que ficam associados de maneira latente às que ele utiliza. Essa coordenação lhe dá, com respeito a representações semióticas que ele utiliza, esse grau de liberdade permitindo ter estratégias

heurísticas, conduzir bem os tratamentos escolhidos e controlar sua pertinência. (DUVAL, 2009, p.91).

E pode-se inferir que foi justamente o preconizado pelo autor que aconteceu com o aluno em questão, já que, após resolver a questão com facilidade, ele, além de ter escrito ao final da atividade “Sem comentário!”, referindo-se à diferença do tempo gasto entre as duas questões, ainda afirmou que: “ Através desse exercício eu aprendi a dar mais valor à Integral Definida! Usarei sempre a partir de agora!”

Já a questão 2 dessa Atividade 4 versava sobre o cálculo direto de Integrais Definidas, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, contendo 9 itens, do a ao i. A resolução dos itens a e g do aluno D foram escolhidos para análise, pois apresentavam, em sua resolução, aspectos relevantes à pesquisa. Eis a questão:

Questão 2:

Calcular as Integrais abaixo:

$$a) \int_{-2}^3 x \cdot dx$$

Apresenta-se, no protocolo 18, a resolução manual do aluno D, acometida de equívoco.

Protocolo 18 - Resolução da atividade 4 - questão 2 – letra a – aluno D

$$a) \int_{-2}^3 x \cdot dx \rightarrow \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^3$$

$$\left(\frac{3^2}{2} \right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} \right) = \frac{9}{2} - 2 = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2} + C$$

Como a integral é definida, existe um único resultado, portanto, não se usa + C.

Fonte: Dados da pesquisa.

O protocolo 18 indica que o aluno cometeu um equívoco no aspecto verbal escrito, e ao mesmo tempo, conceitual e procedimental, no momento em que adicionou a constante C ao final do cálculo da Integral Definida. Nesse sentido, vale

ressaltar que a Integral Definida gera um único resultado numérico, que, muitas vezes, representa a medida de uma área, de um volume, ou comprimento de uma curva, etc. Já a Integral indefinida, sim, gera infinitas soluções, por isso e nesse caso, deve-se adicionar C ao resultado algébrico obtido. Isso permite inferir que o aluno provavelmente não possui a “identificação das unidades significantes nos registros de saída e chegada”, conforme aponta Duval (2009, p.99).

O item **g** da questão 2, a seguir, foi desenvolvido com sistemática semelhante ao anterior.

Questão 2:

Calcular as Integrais abaixo:

$$g) \int_{-1}^3 \frac{x+5}{3} dx$$

Apresenta-se, no Protocolo 19, a resolução manual do aluno D, acometida de equívoco.

Protocolo 19 - Resolução da atividade 4 - questão 2 – letra g – aluno D

g) $\int_{-1}^3 \frac{x+5}{3} dx \rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^3 x+5 dx$

$\frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_{-1}^3$ ←

$\frac{1}{3} \left(\frac{(3)^2}{2} + 5(3) \right) - \left(\frac{1}{2} - 5 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2} + 15 - \frac{1}{2} + 15 \right)$

$\rightarrow \frac{1}{3} \cdot 24 = 8$

Fonte: Dados da pesquisa.

Pôde-se notar que o aluno cometeu um equívoco procedimental, numérico e algébrico, no momento em que não percebeu a importância da utilização dos parênteses na segunda linha do exercício. Esse tipo de equívoco demonstra, conforme é dito por Zabala (1998), que o aluno deve desenvolver habilidades capazes de lhe ajudar a atingir um objetivo.

Já a questão 3 dessa Atividade 4, trabalhava o cálculo de áreas, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, contendo 3 itens, do **a** ao **c**. A resolução do item **a** do aluno R foi escolhido para análise, como pode ser visto adiante. Eis a questão:

Questão 3:

Determinar os pontos de interseção, esboçar os gráficos que representam as áreas, montar a Integral com seus Limites e calcular as áreas das regiões compreendidas entre as curvas abaixo:

a) $y = x^2 - 2$ e $y = 2$

Apresenta-se, no protocolo 20, a resolução manual do aluno R, sem equívocos.

Protocolo 20 - Resolução da atividade 4 - questão 3 – letra a – aluno R

Pontos de interseção:

Basta igualar os membros. } $P/x = 2$, Temos:
 $x^2 - 2 = 2$ } $y = 2$
 $x^2 = 4$ } $P/x = -2$, Temos:
 $x = \pm 2$ } $y = 2$

Logo, os pontos são: A(2, 2) e B(-2, 2).

Gráfico:

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| x | y | x | y |
| -2 | 2 | -2 | 2 |
| 0 | -2 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Integral definida para o cálculo da área:

$$\int_{-2}^2 [2 - (x^2 - 2)] dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$$

$$= \int_{-2}^2 4 dx - \int_{-2}^2 x^2 dx$$

$$= 4x \Big|_{-2}^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2$$

$$= [4 \cdot 2 - 4 \cdot (-2)] - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right]$$

$$= (8 + 8) - \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3} \right)$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que, como a variável é x , os Limites de integração serão obtidos também no eixo x , já que a função $y = 2$ é constante. Vale a pena ressaltar que ao

montar a Integral foi acrescentado o dx , componente fundamental que determina qual é a variável da função integrando.

Esta questão explorava aspectos relevantes à pesquisa, tais como algébricos, numéricos, gráficos e geométricos, verbais, conceituais e procedimentais, como pode ser observado ao longo da sua resolução.

Nessa atividade, os alunos deveriam ficar bastante atento quanto à utilização dos parênteses e, também, quanto aos sinais nas operações. O aluno R demonstrou interesse e habilidade durante o desenvolvimento da atividade, ressaltando-se que o professor pesquisador acompanhou de perto a resolução, orientando sempre que necessário. Os outros alunos desenvolveram a questão com facilidade e tiveram, como maior desafio, as operações com os sinais que, segundo Duval (2009), são necessárias ao desenvolvimento da atividade Matemática.

5.5 ATIVIDADE 5: O Limite de somas definido como uma Integral Definida

A atividade 5 possuía os seguintes objetivos específicos:

- Relacionar o Limite de somas com a Integral Definida;
- Utilizar essa definição para calcular medidas de áreas, volumes, comprimentos de curvas e valores médios;
- Resolver problemas, determinando os Limites de integração, montando a Integral e efetuando os cálculos necessários;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

5.5.1 Descrição e análise

A atividade foi realizada em 4 h/aula, também na sala laboratório de informática da instituição. As questões foram resolvidas individualmente, com a utilização de lápis, papel, borracha e calculadora. Os alunos utilizaram, também, o *software* VCN para o cálculo de Integrais Definidas.

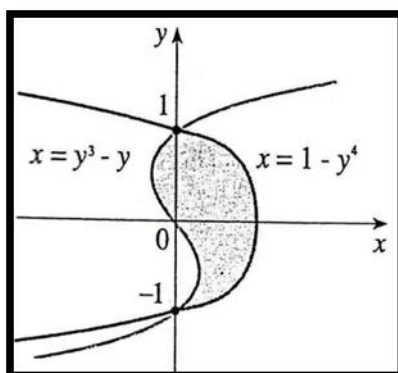
Essa atividade 5 era composta por 5 questões, sendo a primeira versando sobre o cálculo de área a partir de uma figura plana dada, através do Teorema Fundamental do Cálculo, uma vez que o Limite de somas está diretamente relacionado com a Integral Definida. Essa questão continha 2 itens, **a** e **b**. A

resolução do item **b** pelo aluno D foi escolhida para análise, pois cobrava as mesmas habilidades do item **a**, como visto abaixo:

Questão 1:

Determinar os Limites de integração, montar a Integral e calcular a área da região hachurada:

b)



Inicialmente, o aluno deveria, então, determinar os Limites de integração, montar a Integral Definida e, por fim, calcular essa Integral para obter a medida da área desejada. O Protocolo 21 apresenta a resolução do aluno D, acrescida da correção do professor pesquisador.

Protocolo 21 - Resolução da atividade 5 - questão 1 - letra b - aluno D

$x = y^2$ $x = 1 - y^4$

$$\int_{-1}^1 (1 - y^4 - y^3 + y) dy$$

$$\int_{-1}^1 (-y^4 - y^3 + y + 1) dy$$

$$\left(-\frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{-1}^1$$

$$\left(-\frac{1^5}{5} - \frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} - 1 \right)$$

Sinais contrários

$$\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 \right)$$

↳ Resposta:

$$\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(+\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$-\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{-2 + 2}{5} = \frac{-2 + 10}{5} = \frac{8}{5} \text{ u.a.}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se, no cotidiano escolar, que, muitas vezes, o aluno compreende a maneira de resolver o exercício, mas acaba errando contas por um motivo ou outro. No caso da resolução do protocolo 21, nota-se que o aluno D montou a Integral corretamente, com os Limites de integração, mas cometeu um equívoco, no momento em que inverteu o sinal de forma inadequada. Isso significa que, de acordo com Zabala (1998), o aluno cometeu um equívoco relativo aos conteúdos factual, mas também atitudinal, nos dizeres do autor, pois: “todo conteúdo, por mais específico que seja, sempre está associado e, portanto, será aprendido junto com conteúdos de outra natureza”. Exemplificando em proximidade com o mostrado no equívoco, o autor diz que “os aspectos mais factuais da soma (código e símbolo)

são aprendidos junto com os conceituais da soma (união e número), com os algorítmicos (cálculo mental e algoritmo) e os atitudinais (sentido e valor).”

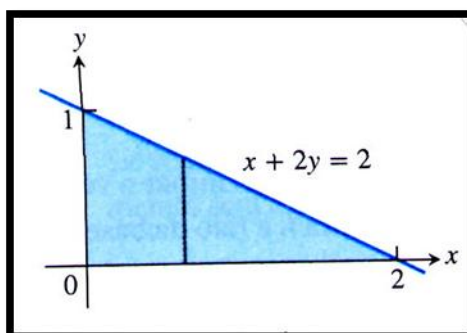
Por outro lado, porém, o aluno apresentou habilidades quanto aos aspectos numéricos, algébricos, geométricos, gráficos, verbais, procedimentais e conceituais em diversas etapas do exercício.

Já a questão 2 dessa atividade 5 versava sobre volume de sólido de revolução a partir do aspecto gráfico dado, contendo dois itens, **a** e **b**, que foram resolvidos através do cálculo manual, usando lápis, borracha, papel, régua e calculadora. O item **a** da questão 2 foi escolhido para análise, pois cobrava as mesmas habilidades e procedimentos de cálculo da letra **b**.

Questão 2:

Determinar os Limites de integração, montar a Integral e calcular o volume do sólido obtido com a rotação da região sombreada em torno do eixo dado:

a) Em torno do eixo x



A resolução do item a pelo aluno D está representada no protocolo 22:

Protocolo 22 - Resolução da atividade 5 - questão 2 – letra a – aluno D

$x + 2y = 2 \rightarrow 2y = 2 - x$
 $y = \frac{2 - x}{2}$
 $y = 1 - \frac{x}{2}$

$V = \int_0^2 \pi \cdot R(x)^2 dx$
 $V = \int_0^2 \pi \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx$

Procura notar!!!
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$V = \pi \cdot \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx$

$V = \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{4} \right]_0^2$

$V = \pi \cdot \left(2 - \frac{2^3}{4} \right) - \left(0 - \frac{0^3}{4} \right)$

$V = \pi \cdot 2 - \frac{8}{4} = 0$? Como o volume de um sólido como este pode ser zero?

Reforço:

$V = \pi \cdot \int_0^2 \left(\frac{2-x}{2} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(\frac{4 - 4x + x^2}{4} \right) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 (4 - 4x + x^2) dx$

$V = \frac{\pi}{4} \cdot \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(8 - 8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$V = \frac{2\pi}{3} \text{ u.v}$

Fonte: Dados da pesquisa

Esta questão explorava, segundo Duval (2009), aspectos algébricos, numéricos, gráficos e geométricos, como pode ser observado ao longo da resolução da atividade. Já o aspecto verbal também foi explorado, no momento em que o professor pesquisador realizou as devidas orientações para a correta resolução da atividade e, também, no momento em que o aluno leu e interpretou a atividade segundo suas experiências e bagagens intelectuais. Essa orientação dada pelo pesquisador também precisou ser preconizada pelo que dizem autores, já que a questão do sentido torna-se muito importante quando se desenvolve um trabalho da forma como esse foi proposto. Nesse sentido, para Duval (2009):

A questão do sentido não pode ser ignorada uma vez que se trata de estudar o funcionamento do cognitivo humano. Os ensinantes, aliás, tornam-se muito sensíveis a essa questão, afirmando sempre se chocar em uma declaração de “perda de sentido” da parte dos alunos nas atividades matemáticas [...]. (DUVAL, 2009, p.28).

A atividade explorava, também, segundo Zabala (1998), um conteúdo conceitual, visto que o aluno, para resolvê-la, necessitou conhecer e compreender os conceitos de volume e Integral Definida e suas respectivas propriedades; e um conteúdo procedimental, visto que o aluno deveria apresentar habilidades gráficas, geométricas, algébricas e numéricas. Nessa atividade, o aluno precisaria ficar bastante atento quanto à utilização dos parênteses e, também, quanto aos produtos notáveis, a fim de evitar equívocos dos tipos algébricos, numéricos e procedimentais.

Observou-se que, nesse exercício, o produto notável foi desprezado de forma bastante inadequada logo no início, um equívoco muito comum, entre todos os alunos que executavam a atividade, como demonstrado no protocolo 23. Isso pode ter ocorrido, tanto pela falta de atenção ao procedimento exigido na questão, quanto à exposição do professor pesquisador, que pode ter sido ignorada pelos alunos.

Protocolo 23 – Parte da resolução da atividade 5 - questão 2 – letra a – Tipo de equívoco – aluno D

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 dx.$$

$$V = \pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (1-x^2) dx.$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir desse momento, devido ao erro cometido, o aluno chegou a um resultado que chamou a atenção do próprio discente, visto que obteve zero para o volume do sólido. Assim, entendendo ter cometido algum equívoco, o próprio aluno se questionou: “como pode um sólido como esse apresentar uma medida de volume igual a zero? Tem alguma coisa errada!”. Esta frase está identificada no detalhe do protocolo 24 apresentado a seguir:

Protocolo 24 - Resolução da atividade 5 - questão 2 – letra a – Tipo de equívoco – aluno D

Handwritten student work showing a calculation: $V = \pi \cdot 2 - \frac{8}{4} = 0$. To the right, the student has written: "Como o volume de um sólido como este pode ser zero?"

Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, após entender que havia errado, e com a intervenção do professor, o aluno seguiu em frente na execução do item, agora corretamente.

Já a terceira questão versava sobre o cálculo de volume de sólidos de revolução a partir das equações dadas, contendo 3 itens, do **a** ao **c**. Esta questão foi resolvida pelos alunos, individualmente, através do cálculo manual, sob constante supervisão do professor pesquisador e não apresentou necessidade de correções, já que todos os alunos acertaram-na. Isso demonstra que, após as correções anteriores, nenhum aluno apresentava mais dificuldades com relação àquela questão, o que pode ser um indicador de objetivos alcançados, conforme aponta Zabala (1998), quando diz que as atividades devem ser pensadas de modo que os alunos possam se sentir cada vez mais capazes, ampliando a autoestima e o processo reflexivo, tanto do aluno como também do professor.

A quarta questão, por sua vez, versava sobre o cálculo de comprimento de curvas dados a equação e os Limites de integração, contendo 2 itens, **a** e **b**. Ela foi resolvida pelos alunos, individualmente, através do cálculo manual, com o auxílio do *software* VCN. O item **a** foi escolhido para análise. Eis a questão:

Questão 4:

Montar a Integral e calcular o comprimento de cada curva abaixo, utilizando a Integral Definida. Caso não seja possível calcular a Integral pelos métodos convencionais, utilizar o *software* VCN:

$$a) y = \frac{1}{3} \cdot 2 \sqrt{(x^2 + 2)^3}, \text{ de } x=0 \text{ a } x=3$$

Nessa atividade, os alunos deveriam ficar bastante atento quanto à utilização dos parênteses, quanto aos produtos notáveis, quanto às regras de derivação,

integração, a fim de evitar equívocos. A resolução do item a pelo aluno D está representada nos protocolos 25 e 26.

Protocolo 25 - Resolução da atividade 5 - questão 4 – letra a – aluno D

Handwritten mathematical work for Protocolo 25:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{\frac{3}{2} - 1} \cdot 2x = \frac{1}{2} (x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot x$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} (x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot x\right)^2} \cdot dx$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left((x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (x^2 + 2) \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}} \cdot dx$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar de o Teorema Fundamental do Cálculo agilizar o cálculo de muitas Integrais, existem aquelas que são mais desafiadoras, para determinados alunos, como a que está representada no protocolo 26, e que, portanto, necessita de outros conhecimentos algébricos, numéricos, procedimentais e conceituais. Neste caso, ao fatorar o radicando, a integral é imediata.

Protocolo 26 - Resolução da atividade 5 - questão 4 – letra a – Continuação – aluno D

Handwritten mathematical work for Protocolo 26:

$$L = \int_0^3 (1 + x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

Obs: Esta integral não é possível resolver pelos métodos convencionais, por isso utilizaremos o auxílio do software VCM.

$L = 12$ unidades de comprimento

Fonte: Dados da pesquisa.

Pela primeira vez na pesquisa, foi, então, introduzido o uso do *software* VCN. Assim, como os alunos ainda não o conheciam, o professor pesquisador apresentou-lhes as ferramentas necessárias para a resolução da questão. Os alunos ficaram admirados com a simplicidade e agilidade do VCN para o cálculo de Integrais Definidas, cuja resolução pelo cálculo manual é mais difícil.

O protocolo 27 apresenta a tela do VCN com os dados necessários ao cálculo desejado. O professor pesquisador informou aos alunos que, para o cálculo da Integral Definida, deveriam deixar o número de pontos em branco (este é gerado automaticamente pelo próprio *software*); informar o X inicial e o X final, representando os Limites de integração; o “passo h”, representando a medida da base do retângulo, que deveria ser a menor possível (0,1 é uma medida pequena com apenas uma casa decimal que dá uma boa aproximação do resultado real); e escrever a função de forma criteriosa e correta. E então, após esses procedimentos, bastaria clicar em “Calcula”, para que o *software* pudesse calcular o resultado desejado.

Protocolo 27 - Resolução da atividade 5 - questão 4 – letra a – VCN – aluno D

The screenshot shows the VCN software interface for numerical integration. The function entered is $y = f(x) = (1+x^4+2*x^2)^{0,5}$. The integration limits are from $X = 0$ to $X = 3$, with a step size $h = 0,1$. The software has calculated the integral value as 12 using the Second Rule of Simpson. A table of points and coefficients is displayed below the input fields.

| Pontos | X = | F(X) = | Coefic. = |
|--------|-----|--------|-----------|
| 1 - | 0 | 1 | 1 |
| 2 - | 0,1 | 1,01 | 3 |
| 3 - | 0,2 | 1,04 | 3 |
| 4 - | 0,3 | 1,09 | 2 |
| 5 - | 0,4 | 1,16 | 3 |
| 6 - | 0,5 | 1,25 | 3 |
| 7 - | 0,6 | 1,36 | 2 |
| 8 - | 0,7 | 1,49 | 3 |
| 9 - | 0,8 | 1,64 | 3 |
| 10 - | 0,9 | 1,81 | 2 |
| 11 - | 1 | 2 | 3 |
| 12 - | 1,1 | 2,21 | 3 |
| 13 - | 1,2 | 2,44 | 2 |
| 14 - | 1,3 | 2,69 | 3 |
| 15 - | 1,4 | 2,96 | 3 |
| 16 - | 1,5 | 3,25 | 2 |
| 17 - | 1,6 | 3,56 | 3 |
| 18 - | 1,7 | 3,89 | 3 |
| 19 - | 1,8 | 4,24 | 2 |
| 20 - | 1,9 | 4,61 | 3 |
| 21 - | 2 | 5 | 3 |
| 22 - | 2,1 | 5,41 | 2 |
| 23 - | 2,2 | 5,84 | 3 |
| 24 - | 2,3 | 6,29 | 3 |
| 25 - | 2,4 | 6,76 | 2 |
| 26 - | 2,5 | 7,25 | 3 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos apresentaram interesse e demonstraram habilidades nos aspectos geométricos, gráficos, numéricos, algébricos, verbais escritos, procedimentais e

conceituais durante o desenvolvimento da atividade. O professor pesquisador acompanhou orientando-os quanto à utilização do *software* VCN. Pôde-se notar que a utilização do *software* VCN foi de fundamental importância no cálculo da Integral Definida, pois, tanto na letra a quanto na letra b, as Integrais Definidas que surgiram eram muito difíceis para serem calculadas por métodos convencionais. Tanto que os próprios alunos, ao montar a Integral, perceberam que, naquele momento, com o conhecimento que tinham adquirido, no decorrer da execução das outras atividades, não havia saída para resolvê-la a não ser com o auxílio do *software* VCN. Assim, com o uso do *software*, o resultado foi obtido com êxito por todos os alunos.

A quinta questão, por sua vez, versava sobre o cálculo do valor médio, contendo um único item que foi resolvido individualmente, através do cálculo manual, e foi o seguinte:

Questão 5:

Determinar o valor médio de $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[-3, 3]$ e calcular o valor de c , abscissa do ponto em que f assume esse valor médio:

Pôde-se notar que os alunos apresentaram interesse e demonstraram habilidades nos aspectos geométricos, gráficos, numéricos, algébricos, verbais escritos, procedimentais e conceituais durante todo o desenvolvimento da atividade, porém, a resolução da questão 5 pelo aluno D foi escolhida para análise, pois apresentava um aspecto relevante à nossa pesquisa a respeito da dúvida quanto à utilização do módulo, como mostra o protocolo 28:

Protocolo 28- Resolução da atividade 5 - questão 5 – aluno D

$$\int_{-3}^3 x^2 - 9 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} - 9x \right|_{-3}^3$$

$$\left[\left(\frac{3^3}{3} - 9(3) \right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - 9(-3) \right) \right]$$

$$(9 - 27) - (-9 + 27) = -18 - 18 = -36 =$$

$$F(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

$$F(c) = \frac{1}{3+3} \cdot (-36) = -6$$

$$F(c) = c^2 - 9$$

$$c^2 - 9 = -6$$

$$c^2 = -6 + 9$$

$$c = \pm\sqrt{3}$$

$$c = \pm 1,73$$

MÓDULO OU NÃO? NÃO!

INTERPRETO NO RESULTADO!

Fonte: Dados da pesquisa.

Ressalta-se que, assim como ocorreu nas demais atividades, também nessa questão, o professor pesquisador acompanhou de perto a resolução dessa atividade, orientando sempre que necessário; porém, especificamente nessa atividade, um aluno teve dúvida se considerava o resultado em módulo ou não. Infere-se que isso tenha acontecido porque no cálculo de área ou volume, deve-se considerar o resultado obtido em módulo, o que não é o caso nesse exercício, pois, seja ele positivo ou negativo, é necessário manter o sinal, utilizando esse resultado para se obter o valor médio $f(c)$ e, em seguida, o valor de c . Diz Duval (2009), nesse sentido, que:

É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas com suas representações. [...] A possibilidade de efetuar os tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. (DUVAL, 2009, p.14-16).

5.6 ATIVIDADE 6: Desenvolvendo habilidades para o cálculo de área

A atividade 6 apresentava os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver habilidades para o cálculo de áreas, utilizando as aproximações finitas, o Somatório, o Limite de somas, a Integral Definida como Limite de somas, o Teorema Fundamental do Cálculo e a geometria plana básica;

- Desenvolver habilidades quanto à utilização dos *softwares* GeoGebra e VCN, como ferramentas auxiliares para a resolução de problemas que envolvam Integral Definida.
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia do aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

5.6.1 Descrição e análise

Essa atividade foi desenvolvida com o objetivo de fornecer ao aluno a oportunidade de perceber que existem várias maneiras de se calcular uma medida de área, desde os métodos mais simples aos mais complexos.

A atividade em questão foi realizada em 2 h/aula, na sala laboratório de informática da instituição. As questões foram resolvidas individualmente, utilizando o GeoGebra, o VCN, lápis, papel, borracha e calculadora, para desenvolverem os cálculos.

Essa foi uma atividade de fundamental importância para a pesquisa, pois relacionava conceito, significado e procedimentos de cálculo e continha uma questão com 6 itens, do **a** ao **f**.

Todos os alunos demonstraram interesse e habilidade durante o desenvolvimento dos itens da atividade 6, agindo de forma mais autônoma do que acontecia nas atividades anteriores, o que pode-se inferir, a partir disso que, de acordo com Zabala (1998), as sequências de conteúdo exigem interação entre as três dimensões, quer sejam conceituais, atitudinais e procedimentais, com ênfase na conceitual, bem como um aumento da complexidade e aprofundamento ao longo das unidades. Dessa forma, as atividades precisam ser propostas de forma significativa e funcional, que representem um desafio alcançável, que provoquem um conflito cognitivo, promovam a atividade mental, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos, estimulem a autoestima e, por fim, que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender, sendo cada vez mais autônomo em suas aprendizagens. A questão 6 está apresentada abaixo, sendo demonstrado o item a:

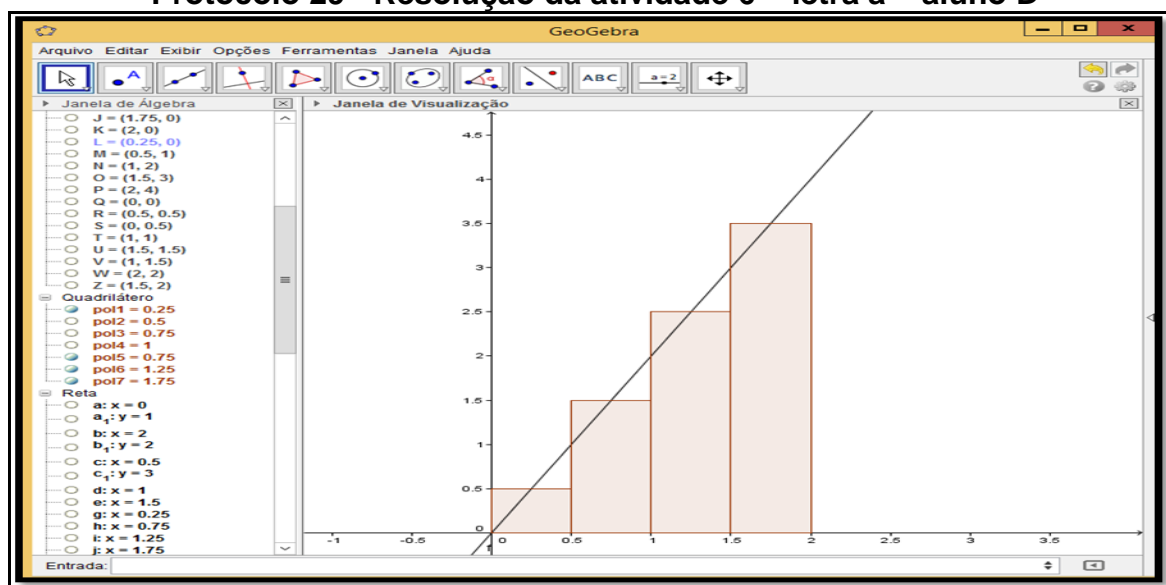
Questão 6:

Calcular a área limitada pela curva da função $f(x) = 2x$ e pelo eixo das abscissas, no intervalo $[0, 2]$, utilizando:

a) Aproximações finitas com 4 retângulos semi-inscritos (Utilizar o GeoGebra):

Os alunos utilizaram o GeoGebra para obter os quatro retângulos com suas respectivas medidas de área. A resolução do aluno D está apresentada no protocolo 29.

Protocolo 29 - Resolução da atividade 6 – letra a – aluno D



Fonte: Dados da pesquisa.

O cálculo da área, a partir do GeoGebra, mostrou-se de fácil execução pelos alunos, visto que já haviam treinado bastante esse tipo de exercício no *software*, o que permite inferir que, com a prática, os discentes conseguiram ampliar seus conhecimentos, pois, de acordo com Zabala (1998, p.75), os resultados acontecem não somente a partir do que é tido como nota de uma avaliação, mas sim “de um trabalho realizado ao longo de toda a unidade”. Dependendo desta realização é que se pode verificar se houve a promoção ou não de autoestima, aprimorando o autoconceito do aluno. Todos os alunos colocaram a resposta da questão, fornecendo, acertadamente, a área de cada um desses quatro retângulos semi-inscritos, quer sejam: $A = 0,25 + 0,75 + 1,25 + 1,75$, ou seja, a área sendo igual a 4 u.a. Eis a questão:

Questão 6:

Calcular a área limitada pela curva da função $f(x) = 2x$ e pelo eixo das abscissas, no intervalo $[0, 2]$, utilizando:

b) Limite de somas:

Para resolverem a questão, os alunos utilizaram lápis, papel, borracha para o cálculo da área pelo Limite de somas, recorrendo ao texto disponível no Caderno de Atividades para recordar os procedimentos de cálculo. Os protocolos 30 e 31 apresentam a resolução da questão 6, letra b, pelo aluno D.

Protocolo 30 - Resolução da atividade 6 – letra b – aluno D

6B

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad f(x) = 2x$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 + \Delta x$$

$$x_3 = 0 + 2\Delta x \dots$$

$$x_i = (i-1)\Delta x$$

$$x_i = (i-1) \frac{2}{n}$$

$$f(x_i) = 2 \cdot x_i$$

$$f(x_i) = 2 \cdot (i-1) \frac{2}{n}$$

$$f(x_i) = \frac{4}{n} (i-1)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4}{n} (i-1) \frac{2}{n}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \right]$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Protocolo 31 - Resolução da atividade 6 – letra b – Continuação – aluno D

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2} - m \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} \left[\frac{n^2+n}{2} - m \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} \left[\frac{n^2+n-2m}{2} \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \left[\frac{n^2-m}{2} \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} (n^2 - m)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2} - \frac{4m}{n^2}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \frac{4}{n}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - 0$$

$$A = 4$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar de não terem apresentado dificuldades, entende-se que calcular uma medida de área utilizando o Limite de somas não é tarefa fácil e, apesar de ter sido utilizada para fins desse exercício uma das mais simples funções $f(x) = 2x$, houve muito trabalho por parte dos alunos, o que permitiu perceber a dificuldade de se utilizar esse procedimento para toda e qualquer função.

Questão 6:

Calcular a área limitada pela curva da função $f(x) = 2x$ e pelo eixo das abscissas, no intervalo $[0, 2]$, utilizando:

- c) O Limite de somas definido como uma Integral Definida.

Para resolver esse item, os alunos utilizaram lápis, papel, borracha e aproveitaram-se da facilidade e agilidade do cálculo manual pela Integral Definida sem precisar recorrer ao Caderno de Atividades, como indicado no protocolo 32, do aluno D.

Protocolo 32 - Resolução da atividade 6 – letra c – aluno D

6. c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^2 2x dx \rightarrow \frac{2x^2}{2} \Big|_0^2 \rightarrow x^2 \Big|_0^2$$

$$(2)^2 - 0 = 4 \text{ u. a.}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Convém ressaltar aqui, a título de entendimento da resolução da questão, que quanto menor for a medida da base de cada retângulo, maior será o número de retângulos utilizados e, portanto, maior é a precisão do resultado. Dessa forma, quando se escreve $n \rightarrow \infty$, se está representando um número indefinidamente grande de retângulos, com medidas de base tendendo a zero, ou seja, $\Delta x \rightarrow 0$.

No item **d** é pedido, então, o cálculo da área a partir do Teorema Fundamental do Cálculo:

Questão 6:

Calcular a área limitada pela curva da função $f(x) = 2x$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando:

d) Teorema Fundamental do Cálculo.

Diante do que foi pedido, entende-se que se o Limite de somas é definido como uma Integral Definida, podemos agora calcular a mesma área de uma forma mais direta, como indica o protocolo 33:

Protocolo 33 - Resolução da atividade 6 – letra d – aluno D

$$\int_0^2 2x dx \rightarrow \frac{2x^2}{2} \rightarrow x^2 \Big|_0^2$$

$$(2^2) - 0 = 4 \text{ u. a.}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a execução do comando anterior, o item **e** determinava o mesmo cálculo porém, pela geometria plana básica:

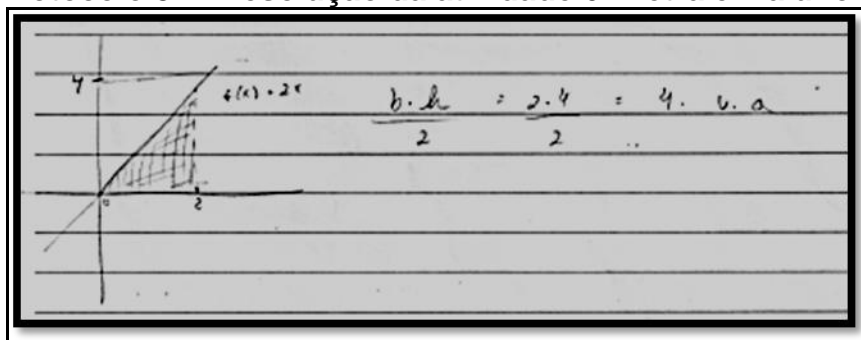
Questão 6:

Calcular a área limitada pela curva da função $f(x) = 2x$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando:

- e) Geometria plana básica.

Assim, conforme pedido, como a área é uma figura plana triangular, foi solicitado aos alunos que calculassem a medida da área utilizando a fórmula básica da geometria plana para o cálculo da área de um triângulo, por meio da seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}, \text{ o que gerou o protocolo 34, do aluno D:}$$

Protocolo 34 - Resolução da atividade 6 – letra e – aluno D

Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se notar que essa questão foi resolvida de forma simples e rápida por todos os alunos que obtiveram a medida da área igual a 4 u.a.

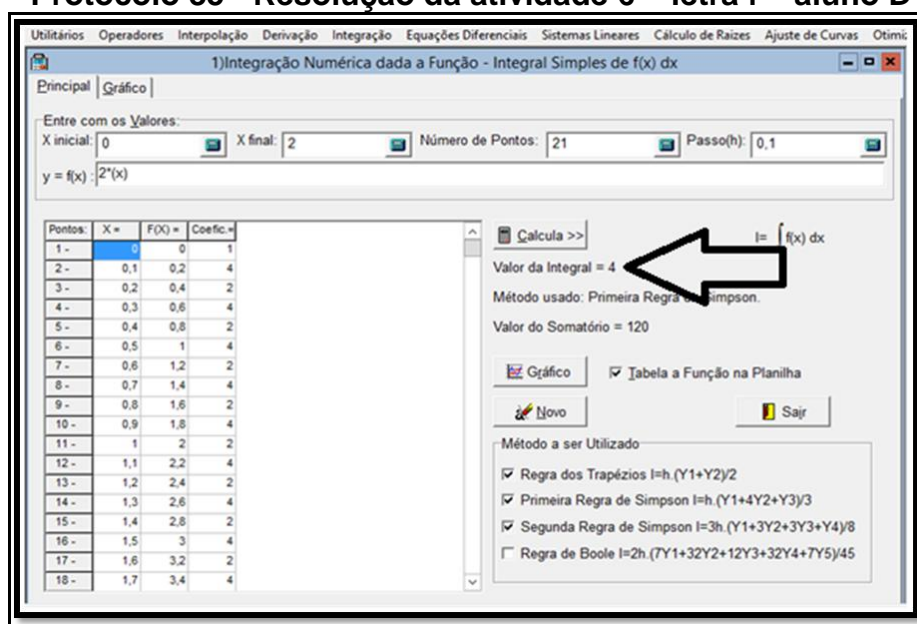
Questão 6:

Calcular a área limitada pela curva da função $f(x) = 2x$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando:

- f) O VCN para calcular a Integral da área.

A fim de desenvolver habilidades com o *software* VCN, foi solicitado aos alunos que calculassem a medida da área por meio do programa. Ressalta-se que todos os alunos cumpriram a tarefa proposta, de forma mais autônoma, informando os limites (X inicial e X final), a medida do passo (h), a função $f(x)$ e, então, o *software* calculou a medida desejada, como demonstrado no protocolo 35:

Protocolo 35 - Resolução da atividade 6 – letra f – aluno D



Fonte: Dados da pesquisa.

Observou-se, ao longo da atividade 6, a presença do conteúdo factual (histórico), pois cada uma das formas encontradas para calcular a mesma medida de área foi desenvolvida numa determinada época da história. Isso permite perceber, também, a forte ligação existente entre essas diversas formas de cálculo de áreas, que relacionam conceitos, significados e procedimentos de cálculo.

5.7 ATIVIDADE 7: O uso do VCN para o cálculo da Integral Definida e do GeoGebra para a visualização da curva

Esses foram os objetivos específicos para essa atividade:

- Desenvolver habilidades para o cálculo de Integrais Definidas no *software* VCN;
- Desenvolver habilidades gráficas e geométricas no *software* GeoGebra;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

5.7.1 Descrição e análise

Essa atividade foi realizada em 2 h/aula, na sala laboratório de informática da instituição e suas questões foram resolvidas individualmente, utilizando o GeoGebra, o VCN, lápis, papel, borracha e calculadora.

A atividade 7 era composta por 2 questões com um item cada, sendo a primeira escolhida para análise, pois envolvia os mesmos aspectos da segunda.

Assim como aconteceu nas demais execuções de atividades, os alunos demonstraram interesse e habilidade durante o desenvolvimento dessa atividade, agindo de forma autônoma, o que, nos dizeres de Zabala (1998), infere-se ter havido motivação para que os alunos pudessem trabalhar dessa maneira. Para Zabala:

A motivação é a alma da sequência. Ou os alunos estão interessados ou a sequência se interrompe em alguma das fases. [...] Todas as fases posteriores giram em torno do protagonismo dos alunos, de tal forma que além de ser um fator motivador em si mesmas, a tensão necessária para desenvolver a unidade passa pela manutenção constante do interesse. E aqui é onde o papel do professor adquire todo o seu sentido, como favorecedor e dinamizador de todo o processo, estabelecendo os desafios individuais e coletivos e oferecendo meios que mantenham a atenção dos alunos. (ZABALA, 1998, p.74-75).

A seguir, a descrição da questão proposta no seu item a:

Questão 1:

- a) Montar a Integral para calcular o comprimento da curva $y = x^2$, $[-1, 2]$; calcular o comprimento da curva com o auxílio do VCN e traçar a curva com o auxílio do GeoGebra.

A partir da pesquisa realizada e do conteúdo apresentado no Caderno de Atividades, os alunos puderam perceber que o comprimento da curva pode ser calculado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Logo, tem-se que:

$$L = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

$$L = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Apesar de saber que através do cálculo manual essa Integral pode ser resolvida por substituição trigonométrica, seguida de uma integração por partes, entendeu-se que esse não seria o momento para desenvolver habilidades com essas técnicas de integração e sim com o VCN. Portanto, a questão foi calculada por meio do *software* VCN, em integração numérica dada a função. Dessa maneira,

após serem informados os limites (X inicial e X final), a medida do passo (h), a função $f(x)$, o *software* calculou a medida desejada de forma precisa e rápida, como pode ser observado no protocolo 36, desenvolvido pelo aluno J.

Protocolo 36 - Resolução da atividade 7 – VCN – aluno J

Entre com os Valores:
 X inicial: -1 X final: 2 Número de Pontos: 31 Passo(h): 0,1
 y = f(x): $(1+4*x^2)^{1/2}$

| Pontos | X = | F(X) = | Coefic = |
|--------|------|--------|----------|
| 1 - | -1 | 2,5 | 1 |
| 2 - | -0,9 | 2,12 | 3 |
| 3 - | -0,8 | 1,78 | 3 |
| 4 - | -0,7 | 1,48 | 2 |
| 5 - | -0,6 | 1,22 | 3 |
| 6 - | -0,5 | 1 | 3 |
| 7 - | -0,4 | 0,82 | 2 |
| 8 - | -0,3 | 0,68 | 3 |
| 9 - | -0,2 | 0,58 | 3 |
| 10 - | -0,1 | 0,52 | 2 |
| 11 - | 0 | 0,5 | 3 |
| 12 - | 0,1 | 0,52 | 3 |
| 13 - | 0,2 | 0,58 | 2 |
| 14 - | 0,3 | 0,68 | 3 |
| 15 - | 0,4 | 0,82 | 3 |
| 16 - | 0,5 | 1 | 2 |
| 17 - | 0,6 | 1,22 | 3 |
| 18 - | 0,7 | 1,48 | 3 |
| 19 - | 0,8 | 1,78 | 2 |
| 20 - | 0,9 | 2,12 | 3 |
| 21 - | 1 | 2,5 | 3 |
| 22 - | 1,1 | 2,92 | 2 |
| 23 - | 1,2 | 3,38 | 3 |
| 24 - | 1,3 | 3,88 | 3 |
| 25 - | 1,4 | 4,42 | 2 |
| 26 - | 1,5 | 5 | 3 |

Calcula >>
 Valor da Integral = 7,5 $I = \int f(x) dx$
 Método usado: Segunda Regra de Simpson.
 Valor do Somatório = 200

Gráfico Tabela a Função na Planilha

Novo Sair

Método a ser Utilizado

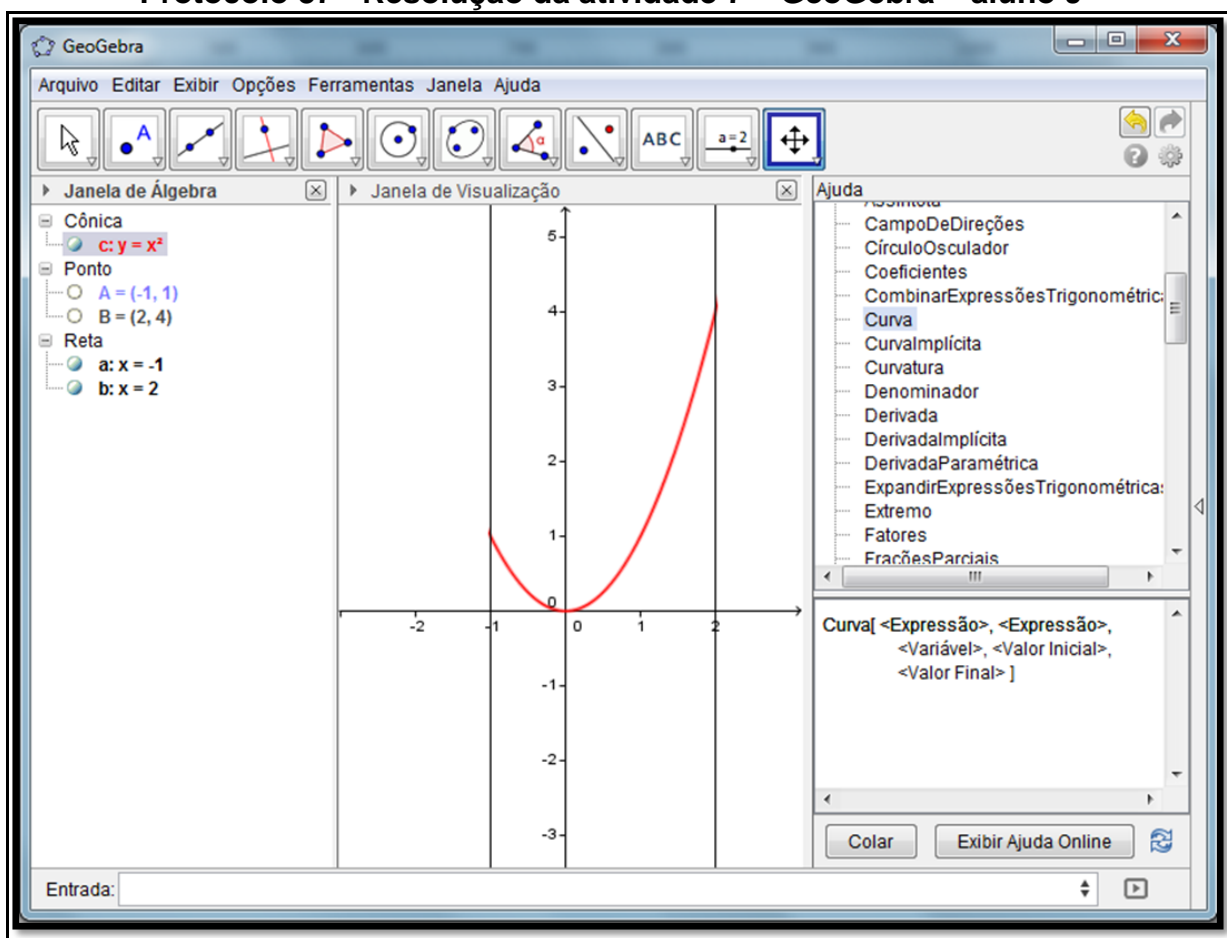
- Regra dos Trapézios $I=h.(Y1+Y2)/2$
- Primeira Regra de Simpson $I=h.(Y1+4Y2+Y3)/3$
- Segunda Regra de Simpson $I=3h.(Y1+3Y2+3Y3+Y4)/8$
- Regra de Boole $I=2h.(7Y1+32Y2+12Y3+32Y4+7Y5)/45$

Fonte: Dados da pesquisa.

Vale a pena destacar, nesse íterim, que o pesquisador, no momento da aplicação dessa atividade, considerou muito importante que o aluno conhecesse um *software* capaz de calcular Integrais Definidas de forma prática e rápida. Porém, enfatiza-se que, caso o objetivo do professor seja verificar se o aluno é capaz de resolver manualmente uma determinada Integral Definida, as técnicas são necessárias. Já caso o objetivo do professor seja propor ao aluno a resolução de um determinado problema a partir da construção de um modelo matemático capaz de resolvê-lo, envolvendo a Integral Definida, ele pode utilizar o *software* como uma ferramenta de trabalho.

A visualização da curva a partir do GeoGebra pode ser observada no protocolo 37, também desenvolvida pelo aluno J.

Protocolo 37 - Resolução da atividade 7 – GeoGebra – aluno J



Fonte: Dados da pesquisa.

Pôde-se perceber, no decorrer do desenvolvimento da atividade que os alunos apresentaram interesse e demonstraram habilidades nos aspectos geométricos, gráficos, numéricos, algébricos, verbais escritos, procedimentais e conceituais durante o desenvolvimento da atividade, mesmo entendendo que essa questão envolvia muitos conceitos e procedimentos, exigindo, assim, maior atenção e habilidades com relação ao uso dos *softwares* VCN e GeoGebra.

5.8 ATIVIDADE 8: Experimentando objetos quaisquer com lápis, borracha, régua, calculadora, GeoGebra e o VCN.

A atividade 8 tinha, como objetivos específicos:

- Determinar a função a partir de pontos, utilizando o VCN;
- Calcular medidas de áreas, volumes e comprimentos de curvas quaisquer, utilizando a Integral Definida e o VCN;

- Desenvolver habilidades para o cálculo de Integrais Definidas utilizando o *software* VCN;
- Desenvolver habilidades gráficas e geométricas no *software* GeoGebra;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

5.8.1 Descrição e análise

A atividade foi realizada em 8 h/aula, na sala laboratório de informática da instituição e fornecia ao aluno, a oportunidade de utilizar diversos conceitos, definições, ferramentas e procedimentos de cálculo, apresentadas e trabalhadas ao longo de todo Caderno de Atividades, colocando-os à vontade para calcular medidas de áreas, volumes e comprimentos de curvas, de várias formas diferentes, podendo inclusive, comparar os resultados obtidos por caminhos diferentes, na resolução de um mesmo problema.

A atividade 8 era composta por 6 questões, que serão analisadas. Elas, diferentemente do que ocorreu com as demais atividades, foram resolvidas em grupo, utilizando o GeoGebra, o VCN, lápis, papel, borracha e calculadora, para desenvolverem as questões, sendo percebido envolvimento com entusiasmo dos alunos.

O professor pesquisador acompanhou de perto a resolução dessa atividade, orientando sempre que necessário.

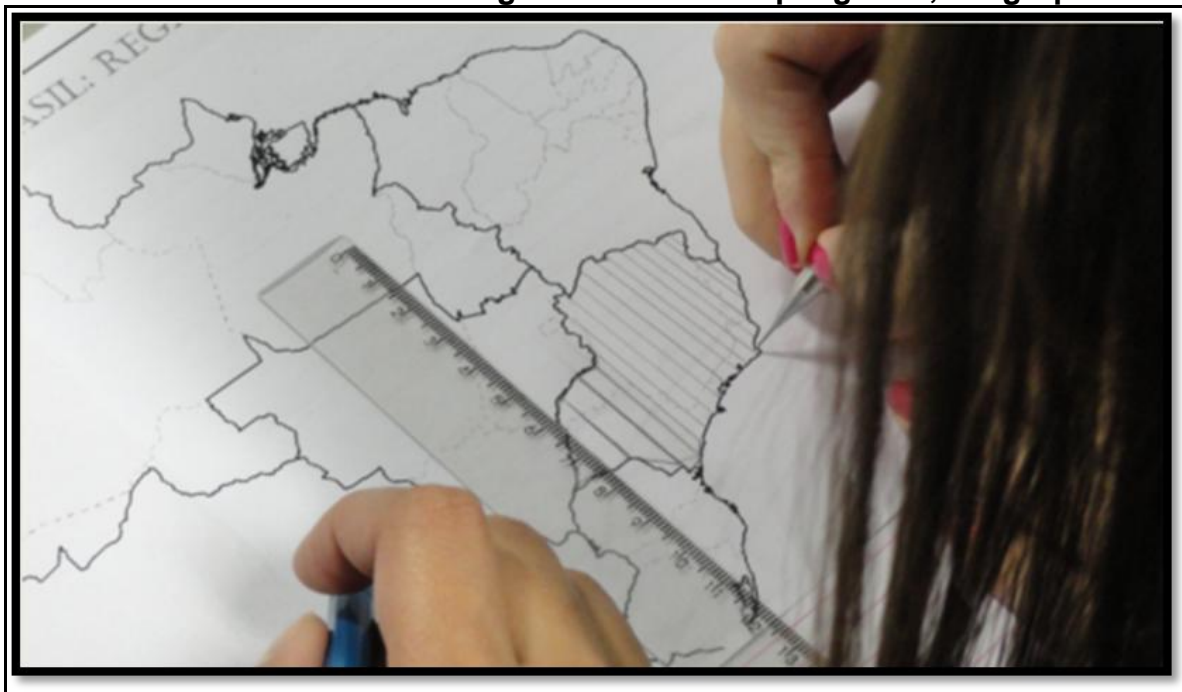
A primeira questão versava sobre o cálculo da área de uma região brasileira, a partir de um mapa disponibilizado pelo professor, utilizando aproximações finitas, contendo um único item. Os alunos utilizaram, para esse item, lápis, papel, borracha, régua e calculadora. Eis o item apresentado:

Questão 1:

O grupo irá buscar, no mapa do Brasil, uma determinada região e calcular a medida dessa área utilizando as aproximações finitas, manualmente, com retângulos, trapézios ou triângulos. Comparar o resultado obtido com a área real dessa região, utilizando a escala desse mapa, onde 1 cm equivale à 250 km no espaço real.

O grupo escolheu a região **Sudeste**, e esta foi preenchida por 19 figuras planas, sendo 17 trapézios e 2 triângulos, como mostra a foto 2:

Foto 2 - Preenchendo a região sudeste com polígonos, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Os protocolos 38 e 39 apresentam os cálculos das medidas das áreas de cada uma das 19 figuras planas obtidas pelo grupo.

Protocolo 38 - Resolução da atividade 8 – Questão 1 – Em grupo

Atividade 08.

DATA 29/10/14

• $A = \frac{b \cdot h}{2}$

• $A = \frac{b \cdot h}{2}$

• $A = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ (A)

Área 1: $b = 0,8 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ cm}$, $A = \frac{0,8 \cdot 1}{2} = 0,4 \text{ cm}^2$

Área 2: $A = \frac{(2+1,6) \cdot 0,5}{2} = 0,9 \text{ cm}^2$

Área 3: $A = \frac{(3+2) \cdot 0,6}{2} = 1,5 \text{ cm}^2$

Área 4: $A = \frac{(3,3+3) \cdot 0,5}{2} = 1,57 \text{ cm}^2$

Área 5: $A = \frac{(3+3) \cdot 0,3}{2} = 0,9 \text{ cm}^2$

Área 6: $A = \frac{(3,9+3) \cdot 0,4}{2} = 1,38 \text{ cm}^2$

Área 7: $A = \frac{(4,1+4) \cdot 0,4}{2} = 1,62 \text{ cm}^2$

Área 8: $A = \frac{(4,1+3,9) \cdot 0,4}{2} = 1,6 \text{ cm}^2$

Área 9: $A = \frac{(4,1+4) \cdot 0,3}{2} = 1,23 \text{ cm}^2$

Área 10: $A = \frac{(4,1+4) \cdot 0,4}{2} = 1,62 \text{ cm}^2$

Área 11: $A = \frac{(4,2+3,9) \cdot 0,2}{2} = 0,81 \text{ cm}^2$

Fonte: Dados da pesquisa.

Protocolo 39 - Resolução da atividade 8 – Questão 1 – Continuação – Em grupo

$$\begin{array}{l}
 A' \times Q 12: \quad A: \frac{(3,8 + 3,2) \cdot 0,3}{2} = 1,12 \text{ cm}^2 \\
 A' \times Q 13: \quad A: \frac{(3,6 + 3,2) \cdot 0,3}{2} = 1,02 \text{ cm}^2 \\
 A' \times Q 14: \quad A: \frac{(3,4 + 2,2) \cdot 0,2}{2} = 0,56 \text{ cm}^2 \\
 A' \times Q 15: \quad A: \frac{(2,6 + 2,2) \cdot 0,4}{2} = 0,96 \text{ cm}^2 \\
 A' \times Q 16: \quad A: \frac{(1,3 + 0,8) \cdot 0,2}{2} = 0,21 \text{ cm}^2 \\
 A' \times Q 17: \quad A: \frac{(0,7 + 0,5) \cdot 0,1}{2} = 0,06 \text{ cm}^2 \\
 A' \times Q 18: \quad A: \frac{b \cdot h}{2} = \frac{0,4 \cdot 0,2}{2} = 0,04 \text{ cm}^2 \\
 A' \times Q 19: \quad A: \frac{(0,5 + 0,3) \cdot 0,1}{2} = 0,04 \text{ cm}^2 \\
 A' \times Q \text{ Total: } 13,51 + 4,01 = 17,52 \text{ cm}^2 \\
 \\
 1 \text{ cm} \rightarrow 250 \text{ km} \\
 1 \text{ cm}^2 \rightarrow 62.500 \text{ km}^2 \\
 17,52 \text{ cm}^2 \rightarrow x \\
 \boxed{1.095.000 \text{ km}^2} \rightarrow x
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao final do exercício, o site do IBGE (2014)⁵ foi acessado, a fim de que fosse obtida, pelos alunos, a medida da área da região Sudeste para que fosse comparada com o resultado obtido pelo grupo, o que não foi possível, já que havia a disponibilidade apenas das medidas por estados. Foi, então, necessário que fossem buscadas as medidas individuais de cada um dos estados da região Sudeste, ao que foram encontradas:

Minas Gerais : 586.519,727 Km²

São Paulo: 248.222,362 Km²

Rio de Janeiro: 43.777,954 Km²

Espírito Santo: 46.096,925 Km², perfazendo o total de 924.616,97 Km², equivalente à área total da região Sudeste.

⁵ IBGE. **Estado@**. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/estadosat/>. Acesso em: 29 out. 2014.

Porém, calculando a medida da área por aproximações finitas, o grupo obteve $1.095.000 \text{ Km}^2$, sendo a diferença entre a área obtida pelo grupo e a informada pelo site de: $1.095.000,00 - 924.616,97 = 170.383,03 \text{ Km}^2$.

Vale a pena ressaltar que, como já dito anteriormente, quanto menor forem as medidas das bases das figuras utilizadas no preenchimento da região, por aproximações finitas, menor será essa diferença e mais próximo da medida real se chegará. Dessa forma, talvez essa seja a explicação do porquê uma diferença significativa como a apresentada, entre outras, podem ser citadas a diferença entre a impressão do mapa para os alunos e a escala apresentada, que pode ter sido aproximada, mas não tão real como se pensava.

A segunda questão versava sobre o cálculo da área escolhida na questão anterior, determinando pontos sobre os limites de fronteira dessa região, obtendo uma função a partir desses pontos e, por fim, o cálculo da área a partir dessa função, utilizando a Integral Definida e o VCN. Essa questão continha 3 itens, do **a** ao **c**. Para tanto, além do *software* VCN, os alunos utilizaram lápis, papel, borracha e régua. Eis o item **a** da questão 2:

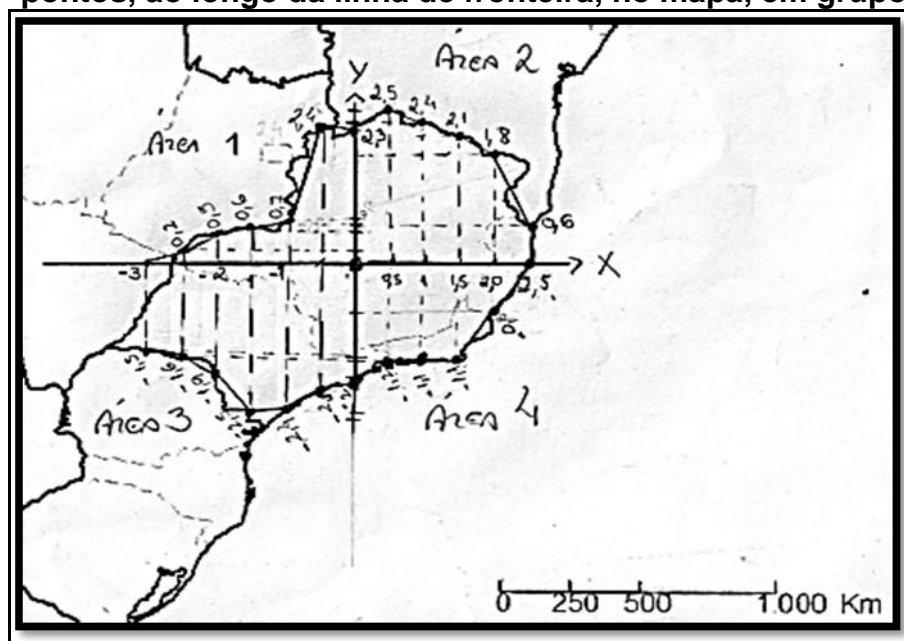
Questão 2:

Utilizando a mesma região, faça o que se pede:

- a)** Dividir a região escolhida em duas ou mais regiões, determinando vários pontos ao longo da linha de fronteira, usando a régua:

Para executar esse item, os alunos desenharam um plano cartesiano com sua origem num ponto qualquer região Sudeste e, a partir dele, obtiveram diversos pontos ao longo da linha de fronteira, como mostra o protocolo 40:

Protocolo 40 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra a – Obtenção dos pontos, ao longo da linha de fronteira, no mapa, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Já o item b, pedia para que fossem lançados aqueles mesmos pontos, no VCN, a fim de determinar a função que mais se aproximava do contorno da região.

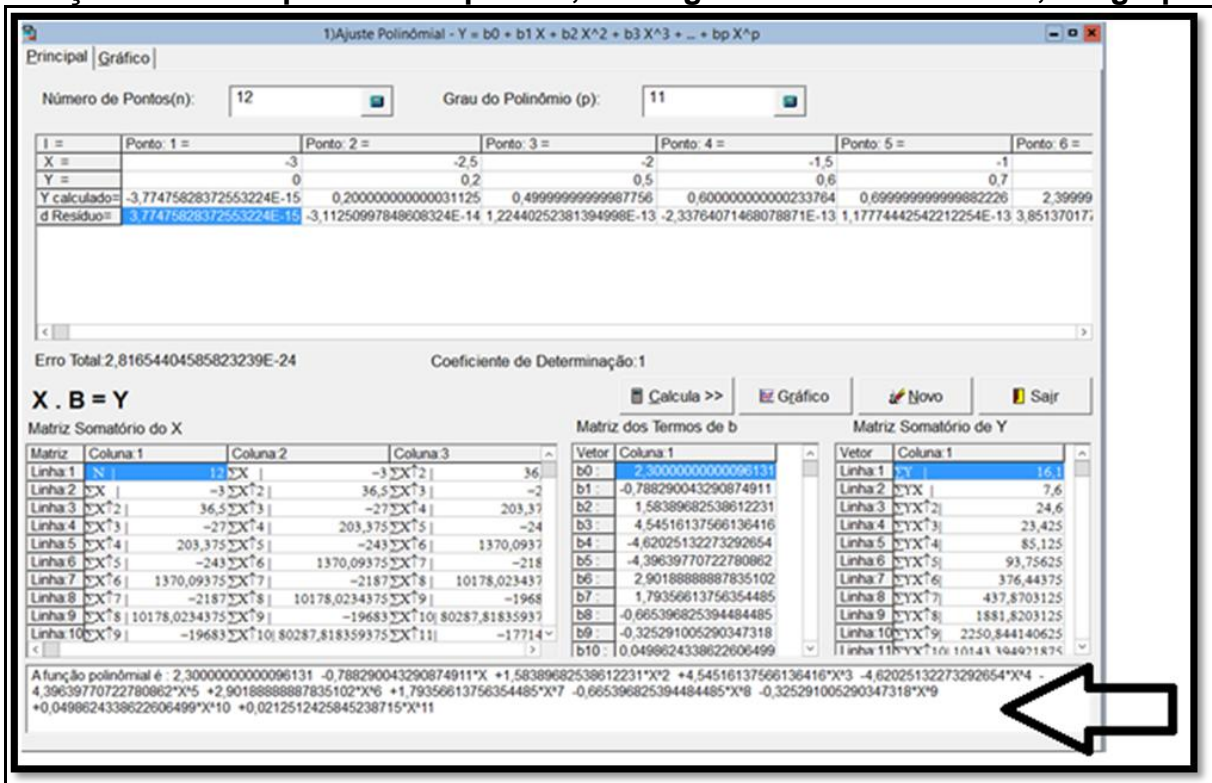
Questão 2:

Utilizando a mesma região, faça o que se pede:

- b)** Lançar esses pontos no VCN para determinar uma função que se aproxima do formato da região, determinar os Limites de integração e calcular a área utilizando a Integral Definida e o VCN:

Inicialmente, os alunos tentaram dividir a região Sudeste em duas regiões apenas, como se fosse norte e sul, mas com os 12 pontos obtidos na região acima do eixo das abscissas, ao serem lançados no VCN, procurando gerar uma função cuja curva representasse o limite superior da região Sudeste, porém, esse feito não deu certo, como mostrado no protocolo 41.

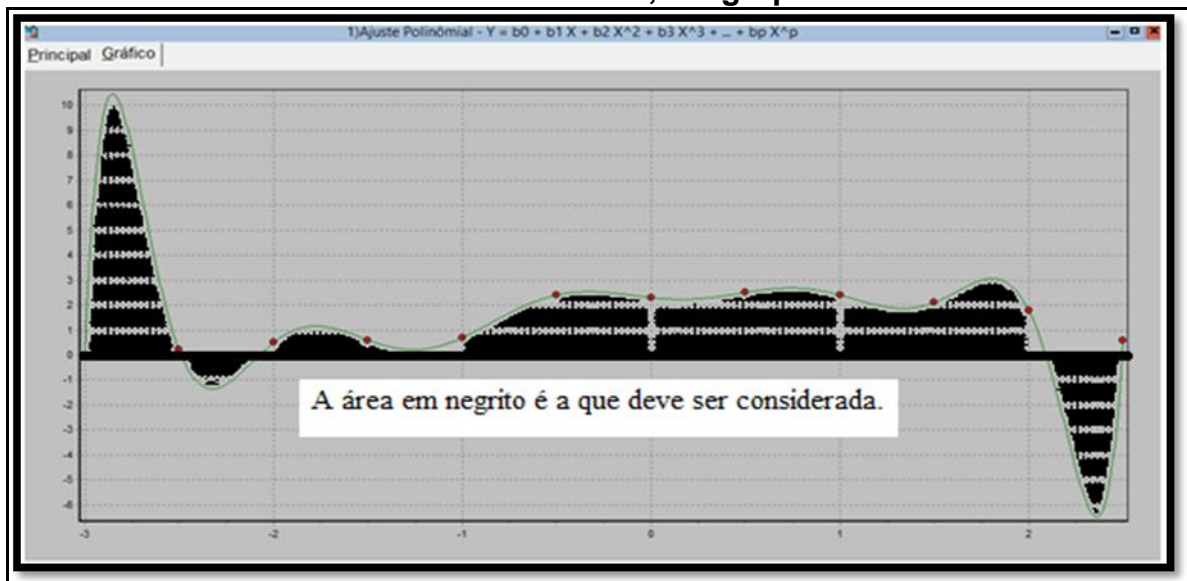
Protocolo 41 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN a partir de 12 pontos, ao longo da linha de fronteira, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Obtida a função, foi, então, solicitado ao VCN que gerasse a curva, que ficou incoerente em relação ao formato real no mapa, como pode ser vista no protocolo 42.

Protocolo 42 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área acima do eixo das abscissas, no VCN, a partir de 12 pontos, ao longo da linha de fronteira, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

É certo que, diante de tudo o que foi discutido anteriormente, quando se obtém mais pontos sobre a curva, o resultado seria mais próximo do real. Mas, ao invés disso, optou-se por utilizar, com limites diferentes, os mesmos pontos, dividindo o Sudeste em 4 regiões, como se fossem 4 quadrantes, tratando uma região de cada vez, o que tornou possível um resultado melhor que o anterior.

Com os 7 pontos obtidos ao longo da linha de fronteira na área I:

Dessa forma, foram lançados os pontos no VCN, a fim de gerar uma função cuja curva representasse o limite superior da área I, ficando assim definida (PROTOCOLO 43).

Protocolo 43 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN, a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área I, em grupo

5)Ajuste Polinomial - $Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \dots + b_p X^p$

Principal | Gráfico

Número de Pontos(n): 7 Grau do Polinômio (p): 6

| i = | Ponto: 1 = | Ponto: 2 = | Ponto: 3 = | Ponto: 4 = | Ponto: 5 = | Ponto: 6 = |
|---------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-----------------|
| X = | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,7 |
| Y = | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 2,399999 |
| Y calculado = | 1,0269562977782698E-14 | 0,199999999999940087 | 0,5000000000000138389 | 0,599999999999842606 | 0,7000000000000086104 | 2,399999 |
| d Resíduo = | -1,0269562977782698E-14 | 5,991318823444020039E-14 | -1,38389300019525763E-13 | 1,57393737799937927E-13 | -8,61037044615209357E-14 | 1,596119070E-13 |

Erro Total 5,52887261742209938E-26 Coeficiente de Determinação: 1

X . B = Y

Matriz Somatório do X

| Matriz | Coluna 1 | Coluna 2 | Coluna 3 | Coluna 4 |
|---------|----------------|-------------|---------------|---------------|
| Linha 1 | N | 7 | -10,5 | 22,75 |
| Linha 2 | X | -10,5 | 22,75 | -55,125 |
| Linha 3 | X ² | 22,75 | -55,125 | 142,1875 |
| Linha 4 | X ³ | -55,125 | 142,1875 | -381,28125 |
| Linha 5 | X ⁴ | 142,1875 | -381,28125 | 1049,546875 |
| Linha 6 | X ⁵ | -381,28125 | 1049,546875 | -2943,4453125 |
| Linha 7 | X ⁶ | 1049,546875 | -2943,4453125 | 8369,51171875 |

Matriz dos Termos de b

| Vetor | Coluna 1 |
|-------|-----------------------|
| b0 | 2,29999999999999918 |
| b1 | -11,75999999999952373 |
| b2 | -41,34555555555358572 |
| b3 | -47,71666666666382847 |
| b4 | -25,6555555555371186 |
| b5 | -6,57333333332780924 |
| b6 | -0,6488888888826846 |

Matriz Somatório de Y

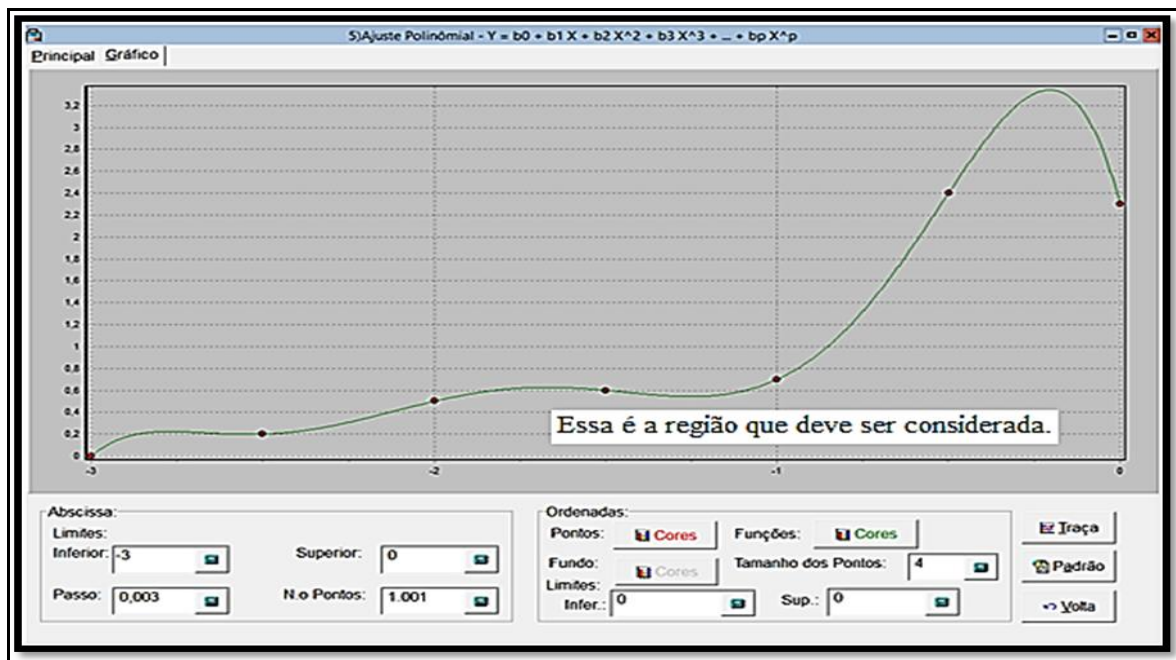
| Vetor | Coluna 1 |
|---------|----------|
| Linha 1 | Y |
| Linha 2 | 6,7 |
| Linha 3 | -4,3 |
| Linha 4 | 5,9 |
| Linha 5 | -10,15 |
| Linha 6 | 19,7 |
| Linha 7 | -40,8625 |
| Linha 8 | 88,4 |

A função polinomial é: $2,29999999999999918 - 11,75999999999952373 \cdot X - 41,34555555555358572 \cdot X^2 - 47,71666666666382847 \cdot X^3 - 25,6555555555371186 \cdot X^4 - 6,57333333332780924 \cdot X^5 - 0,6488888888826846 \cdot X^6$

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, obtida a função, foi solicitado ao VCN que gerasse a curva, podendo verificar, pelo protocolo 44 como a curva se ajustou melhor em relação ao formato real no mapa.

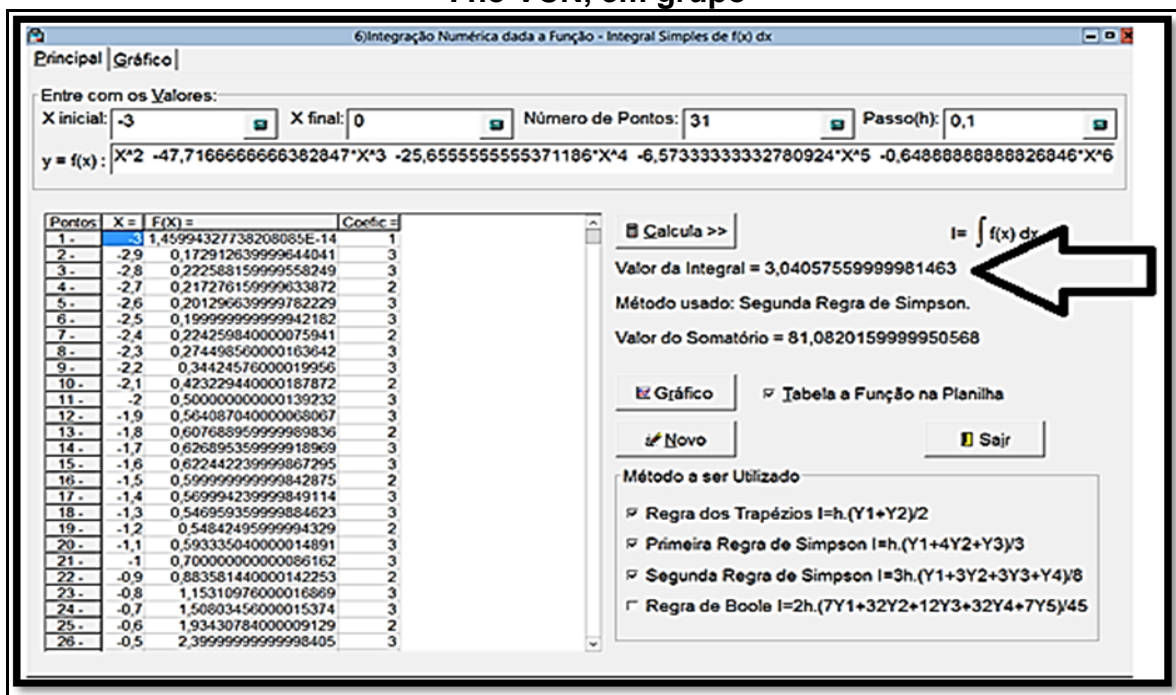
**Protocolo 44 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b –
Visualização da área no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de
fronteira, na área I, em grupo**



Fonte: Dados da pesquisa.

Após esse procedimento, foi, então, calculada a medida da área I com o auxílio do VCN, obtendo $3,04 \text{ cm}^2$, como pode ser observado no protocolo 45.

**Protocolo 45 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Cálculo da área
I no VCN, em grupo**



Fonte: Dados da pesquisa.

Com os 7 pontos obtidos ao longo da linha de fronteira **na área II:**

A partir daí, foram lançados os pontos no VCN, a fim de gerar uma função cuja curva representasse o limite superior da área II, como visto no protocolo 46, a seguir:

Protocolo 46 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área II, em grupo

9)Ajuste Polinomial - $Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \dots + b_p X^p$

Principal | Gráfico

Número de Pontos(n): 6 Grau do Polinômio (p): 5

| I = | Ponto: 1 = | Ponto: 2 = | Ponto: 3 = | Ponto: 4 = | Ponto: 5 = | Ponto: 6 = |
|--------------|------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------|
| X = | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | |
| Y = | 2,3 | 2,5 | 2,4 | 2,1 | 1,8 | |
| Y calculado= | 2,29999999999999956 | 2,500000000000000193 | 2,39999999999999977 | 2,100000000000000269 | 1,79999999999999987 | 0,600000000 |
| d Residuo= | 4,3519875203568148E-16 | -1,92987986702419789E-15 | 3,23244035704828292E-15 | -2,6890382281985481E-15 | 1,12908814242640432E-15 | -1,9287956648E-15 |

Erro Total 2,2905474700417838E-29 Coeficiente de Determinação: 1

X . B = Y

Matriz Somatório de X

| Matriz | Coluna 1 | Coluna 2 | Coluna 3 | Coluna 4 |
|---------|----------------|-----------|------------|-------------|
| Linha 1 | N | 6 | 7,5 | 13,75 |
| Linha 2 | X | 7,5 | 13,75 | 28,125 |
| Linha 3 | X ² | 13,75 | 28,125 | 61,1875 |
| Linha 4 | X ³ | 28,125 | 61,1875 | 138,28125 |
| Linha 5 | X ⁴ | 61,1875 | 138,28125 | 320,546875 |
| Linha 6 | X ⁵ | 138,28125 | 320,546875 | 756,4453125 |

Matriz dos Termos de b

| Vetor | Coluna 1 |
|-------|------------------------|
| b0 | 2,29999999999999956 |
| b1 | 0,23666666666666741104 |
| b2 | 1,383333333333308353 |
| b3 | -2,86666666666638767 |
| b4 | 1,6666666666665402 |
| b5 | -0,31999999999979964 |

Matriz Somatório de Y

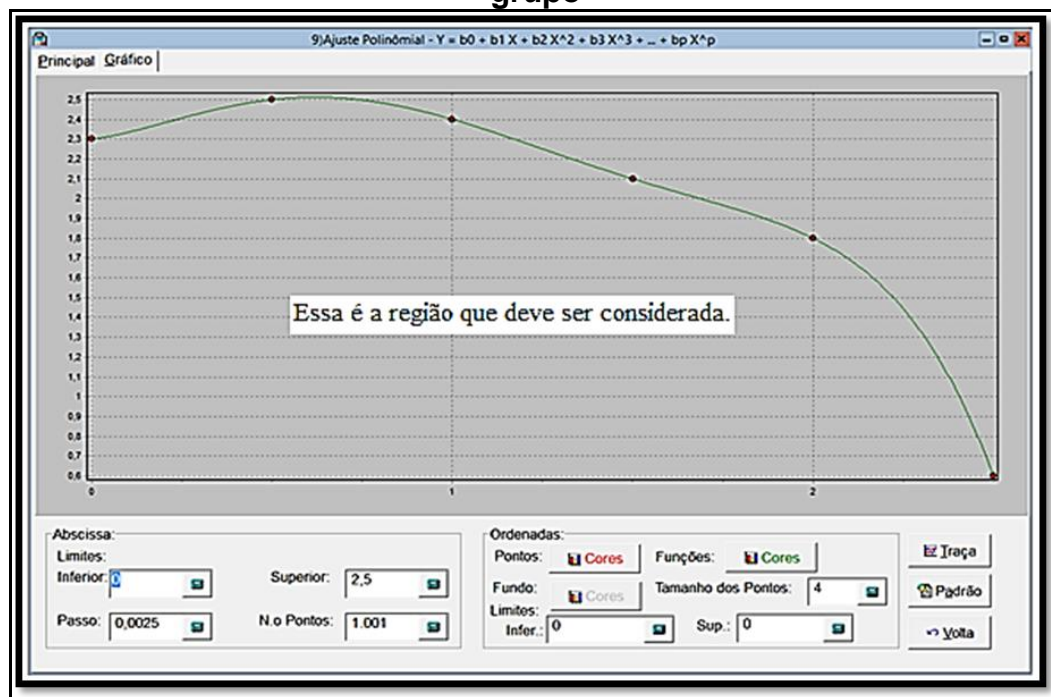
| Vetor | Coluna 1 |
|---------|-----------|
| Linha 1 | Y |
| Linha 2 | 11,7 |
| Linha 3 | 11,9 |
| Linha 4 | 18,7 |
| Linha 5 | 33,575 |
| Linha 6 | 65,425 |
| Linha 7 | 134,61875 |

A função polinomial é : $2,29999999999999956 + 0,23666666666666741104 \cdot X + 1,383333333333308353 \cdot X^2 - 2,86666666666638767 \cdot X^3 + 1,6666666666665402 \cdot X^4 - 0,31999999999979964 \cdot X^5$

Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, obtida a função, foi solicitado ao VCN que gerasse também essa curva, que, assim como a anterior, se ajustou melhor em relação ao formato real no mapa, como indicado pelo protocolo 47.

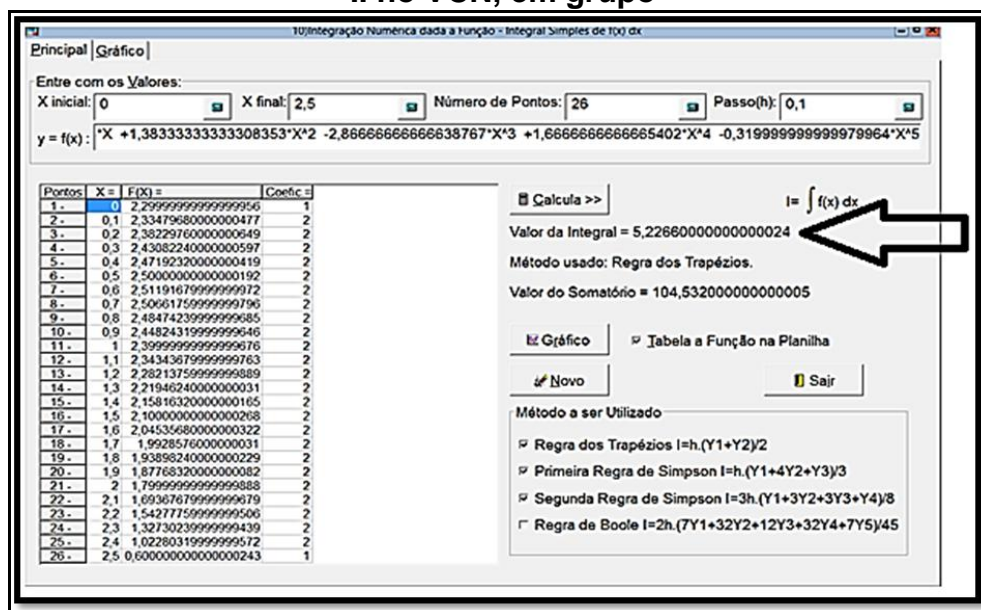
Protocolo 47 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área II, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Após, foi, então, calculada a medida da área II com o auxílio do VCN, obtendo $5,22 \text{ cm}^2$, como pode ser observado no protocolo 48.

Protocolo 48 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra c – Cálculo da área II no VCN, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Os 7 pontos obtidos ao longo da linha de fronteira na área III foram lançados, no VCN, a fim de gerar uma função cuja curva representasse o limite superior da área III, conforme pode ser observado no protocolo 49:

Protocolo 49 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área III, em grupo

11)Ajuste Polinomial - $Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \dots + b_p X^p$

Principal | Gráfico

Número de Pontos(n): 7 Grau do Polinômio (p): 6

| I = | Ponto: 1 = | Ponto: 2 = | Ponto: 3 = | Ponto: 4 = | Ponto: 5 = | Ponto: 6 = |
|--------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|------------------------|------------------|
| X = | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | |
| Y = | -1,5 | -1,6 | -1,9 | -2,5 | -2,4 | |
| Y calculado= | -1,5000000000000000533 | -1,5999999999999999796 | -1,90000000000000007803 | -2,49999999999999990225 | -2,4000000000000000584 | -2,0999999 |
| d Residuo= | 6,32907051820075139E-15 | -3,20382826171639046E-14 | 7,80310061357369911E-14 | -9,77494994669481088E-14 | 6,5838610605051251E-14 | -2,256615033E-14 |

Erro Total 2,15538830010315613E-26 Coeficiente de Determinação: 1

X . B = Y

Matriz Somatório de X

| Matriz | Coluna 1 | Coluna 2 | Coluna 3 | Coluna 4 |
|----------------------|---------------|------------|----------------|---------------|
| Linha 1 N | 7 | | | |
| Linha 2 $\sum X$ | -10,5 | $\sum X^2$ | 22,75 | $\sum X^3$ |
| Linha 3 $\sum X^2$ | 22,75 | $\sum X^4$ | -55,125 | $\sum X^5$ |
| Linha 4 $\sum X^3$ | -55,125 | $\sum X^4$ | 142,1875 | $\sum X^5$ |
| Linha 5 $\sum X^4$ | 142,1875 | $\sum X^5$ | -381,28125 | $\sum X^6$ |
| Linha 6 $\sum X^5$ | -381,28125 | $\sum X^6$ | 1049,546875 | $\sum X^7$ |
| Linha 7 $\sum X^6$ | 1049,546875 | $\sum X^7$ | -2943,4453125 | $\sum X^8$ |
| Linha 8 $\sum X^7$ | -2943,4453125 | $\sum X^8$ | 8369,51171875 | $\sum X^9$ |
| Linha 9 $\sum X^8$ | 8369,51171875 | $\sum X^9$ | -21943,4453125 | $\sum X^{10}$ |

Matriz dos Termos de b

| Vetor | Coluna 1 |
|-------|------------------------|
| b0: | -2,0000000000000000336 |
| b1: | 1,823333333333009129 |
| b2: | 8,043333333332021967 |
| b3: | 13,89999999999813996 |
| b4: | 10,13333333333213916 |
| b5: | 3,22666666666312066 |
| b6: | 0,37333333333293784 |

Matriz Somatório de Y

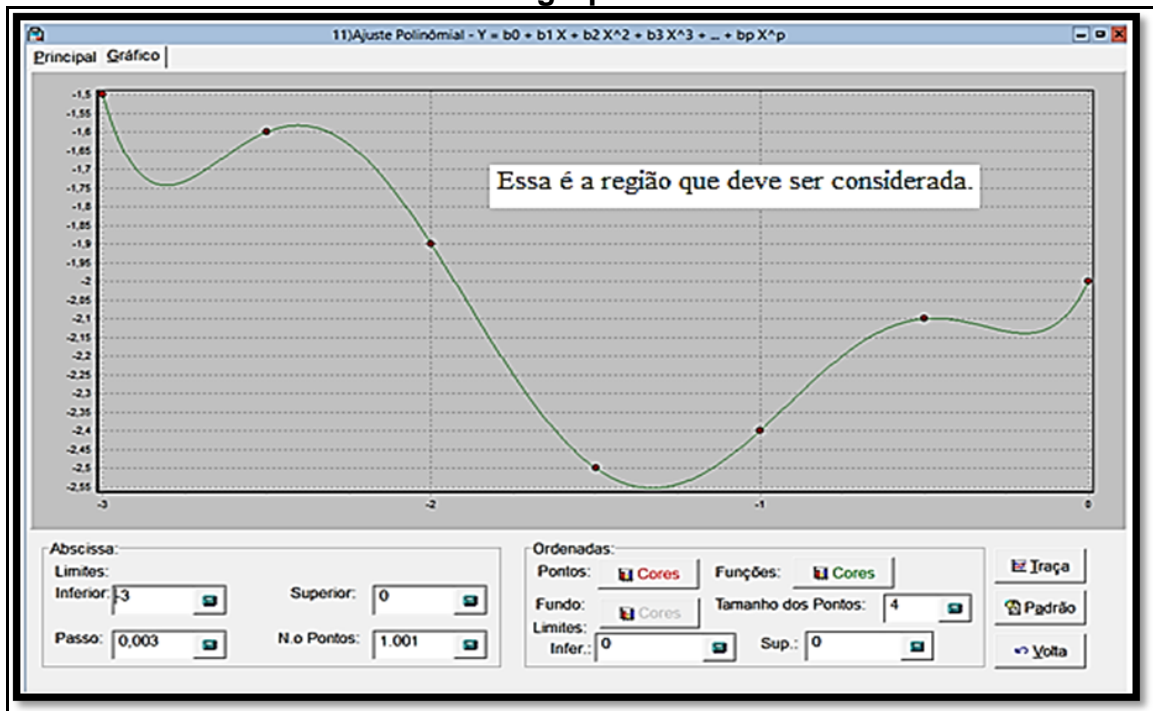
| Vetor | Coluna 1 |
|-----------------------|--------------|
| Linha 1 $\sum Y$ | -14 |
| Linha 2 $\sum YX$ | 19,5 |
| Linha 3 $\sum YX^2$ | -39,65 |
| Linha 4 $\sum YX^3$ | 91,8 |
| Linha 5 $\sum YX^4$ | -229,5875 |
| Linha 6 $\sum YX^5$ | 603 |
| Linha 7 $\sum YX^6$ | -1636,634375 |

A função polinomial é: $-2,0000000000000000336 + 1,823333333333009129X + 8,043333333332021967X^2 + 13,89999999999813996X^3 + 10,13333333333213916X^4 + 3,22666666666312066X^5 + 0,37333333333293784X^6$

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, obtida a função, foi pedido ao *software* VCN que gerasse a curva, que também se ajustou melhor em relação ao formato real no mapa. Ressalta-se que a região considerada é aquela entre a curva e o eixo das abscissas.

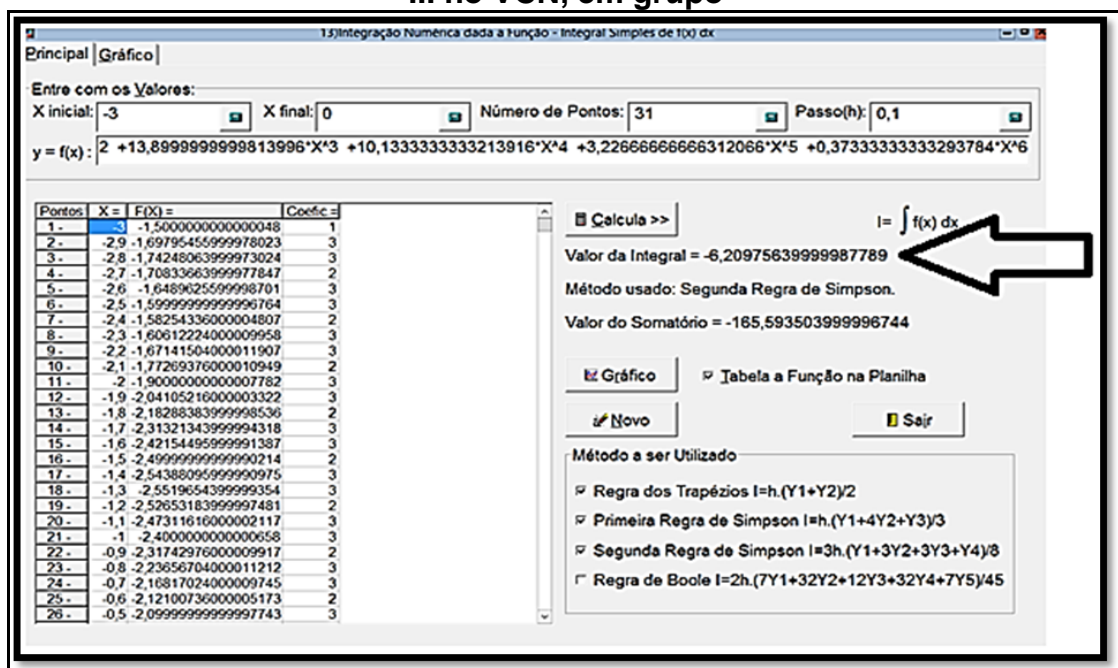
Protocolo 50 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área no VCN a partir de 7 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área III, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, foi, então, calculada a medida da área III com o auxílio do VCN, obtendo $6,2 \text{ cm}^2$, como pode ser observado no protocolo 51.

Protocolo 51 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Cálculo da área III no VCN, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Com os 6 pontos obtidos ao longo da linha de fronteira da área IV:

Os próximos seis pontos, esses obtidos na área IV, foram lançados no VCN, a fim de gerar uma função cuja curva representasse o limite superior da área III, como observado no protocolo 52.

Protocolo 52 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Obtenção da função no VCN a partir de 6 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área IV, em grupo

Principal | Gráfico

Número de Pontos(n): Grau do Polinômio (p):

| i = | Ponto 1 = | Ponto 2 = | Ponto 3 = | Ponto 4 = | Ponto 5 = | Ponto 6 = |
|---------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|------------|
| X = | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | |
| Y = | -2 | -1,2 | -1,1 | -1,1 | -0,8 | |
| Y calculado = | -1,9999999999999999 | -1,200000000000000044 | -1,099999999999999927 | -1,100000000000000006 | -0,7999999999999999756 | -3,9789002 |
| d Resíduo = | 1,03324467037868573E-16 | 4,38559778770386544E-16 | -7,30535423820732888E-16 | 5,96311194867027439E-16 | -2,43728648374741397E-16 | 3,9789002 |

Erro Total 1,15326649034965223E-30 Coeficiente de Determinação: 1

X . B = Y

Matriz Somatório do X

| Matriz | Coluna 1 | Coluna 2 | Coluna 3 | Coluna 4 |
|---------|----------------|---------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Linha 1 | N | 6 ΣX | 7,5 ΣX ² | 13,75 ΣX ³ |
| Linha 2 | X | 7,5 ΣX ² | 13,75 ΣX ³ | 28,125 ΣX ⁴ |
| Linha 3 | X ² | 13,75 ΣX ³ | 28,125 ΣX ⁴ | 61,1875 ΣX ⁵ |
| Linha 4 | X ³ | 28,125 ΣX ⁴ | 61,1875 ΣX ⁵ | 138,28125 ΣX ⁶ |
| Linha 5 | X ⁴ | 61,1875 ΣX ⁵ | 138,28125 ΣX ⁶ | 320,546875 ΣX ⁷ |
| Linha 6 | X ⁵ | 138,28125 ΣX ⁶ | 320,546875 ΣX ⁷ | 756,4453125 ΣX ⁸ |

Matriz dos Termos de b

| Vetor | Coluna 1 |
|-------|--------------------------|
| b0 | -1,0000000000000000 |
| b1 | 2,7999999999999998323 |
| b2 | -2,9666666666666661052 |
| b3 | 1,19999999999999993738 |
| b4 | -0,13333333333333304982 |
| b5 | -4,48746705213794841E-15 |

Matriz Somatório de Y

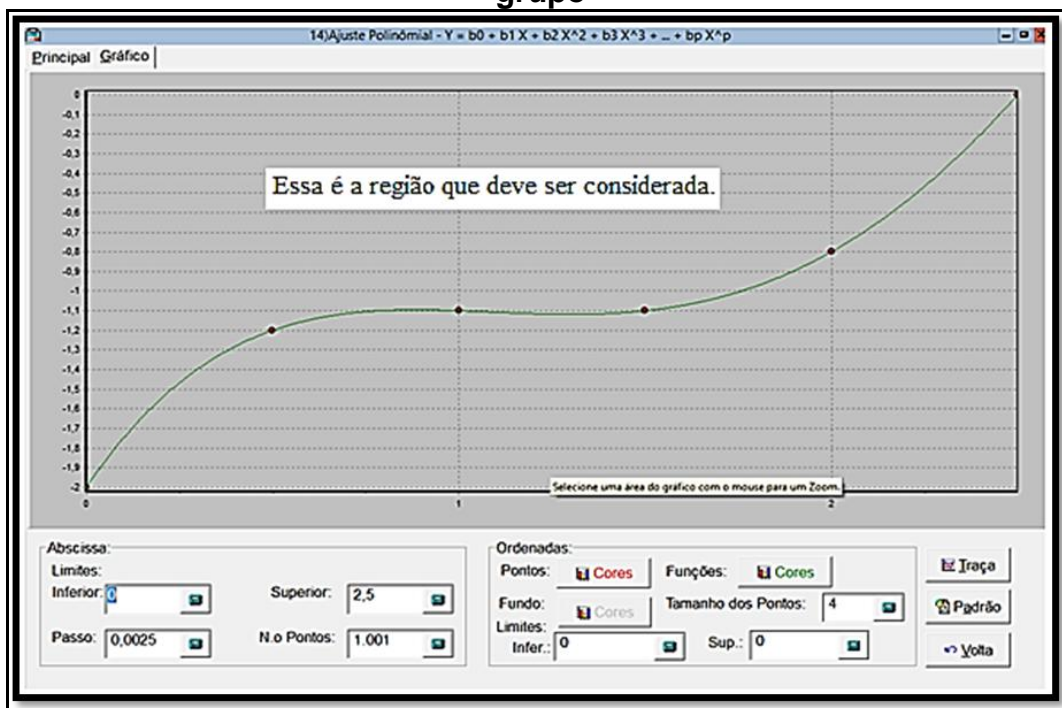
| Vetor | Coluna 1 |
|---------|------------------|
| Linha 1 | ΣY |
| Linha 2 | ΣYX |
| Linha 3 | ΣYX ² |
| Linha 4 | ΣYX ³ |
| Linha 5 | ΣYX ⁴ |
| Linha 6 | ΣYX ⁵ |

A função polinomial é: -1,9999999999999999 + 2,7999999999999998323*X - 2,9666666666666661052*X² + 1,19999999999999993738*X³ - 0,13333333333333304982*X⁴ - 4,48746705213794841E-15*X⁵

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a função definida, foi solicitado ao *software* VCN que gerasse a curva, sendo a região considerada aquela entre a curva e o eixo das abscissas, como indicado no protocolo 53.

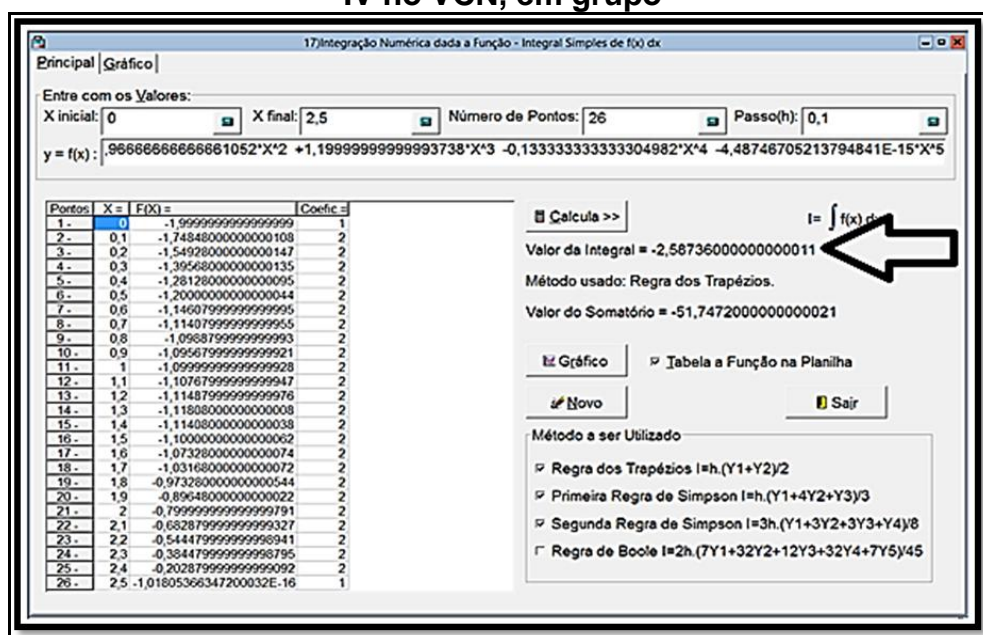
Protocolo 53 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Visualização da área no VCN a partir de 6 pontos, ao longo da linha de fronteira, na área IV, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, foi, então, calculada a medida da área IV com o auxílio do VCN, obtendo $2,58 \text{ cm}^2$, como pode ser observado no protocolo 54.

Protocolo 54 - Resolução da atividade 8 – questão 2 – letra b – Cálculo da área IV no VCN, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, a partir de todo esse processo, dividindo a região Sudeste em quatro áreas distintas, as curvas se ajustaram melhor. Somando essas áreas, obteve-se um total de $17,04 \text{ cm}^2$, e ao se utilizar a escala do mapa para transformar a medida em Km^2 , teve-se a seguinte operação:

$$\begin{aligned} 1 \text{ cm}^2 &\rightarrow 62500 \text{ km}^2 \\ 17,04 \text{ cm}^2 &\rightarrow x \\ x &= 1.065.000 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

Portanto, a resolução representou a medida de $1.065.000 \text{ Km}^2$ para a região Sudeste. Comparando as medidas de áreas obtidas nas questões 1 e 2 com a medida real, tem-se, portanto, que na questão 1, a área obtida foi de $17,52 \text{ cm}^2$, equivalente à $1.095.000 \text{ km}^2$. Já na questão 2, na qual foi utilizado o VCN, a área obtida foi de $17,04 \text{ cm}^2$, equivalente à $1.065.000 \text{ km}^2$. Enquanto que a medida real, obtida no site do IBGE é de $924.616,97 \text{ km}^2$.

Observa-se, portanto, que o cálculo da área com a utilização do *software* VCN ficou mais próximo do real. Porém, assim como já discutido anteriormente e em outros exercícios, vale lembrar que poderiam, também, ser utilizados mais polígonos com medidas ainda mais precisas para se obter um resultado melhor que o obtido pelo VCN, já que o sucesso desse cálculo, tanto pelas aproximações finitas, quanto pelo VCN, está vinculado diretamente ao número de pontos, de polígonos e à precisão das medidas obtidas.

A terceira questão trabalhava com o cálculo do volume de um copo descartável por aproximações finitas, utilizando 8 cilindros inscritos e o *software* GeoGebra para a visualização gráfica e geométrica lateral desse copo, e possuía um único item:

Questão 3:

Calcular o volume de um copo descartável através das aproximações finitas, utilizando 8 cilindros inscritos de mesma altura, com o auxílio do *software* GeoGebra. Observe que esse copo é formado pela rotação de uma reta em torno de um eixo:

Para realizar a questão, o professor pesquisador disponibilizou aos alunos um copo descartável cujo volume mede 200 cm^3 , e, através dos cálculos, esperava-se a obtenção do resultado por aproximação. A foto 3 apresenta dois componentes do grupo medindo a altura do copo, obtendo 8 cm.

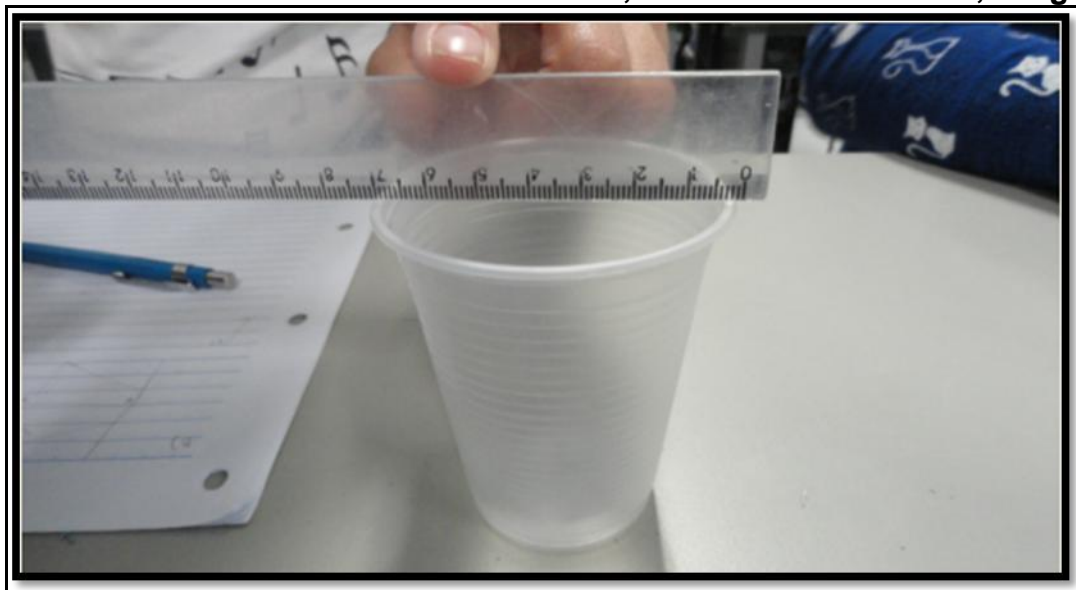
Foto 3 - Obtendo a altura do copo, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Já a foto 4 mostra, na sequência, o grupo medindo o raio maior do copo, obtendo 3,3 cm.

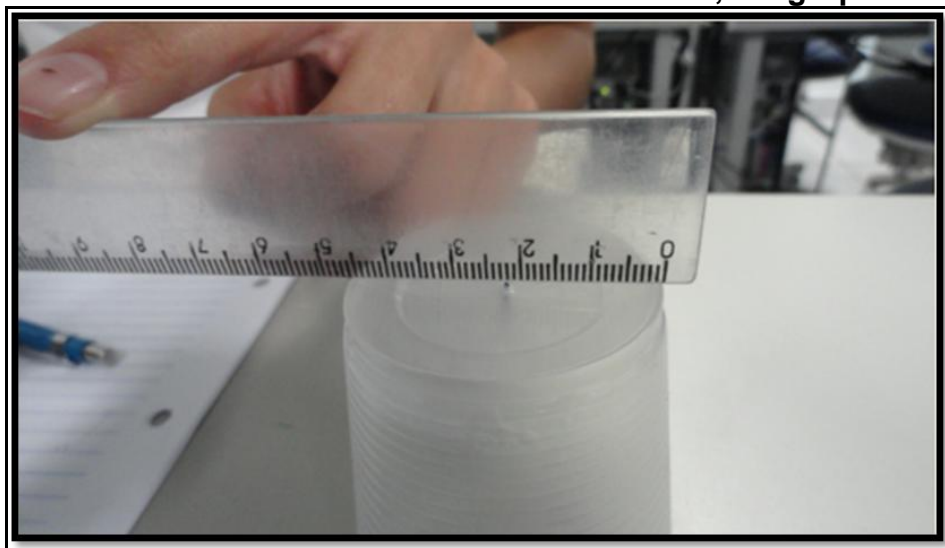
Foto 4 - Obtendo a medida do raio maior, considerando a borda, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Finalizando a sequência de medições, a foto 5 apresenta os componentes do grupo medindo o raio menor do copo, obtendo 2,25 cm.

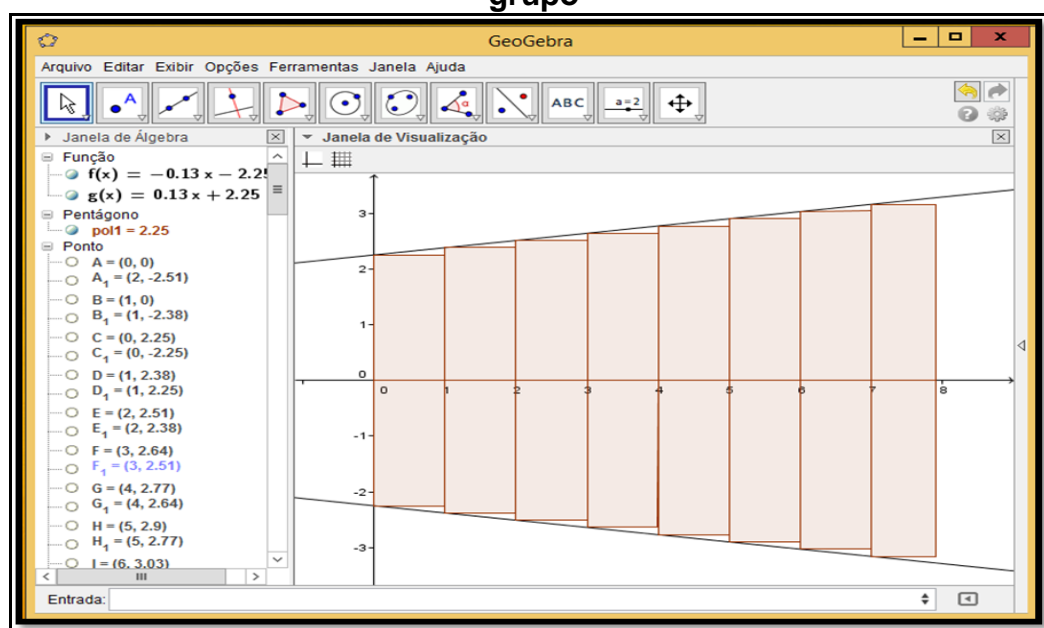
Foto 5 - Obtendo a medida do raio menor, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Após esses procedimentos, os alunos utilizaram o GeoGebra para a construção dos retângulos. Dessa forma, no protocolo 55, pode ser vista a lateral do copo, através da construção de oito retângulos inscritos, considerando a borda do copo.

Protocolo 55 - Resolução da atividade 8 – questão 3 – Vista lateral do copo, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos chegaram à conclusão, então, de que a soma dos volumes dos 8 cilindros inscritos, por aproximação finita, é igual a $186,12 \text{ cm}^3$, chegando, portanto, a um resultado aproximado do real. No protocolo 56 os cálculos dos volumes dos cilindros cujas alturas medem 1cm cada realizados pelo grupo:

Protocolo 56 - Resolução da atividade 8 – questão 3 – Volume do copo por aproximações finitas, em grupo

$1 \text{ cm}^3 \approx 1 \text{ ml}$.
 Aproximações finitas (Geogebra)
 $V_1 = \pi \cdot (2,25)^2 \cdot 1$
 $V_2 = \pi \cdot (2,38)^2 \cdot 1$
 $V_3 = \pi \cdot (2,51)^2 \cdot 1$
 $V_4 = \pi \cdot (2,64)^2 \cdot 1$
 $V_5 = \pi \cdot (2,77)^2 \cdot 1$
 $V_6 = \pi \cdot (2,9)^2 \cdot 1$
 $V_7 = \pi \cdot (3,03)^2 \cdot 1$
 $V_8 = \pi \cdot (3,16)^2 \cdot 1$
 $V_T = 186,12 \text{ cm}^3$

Fonte: Dados da pesquisa.

A quarta questão, então, dizia respeito também ao cálculo do volume do mesmo copo descartável, porém, desta vez, seria utilizada a Integral Definida e o VCN para o cálculo dessa Integral, contendo 3 itens, do **a** ao **c**. Para tanto, os alunos utilizaram lápis, papel, borracha, régua, tesoura e o VCN.

Questão 4:

Utilizando o mesmo copo, faça o que se pede:

a) Visualizar a reta que, antes do giro, deu início ao sólido de revolução; determinar pontos sobre essa reta, usando a régua; lançar esses pontos no VCN para determinar uma função que se aproxima do formato da reta; determinar os Limites de integração; montar a Integral Definida e calcular o volume do copo, utilizando o *software*.

Em debate, os alunos decidiram resolver essa questão de duas formas: considerando a borda e desconsiderando a borda do copo.

Dessa forma, inicialmente considerando a borda do copo, os alunos obtiveram os seguintes dados:

Pontos: (0, 2.25) e (8.4, 3.5) (medidas básicas do copo)

Limites de integração: 0 e 8.4

Após, foram lançados os dois pontos no VCN, em “ajuste polinomial”, com grau 1, já que a função é linear, obtendo a função que se aproxima do formato da reta: $F(x) = 2.25 + 0.149x$, arredondando-a, e que pode ser visualizada no protocolo 57.

Protocolo 57 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Obtenção da função - VCN, em grupo

Principal | Gráfico

18) Ajuste Polinomial - $Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \dots + b_p X^p$

Número de Pontos(n): 2 Grau do Polinômio (p): 1

| I = | Ponto: 1 = | Ponto: 2 = |
|---------------|-------------------------|-------------------------|
| X = | 0 | 8,4 |
| Y = | 2,25 | 3,5 |
| Y calculado = | 2,25 | 3,5 |
| d Resíduo = | 2,16840434497100887E-19 | 2,16840434497100887E-19 |

Erro Total 9,40395480657830006E-38 Coeficiente de Determinação: 1

X . B = Y

Matriz Somatório do X

| Matriz | Coluna: 1 | Coluna: 2 |
|---------|------------|-----------|
| Linha 1 | $\sum X$ | 8,4 |
| Linha 2 | $\sum X^2$ | 70,56 |

Matriz dos Termos de b

| Vetor | Coluna: 1 |
|-------|---------------------|
| b0 | 2,25 |
| b1 | 0,14880952380952381 |

Matriz Somatório de Y

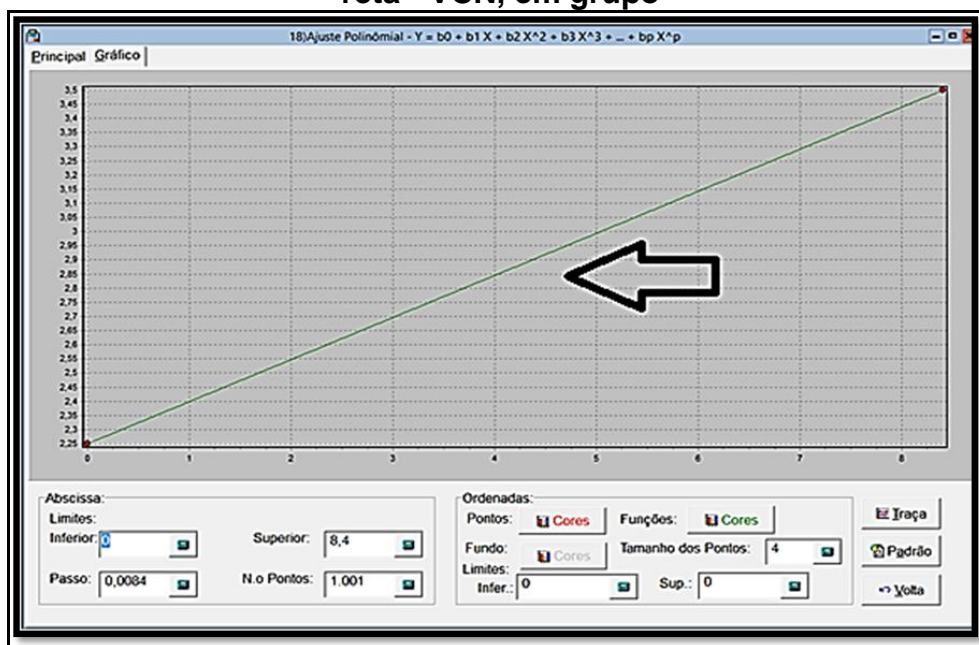
| Vetor | Coluna: 1 |
|----------|-----------|
| Linha: 1 | $\sum Y$ |
| Linha: 2 | $\sum YX$ |

A função polinomial é : 2.25 + 0,14880952380952381 * X

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, o formato da reta gerada pela função obtida no VCN pode ser visualizado no protocolo 58.

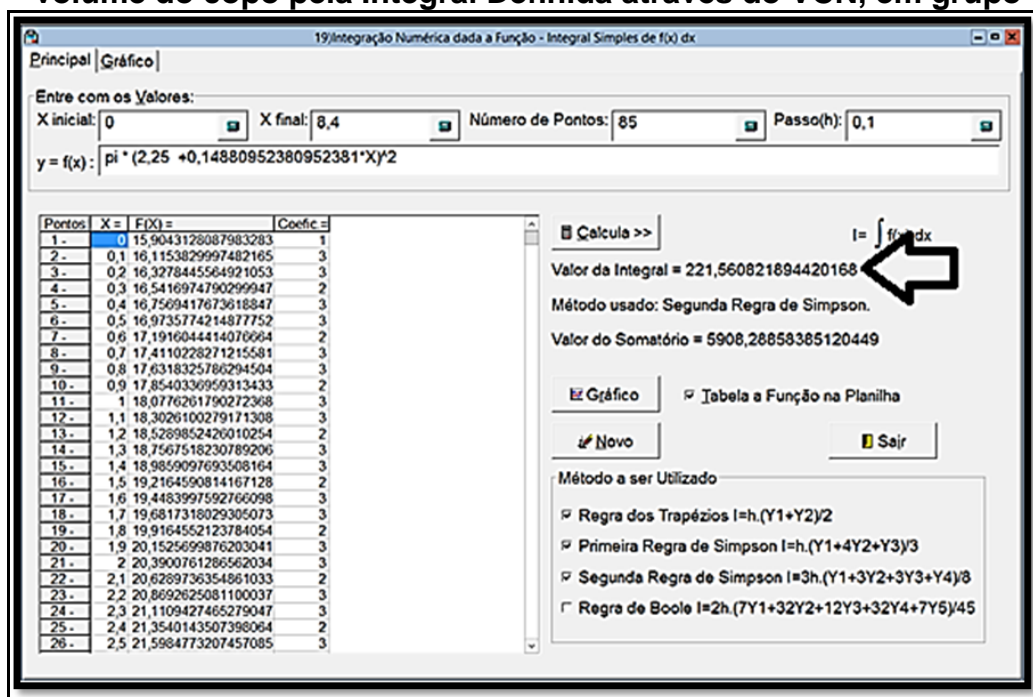
Protocolo 58 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Visualização da reta - VCN, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Já o volume do copo formado pela rotação da reta em torno do eixo horizontal (eixo x), pode ser visualizado no protocolo 59, obtido no VCN, em “integração numérica dada a função”.

Protocolo 59 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Cálculo do volume do copo pela Integral Definida através do VCN, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Após os procedimentos realizados, os alunos obtiveram um volume de 221,56 cm³, superior aos 200 cm³ esperado.

Já na execução da segunda forma de medição, desconsiderando a borda do copo, os alunos precisaram cortá-lo, para facilitar a medição.

A foto 6 apresenta componentes do grupo cortando o copo para que pudessem conseguir novas medidas desconsiderando a borda.

Foto 6 - Obtendo a medida do raio maior, desconsiderando a borda, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos, então, obtiveram os seguintes dados:

Pontos: (0, 2.25) e (8.2, 3.3)

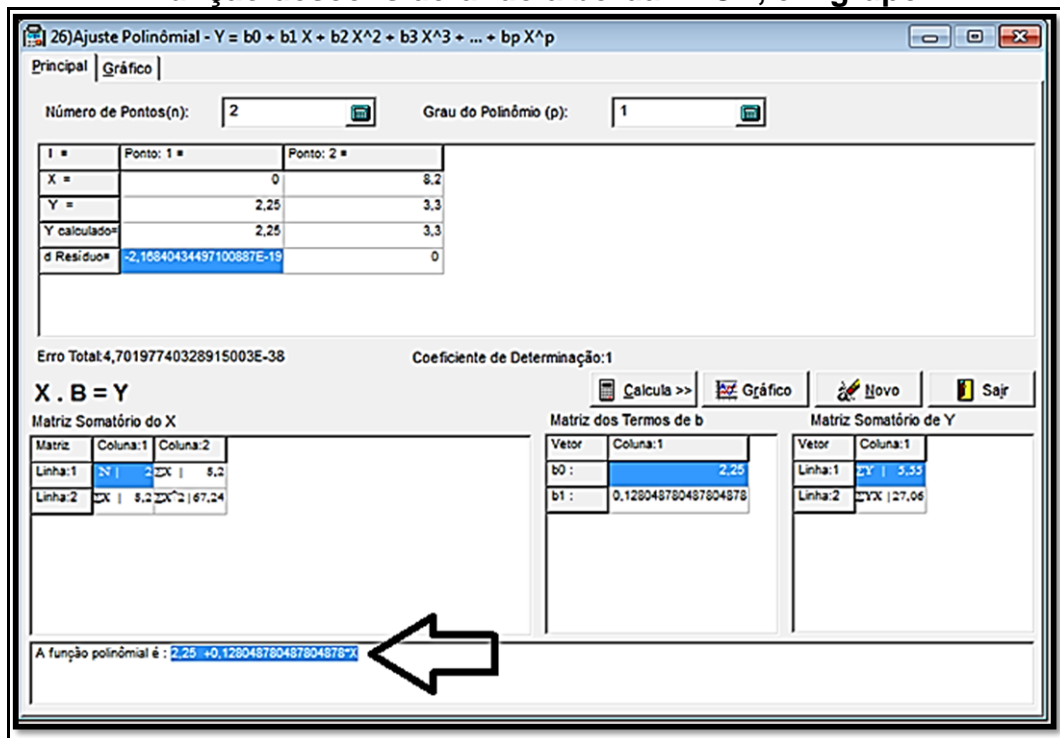
Limites de integração: 0 e 8.2

Função que se aproxima do formato da reta: $F(x) = 2.25 + 0.128x$, arredondando.

Vale observar que desconsiderando a borda, há uma redução na medida da altura do copo (Limites de integração) e na medida do raio maior.

Com as medidas realizadas e os dados disponíveis, os dois pontos foram lançados no VCN, em “ajuste polinomial”, podendo ser visualizada no protocolo 60.

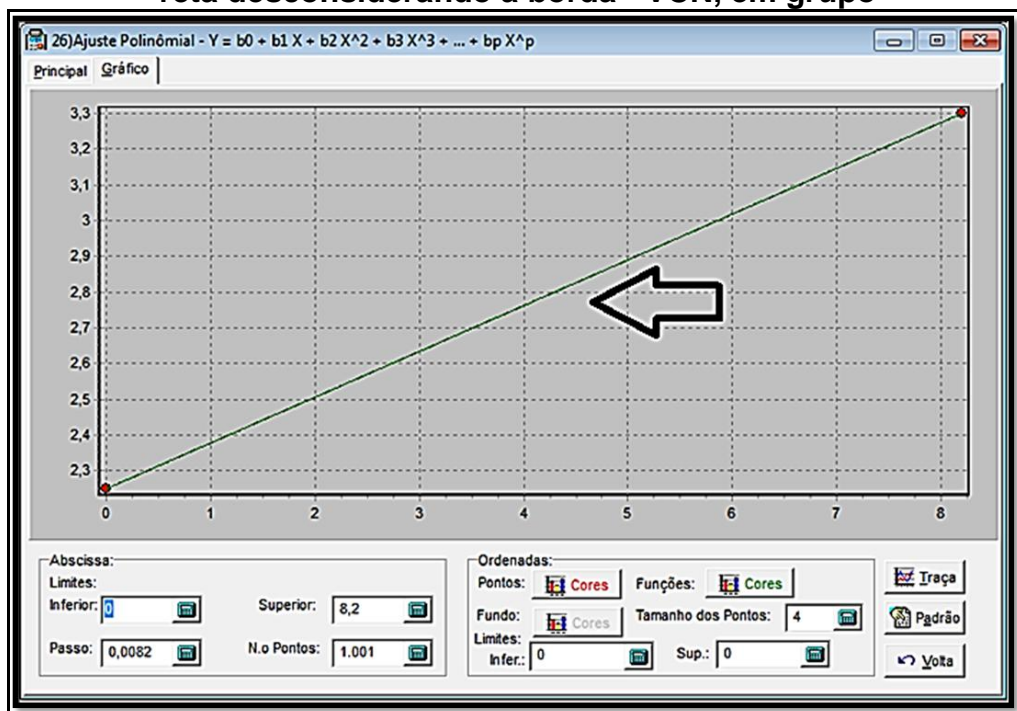
Protocolo 60 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Obtenção da função desconsiderando a borda - VCN, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

O formato da reta gerada pela função obtida no VCN pode ser visualizado no protocolo 61:

Protocolo 61 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Visualização da reta desconsiderando a borda - VCN, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Já o volume do copo formado pela rotação da reta em torno do eixo horizontal (eixo x), pode ser visualizado no protocolo 62, pelo VCN, em “integração numérica dada a função”.

Protocolo 62 - Resolução da atividade 8 – questão 4 – letra a – Cálculo do volume do copo pela Integral Definida através do VCN, desconsiderando a borda, em grupo

Entre com os Valores:

X inicial: 0 X final: 8,2 Número de Pontos: 83 Passo(h): 0,1

y = f(x): $\pi*(2,25 + 0,128048780487804878*X)^2$

| Pontos: | X = | F(X) = | Coefic. = |
|---------|-----|---------------------|-----------|
| 1 - | 0 | 15,9043128087983283 | 1 |
| 2 - | 0,1 | 16,0858526183661373 | 4 |
| 3 - | 0,2 | 16,2684226497961066 | 2 |
| 4 - | 0,3 | 16,4520229030882362 | 4 |
| 5 - | 0,4 | 16,636653378242526 | 2 |
| 6 - | 0,5 | 16,822314075258976 | 4 |
| 7 - | 0,6 | 17,0090049941375863 | 2 |
| 8 - | 0,7 | 17,1967261348783569 | 4 |
| 9 - | 0,8 | 17,3854774974812877 | 2 |
| 10 - | 0,9 | 17,5752590819463787 | 4 |
| 11 - | 1 | 17,76607088827363 | 2 |
| 12 - | 1,1 | 17,9579129164630415 | 4 |
| 13 - | 1,2 | 18,1507851665146133 | 2 |
| 14 - | 1,3 | 18,3446876384283453 | 4 |
| 15 - | 1,4 | 18,5396203322042375 | 2 |
| 16 - | 1,5 | 18,73558324784229 | 4 |

Calcula >>

Valor da Integral = 200,743058175407403

Método usado: Primeira Regra de Simpson.

Valor do Somatório = 6022,2917452622221

Gráfico Tabela a Função na Planilha

Novo Sair

Método a ser Utilizado

- Regra dos Trapézios $I=h.(Y1+Y2)/2$
- Primeira Regra de Simpson $I=h.(Y1+4Y2+Y3)/3$
- Segunda Regra de Simpson $I=3h.(Y1+3Y2+3Y3+Y4)/8$
- Regra de Boole $I=2h.(7Y1+32Y2+12Y3+32Y4+7Y5)/45$

Fonte: Dados da pesquisa.

Como pode ser observado no protocolo 62, o valor conseguido ficou bem próximo do que se esperava, indicando o alcance do objetivo proposto inicialmente com a questão, chegando à conclusão de que, para se chegar ao volume informado na embalagem do copo, era necessário desprezar a sua borda.

Questão 4:

Utilizando o mesmo copo, faça o que se pede:

b) Calcular o volume do copo, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Os alunos inicialmente entenderam que, para realizar essa atividade, seria utilizada a função obtida pelo VCN desprezando a borda, já que, assim, ficaram mais

próximos do volume real. Então, a fórmula para o cálculo do volume do copo, através da Integral Definida, como já visto anteriormente, é dada por:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Substituindo os Limites e a função de maneira adequada, obtém-se:

$$V = \pi \cdot \int_0^{8,2} (2,25 + 0,128x)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^{8,2} (5,0625 + 0,576x + 0,016384x^2) dx$$

$$V = \pi \cdot \left(5,0625x + 0,576 \cdot \frac{x^2}{2} + 0,016384 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{8,2}$$

$$V = \pi \cdot \left(5,0625 \cdot 8,2 + 0,576 \cdot \frac{8,2^2}{2} + 0,016384 \cdot \frac{8,2^3}{3} \right) - 0$$

$$V = 200,71 \text{ cm}^3$$

A seguir, continuando a trabalhar com o mesmo material, pede-se, então, para comparar os resultados obtidos nos dois últimos itens:

Questão 4:

Utilizando ainda o mesmo copo, faça o que se pede:

c) Comparar os resultados obtidos nas letras **a** e **b** com o resultado obtido na questão 3.

Ao fazerem a comparação dos resultados obtidos pelos métodos das aproximações finitas, pelo *software* VCN e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, como determinava o exercício, os alunos perceberam que utilizando o VCN ou o Teorema Fundamental do Cálculo, conseguiram um resultado mais próximo do real, com menos esforço, em relação ao método das aproximações finitas, o que pode-se inferir que o sucesso desse cálculo, tanto pelas aproximações finitas quanto pelo VCN ou pelo Teorema Fundamental do Cálculo, está vinculado diretamente à precisão das medidas obtidas.

A ideia principal, ao se conceber um exercício como esse, como disse o aluno D, “é que ele nos leva a perceber que existem vários caminhos para se chegar ao resultado esperado, ou pelo menos, próximo dele, não é, professor?”.

Essa sequência de exercícios com uma gama de atividades foi pensada tendo como parâmetro Zabala (1998), quando afirma que esse tipo de trabalho:

[...] logicamente permite satisfazer a totalidade dos condicionantes, a fim de que as aprendizagens sejam o mais significativas possível. Para que essas razões sejam acertadas, os professores devem ter uma consciência clara a respeito do sentido de cada fase. Numa unidade desse tipo é fácil se deixar levar pela dinâmica do grupo e perder de vista os objetivos que o perseguem. Os problemas e a complexidade da organização do grupo fazem com que essa tarefa ocupe um espaço de tempo notável, somado às necessidades de reconduzir os interesses naturais dos alunos para os objetivos previstos. [...] As atividades prévias e posteriores são básicas para alcançar a compreensão dos conhecimentos propostos. (ZABALA, 1998, p.75-76).

Então, pode-se afirmar que, nesse sentido, todos os cuidados foram tomados, por parte do pesquisador, para que ocorresse, nos dizeres do autor, um trabalho sério de estudo.

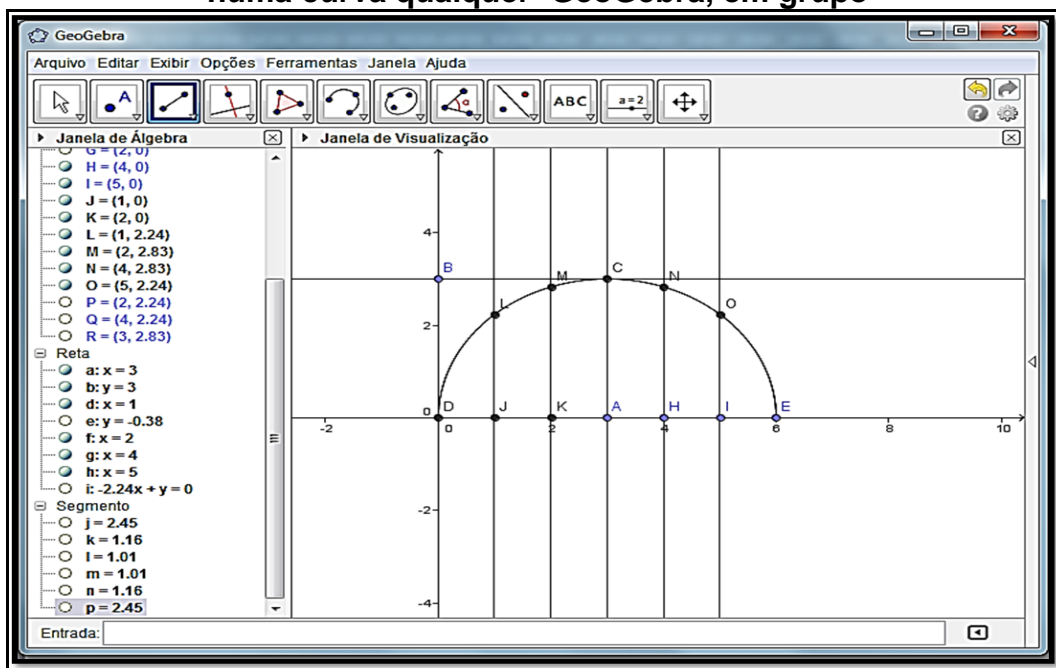
A quinta questão da atividade propunha o cálculo do comprimento de uma curva qualquer, utilizando as aproximações finitas, com o auxílio do GeoGebra para a visualização gráfica e geométrica, contendo um único item. Os alunos utilizaram somente o *software* para resolvê-la. Eis a questão:

Questão 5:

Calcular o comprimento de uma curva qualquer, utilizando as aproximações finitas, com o auxílio do GeoGebra, para a visualização gráfica e geométrica:

Assim, com a utilização do *software* GeoGebra, esboçou-se uma curva qualquer, obtendo alguns pontos, como pode ser visualizado no protocolo 63.

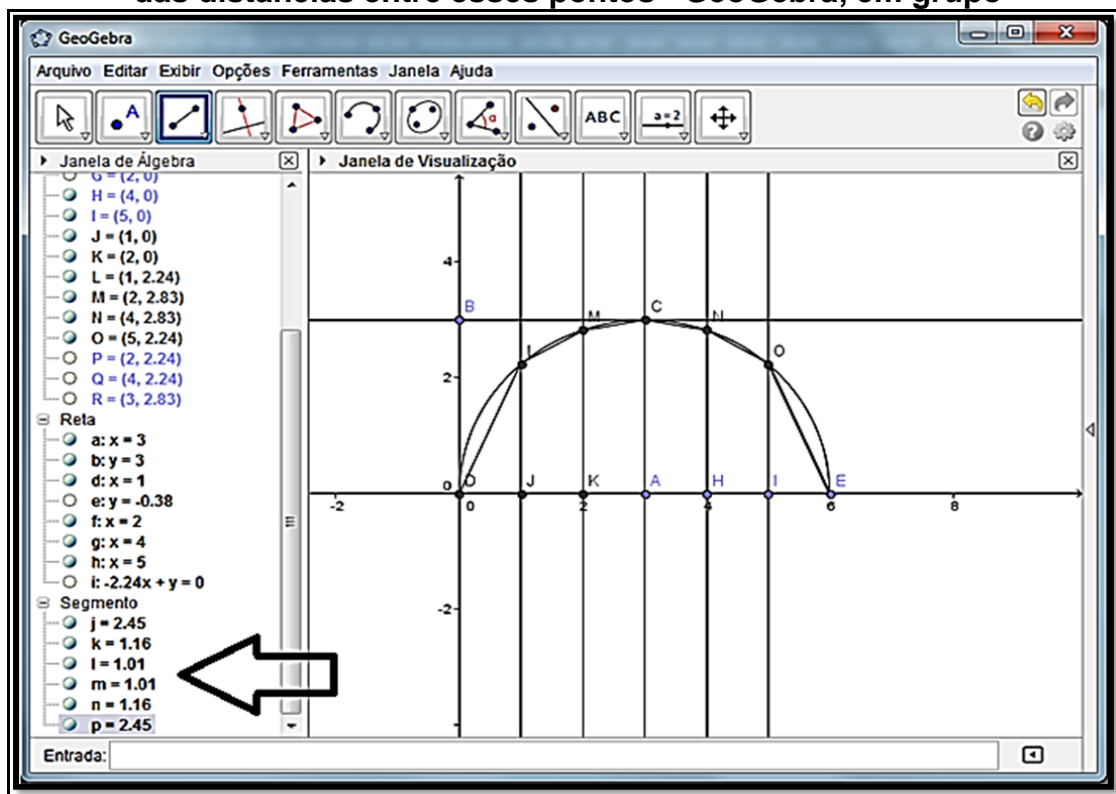
Protocolo 63- Resolução da atividade 8 – questão 5 – Obtenção de pontos numa curva qualquer- GeoGebra, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

O próximo passo seria, então, ligar os pontos para conseguir as medidas das distâncias entre esses pontos, como indica o protocolo 64:

Protocolo 64 - Resolução da atividade 8 – questão 5 – Obtenção das medidas das distâncias entre esses pontos - GeoGebra, em grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

Uma grande vantagem do *software* GeoGebra é que nele pode ser traçado o segmento, e a sua medida é calculada automaticamente com agilidade e simplicidade. Porém, torna-se necessário enfatizar que, para se conseguir um resultado mais próximo do real, torna-se essencial aumentar o número de pontos, diminuindo assim, o comprimento de cada segmento gerado, já que, como já explicitado em outros momentos, quanto menores forem as medidas dos segmentos, melhor é a aproximação do comprimento real. Assim, o comprimento da curva obtido será dado pela soma das seguintes medidas:

$$2,45 + 1,16 + 1,01 + 1,01 + 1,16 + 2,45 = 9,24 \text{ u.c.}$$

Já a sexta questão, versava sobre o cálculo do comprimento da curva obtida na questão 5, utilizando o VCN, contendo 3 itens, do **a** ao **c** e, para executá-los, os alunos utilizaram lápis, papel, borracha e o *software*. Como são sequenciados, os três itens da questão serão contemplados nessa análise. Eis o primeiro item:

Questão 6:

Utilizando a mesma curva, faça o que se pede:

- a)** Lançar os pontos que foram obtidos na questão anterior, no VCN, para determinar uma função cujo gráfico se aproxima do formato da curva.

Como o formato da curva se assemelha a uma parábola, os alunos chegaram ao consenso de que seria utilizado, no VCN, o “Ajuste de Curvas” e também foi estabelecido que o grau do polinômio fosse 2, conforme apresentado no protocolo 65.

Protocolo 65 - Resolução da atividade 8 – questão 6 – letra a - VCN, em grupo

Utilitários Operadores Interpolação Derivação Integração Equações Diferenciais Sistemas Lineares Cálculo de Raízes Ajuste de Curvas Otimização

1) Ajuste Polinomial - $Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \dots + b_p X^p$

Principal Gráfico

Número de Pontos(n): Grau do Polinômio (p):

| I = | Ponto: 1 = | Ponto: 2 = | Ponto: 3 = | Ponto: 4 = | Ponto: 5 = | Ponto: 6 = | Ponto: 7 = |
|---------------|-----------------------|----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|----------------------|-----------------------|
| X = | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Y = | 0 | 2,24 | 2,83 | 3 | 2,83 | 2,24 | 0 |
| Y calculado = | 0,152142857142857141 | 1,87714285714285714 | 2,91214285714285714 | 3,25714285714285714 | 2,91214285714285714 | 1,87714285714285714 | 0,152142857142857141 |
| d Resíduo = | -0,152142857142857141 | 0,362857142857142858 | -0,0821428571428571429 | -0,257142857142857143 | -0,0821428571428571429 | 0,362857142857142857 | -0,152142857142857141 |

Erro Total: 0,389242857142857143 Coeficiente de Determinação: 0,962527196560649362

X . B = Y

Matriz Somatório do X

| Matriz | Coluna:1 | Coluna:2 | Coluna:3 |
|---------|------------|------------|----------|
| Linha:1 | $\sum X$ | $\sum X^2$ | 91 |
| Linha:2 | $\sum X$ | $\sum X^2$ | 441 |
| Linha:3 | $\sum X^2$ | $\sum X^3$ | 2275 |

Matriz dos Termos de b

| Vetor | Coluna:1 |
|-------|----------------------|
| b0: | 0,152142857142857141 |
| b1: | 2,07 |
| b2: | -0,345 |

Matriz Somatório de Y

| Vetor | Coluna:1 |
|---------|-------------|
| Linha:1 | $\sum Y$ |
| Linha:2 | $\sum YX$ |
| Linha:3 | $\sum YX^2$ |

A função polinomial é: $0,152142857142857141 + 2,07X - 0,345X^2$

Fonte: Dados da pesquisa.

A função, então, que se aproxima da curva, arredondando-a, é $f(x) = 0,15 + 2,07x - 0,345x^2$.

Questão 6:

Utilizando a mesma curva, faça o que se pede:

- b) Determinar os Limites de integração e calcular o comprimento dessa curva, utilizando a Integral Definida e o VCN para calcular essa Integral.

Como encontrado no item anterior, os Limites de integração foram: 0 e 6

Para calcular o comprimento da curva, utilizando a Integral Definida, pode-se utilizar a fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Substituindo os Limites e a derivada da função de maneira adequada, obtém-se, então:

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + (2,07 - 0,69x)^2} dx$$

Optou-se, então, por calculá-la através do *software* VCN, em “Integração Numérica Dada a Função”, informando os Limites 0 e 6, o “passo h” igual a 0,1, digitando a função corretamente e, então, o VCN calculou a Integral Definida, que nesse caso, representava o comprimento da curva, conforme apontado no protocolo 66:

Protocolo 66 - Resolução da atividade 8 – questão 6 – letra b - VCN, em grupo

6)Integração Numérica dada a Função - Integral Simples de f(x) dx

Principal | Gráfico

Entre com os Valores:

X inicial: 0 X final: 6 Número de Pontos: 61 Passo(h): 0,1

y = f(x): $\sqrt{1+(2,07-0,69x)^2}$ 0,5

| Pontos: | X = | F(x) = | Coefic. = |
|---------|-----|---------------------|-----------|
| 1 - | 0 | 2,29889103700023155 | 1 |
| 2 - | 0.1 | 2,23696244939426732 | 3 |
| 3 - | 0.2 | 2,17545949169365137 | 3 |
| 4 - | 0.3 | 2,11441930562506925 | 2 |
| 5 - | 0.4 | 2,05388315149620914 | 3 |
| 6 - | 0.5 | 1,99389693815904136 | 3 |
| 7 - | 0.6 | 1,93451182472478053 | 2 |
| 8 - | 0.7 | 1,87578490238086734 | 3 |
| 9 - | 0.8 | 1,81777996468219442 | 3 |
| 10 - | 0.9 | 1,76056837413376252 | 2 |
| 11 - | 1 | 1,70423003142181484 | 3 |
| 12 - | 1.1 | 1,64885445082335876 | 3 |
| 13 - | 1.2 | 1,59454194049576507 | 2 |
| 14 - | 1.3 | 1,54140487867399719 | 3 |
| 15 - | 1.4 | 1,48956906519973084 | 3 |
| 16 - | 1.5 | 1,43917511095766244 | 2 |
| 17 - | 1.6 | 1,39037980422616899 | 3 |
| 18 - | 1.7 | 1,34335736124085761 | 3 |
| 19 - | 1.8 | 1,29830042748202159 | 2 |
| 20 - | 1.9 | 1,25542064663601897 | 3 |
| 21 - | 2 | 1,21494855858180267 | 3 |
| 22 - | 2.1 | 1,17713253289508569 | 2 |

Calcula >>

$I = \int f(x) dx$

Valor da Integral = 9,03364290082092712

Método usado: Segunda Regra de Simpson.

Valor do Somatório = 240,89714402189139

Gráfico Tabela a Função na Planilha

Novo Sair

Método a ser Utilizado

Regra dos Trapézios $I=h.(Y1+Y2)/2$

Primeira Regra de Simpson $I=h.(Y1+4Y2+Y3)/3$

Segunda Regra de Simpson $I=3h.(Y1+3Y2+3Y3+Y4)/8$

Regra de Boole $I=2h.(7Y1+32Y2+12Y3+32Y4+7Y5)/45$

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, o comprimento da curva é, portanto, de, aproximadamente 9,03 u.c.. Já o item c, pedia para comparar os resultados do item anterior com o resultado da questão 5. Eis o exercício:

Questão 6:

Utilizando a mesma curva, faça o que se pede:

c) Comparar o resultado obtido na letra b com o resultado obtido na questão 5.

Como foram usados os mesmos pontos, pode-se notar que os resultados ficaram muito próximos. Enquanto na questão 5 foi obtido um comprimento de 9,24 **u.c.**, na letra **b** da questão 6, o comprimento foi de 9,03 **u.c.**

Pode-se concluir, portanto, que através do desenvolvimento dessas oito atividades, foram possibilitadas condições de relacionar conceitos, significados e procedimentos de cálculo, além de incentivar o desenvolvimento das habilidades e da autonomia dos alunos (ZABALA, 1998) quanto ao estudo da Integral Definida e à utilização de *softwares*, como o GeoGebra e o VCN.

5.9 Tipos de equívocos observados

Quadro 2 - Tipos de equívocos

| ATIVIDADE/ QUESTÃO | Procedimental | Conceitual | Atitudinal | Numérico | Verbal | Algébrico |
|-------------------------------|----------------------|-------------------|-------------------|-----------------|---------------|------------------|
| 1/1 | X | X | X | X | X | |
| 1/2 | | | | | | |
| 2/1 | | | | | | |
| 2/2 | | | | | | |
| 2/3 | | | | | | |
| 3/1 | X | | | | | X |
| 3/2 | X | | | | | X |
| 3/3 | X | | | | | X |
| 4/1 | | | | | | |
| 4/2 | X | X | | X | X | |
| 4/3 | | | | | | |
| 5/1 | X | | | X | | |
| 5/2 | X | | | X | | X |
| 5/3 | | | | | | |
| 5/4 | | | | | | |
| 5/5 | | | | | | |
| 6/A | | | | | | |
| 6/B | | | | | | |
| 6/C | | | | | | |
| 6/D | | | | | | |
| 6/E | | | | | | |
| 6/F | | | | | | |
| 7/1 | | | | | | |
| 7/2 | | | | | | |
| 8/1 | | | | | | |
| 8/2 | | | | | | |
| 8/3 | | | | | | |
| 8/4 | | | | | | |
| 8/5 | | | | | | |
| 8/6 | | | | | | |

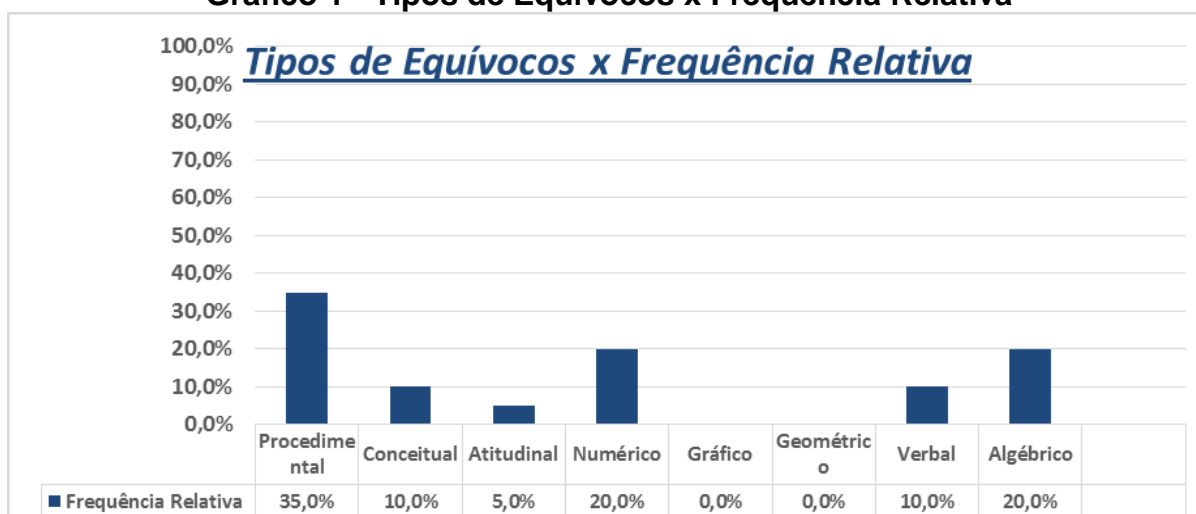
Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que até a questão 2 da atividade 5, os alunos apresentaram alguns equívocos. Porém, a partir daí, eles seguiram com maior confiança e autonomia, na resolução das atividades, acertando as questões. Já com relação aos aspectos gráficos e geométricos, os alunos não tiveram dificuldade e, por isso, não foram contemplados no quadro 2.

Representação gráfica dos tipos de equívocos:

A partir da análise da resolução das 8 atividades, observaram-se 20 equívocos, dos tipos procedimentais, conceituais, atitudinais, numéricos, verbais e algébricos. Como já dito, não houve ocorrência dos tipos de equívocos gráfico ou geométrico. Os tipos de equívocos mais frequentes foram os procedimentais ($7/20 = 0,35$ ou 35 %), seguidos dos numéricos ($4/20 = 0,2$ ou 20 %) e dos algébricos ($4/20 = 0,2$ ou 20 %), conforme apresentado no gráfico 1.

Gráfico 1 - Tipos de Equívocos x Frequência Relativa



Fonte: Dados da pesquisa.

Algumas reflexões podem ser feitas, visto que o pesquisador, prioritariamente, é um professor. Antes do Mestrado, as intenções iniciais visavam cumprir o programa da disciplina da melhor forma possível, sem preocupação com os detalhes, com os conceitos, procurando estudar o conteúdo com certa antecedência, fazer um plano de aula, contendo definições, exemplos e exercícios, contextualizando sempre que possível. Porém, a partir das aulas que tive no Mestrado, foram buscadas novas formas de pensar e trabalhar o conteúdo em sala de aula, utilizando novas metodologias de ensino, tais como:

- Utilizar *softwares* como o GeoGebra e o VCN;
- Conceituar Limites, Derivadas e Integrais, relacionando-os.

Assim, iniciava as aulas de Cálculo Integral, apresentando o Teorema Fundamental do Cálculo e, logo em seguida, seguia para as regras de integração. Depois que se iniciaram os estudos para a construção dessa dissertação e para criar o caderno de atividades, as aulas dadas já não são mais as mesmas.

Hoje, esse pesquisador utiliza uma nova sequência didática nas aulas de Cálculo Integral:

- Conceito de somatório;
- Cálculo de área por aproximações finitas, utilizando o cálculo manual e o GeoGebra;
- Limite de somas finitas, relacionando-o com a Integral Definida;
- Valor médio de uma função;
- Teorema Fundamental do Cálculo;
- Regras de integração;
- Aplicações, utilizando o cálculo manual, o GeoGebra e o VCN.

Portanto, ensinar Integral Definida, sem antes trabalhar o que está por trás dela, ou seja, o Limite de somas finitas, faz parte do passado!

Assim, as intenções foram preparar atividades que pudessem contribuir para a compreensão do conteúdo Integral Definida, relacionando conceitos, significados e procedimentos de cálculo, buscando motivar o aluno, incentivando o desenvolvimento de suas habilidades, tornando-o mais autônomo e confiante.

Quanto à propalada ideia de que os “alunos devem participar da construção do próprio conhecimento”, entende-se que, muitas vezes, o professor deve apresentar ao aluno determinada situação-problema e reservar um tempo para que esse aluno pense, reflita e tente solucioná-la, sozinho ou em grupo, sem a intervenção imediata do professor, como propõe Polya (2006).

Portanto, antes de iniciar o desenvolvimento do caderno de atividades com os alunos, todo o assunto necessário foi abordado, sendo que, após essa abordagem, os alunos iniciaram as atividades, individualmente ou em grupo, procurando o pesquisador orientá-los e corrigi-los sempre que necessário.

Dessa forma, o caderno de atividades (APÊNDICE A) possui questões relacionadas ao somatório, ao cálculo de áreas por aproximações finitas, por Limite de somas finitas, valor médio, Teorema Fundamental do Cálculo e aplicações,

exigindo, sempre que possível, a utilização de *softwares* como o GeoGebra e o VCN.

Porém, se perguntassem se há coisas que não foram feitas no decorrer da pesquisa, e que, hoje, com mais experiência, teria feito, responderia que sim, uma delas seriam as questões que envolvem aproximações finitas que tiveram o auxílio do *software* GeoGebra. Durante sua resolução, foi solicitado aos alunos que preenchessem a área utilizando retângulos e estes foram construídos no *software* quase que manualmente, sendo muito trabalhoso, já que o pesquisador não conhecia outra maneira de fazê-lo, até o dia em que, em um encontro do GRUPIMEM, participou de uma oficina sobre o GeoGebra, onde o professor mostrou como preencher uma área com retângulos de forma rápida e prática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa realizada teve como finalidade contribuir para uma aprendizagem mais significativa da Integral Definida, por meio de uma Pesquisa-Ação embasada em Fiorentini e Lorenzato (2006) e Barbier (2007), submetendo o desenvolvimento de atividades didáticas planejadas a um grupo de três alunos voluntários, do segundo período de um curso de engenharia de um Centro Universitário em Belo Horizonte.

A questão principal dessa pesquisa foi indagar “como um ambiente de estudo de Integral Definida, intencionalmente preparado para trabalhar conceitos, significados e procedimentos de cálculo, é vivenciado por um grupo de alunos de uma escola particular de engenharia?”.

A partir da temática em estudo, foram, então, elaborados três objetivos específicos, que foram alcançados:

- Implementamos um ambiente para estudo de Integral Definida, com textos de atividades didáticas e acesso a *softwares* matemáticos como o GeoGebra e o VCN, que permitissem o acompanhamento e a observação da ação de um grupo de alunos de engenharia.
- Utilizamos a teoria dos conteúdos de aprendizagem no desenvolvimento das atividades, para que os alunos adquirissem autonomia, participando da construção do próprio conhecimento.
- Produzimos um produto (Caderno de Atividades), que buscasse contribuir para o ensino e aprendizagem de Integral Definida, desenvolvendo o raciocínio e o entendimento do tema.

Esses objetivos foram trabalhados e alcançados no laboratório de informática dessa instituição, onde esses três alunos desenvolveram as 8 atividades do Caderno de Atividades, durante 28 horas/aula, distribuídas em 14 dias com 2 horas/aula cada.

Na elaboração desse Caderno de Atividades, nos apoiamos nas teorias de Zabala (1998) e Duval (2009) elaborando questões que levaram os alunos a observar, questionar e relacionar conceitos, significados e procedimentos de cálculo.

Alguns pesquisadores, como Fiorentini e Lorenzato (2006), já constataram que a maioria dos alunos tem dificuldades no estudo de Cálculo Diferencial e Integral. Segundo esta pesquisa realizada, sugere-se, então, introduzir, ainda no primeiro período, uma disciplina que trabalhasse conteúdos básicos de Matemática, para, então, no segundo período iniciar o Cálculo Diferencial, e somente no terceiro período trabalhar o Cálculo Integral, respeitando essa sequência. A maioria dos alunos que entra para o curso superior de Engenharia chega com grande defasagem em Matemática. A reprovação em Cálculo Diferencial é algo histórico, e contribui, de forma considerável, para a evasão nas instituições de Ensino Superior. Portanto, torna-se necessário que haja um cuidado maior com as disciplinas do ciclo básico dos cursos de Engenharia, pois estas contribuirão para que os alunos possam seguir em frente de forma mais autônoma e confiante.

A forte relação existente entre a aritmética, a álgebra e a geometria, nas aplicações geométricas da Integral Definida foi observada ao longo da pesquisa, no momento em que esta foi relacionada com o Limite de somas. Essa relação deve ser abordada pelo professor, em benefício do aprendizado do aluno, pois mostra o que está por trás do cálculo da Integral Definida.

Finalmente, o tratamento dos dados coletados foi feito a partir da análise dos acertos e equívocos dos alunos em paralelo com as categorias das teorias assumidas na pesquisa, sendo que a análise qualitativa dos resultados evidenciou a superação de dificuldades, a evolução do conhecimento e de habilidades dos alunos no desenvolvimento das atividades, os quais se mostraram mais independentes, e confiantes com relação à disciplina.

Tem-se que essa pesquisa não possui um fim em si mesma, mas, ao contrário, abre caminhos para novas formas de se pensar sobre o assunto, trazendo novos questionamentos, levantando novas hipóteses e outras pesquisas relacionadas ao tema.

REFERÊNCIAS

- BARBIER, Renée. **A pesquisa-ação**. Tradução de Lucie Didio. Brasília: Liber Livro Editora, 2007. (Série Pesquisa).
- BARON, Margareth E. & BOS, H.J.M. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Brasília: Editora UNB, 1985.
- BATISTA, Roberto Júnior. **Uma breve introdução à história do Cálculo Diferencial e Integral**. Curitiba: Colégio Militar de Curitiba, 2010.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994. (Coleção Ciências da Educação).
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed., São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares para os cursos de graduação em engenharia**. Brasília, 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12991
Acesso em: 12 ago. 2013.
- COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2000.
- COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Editora Atual, 1995.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**. São Paulo: Editora Livraria da física, 2009
- EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática** Campinas, S.P.: Editora Unicamp, 2004.
- FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas/SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).
- FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**. 6. ed. São Paulo: Editora Pearson, 2006
- GEOGEBRA. **Download**. Disponível em: www.geogebra.org/download. Acesso em: 10 ago. 2014.
- GEOGEBRA. Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro. **O que é o GeoGebra?** Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br>. Acesso em: 15 ago. 2013.
- IBGE. **Estado@**. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/estadosat/>. Acesso em: 29 out. 2014.

LUDKE, Menga & ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

PIAGET, Jean. **O estruturalismo**. 3. ed. São Paulo: Difel, 1979 (1968).

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PUC MINAS. **Laboratório de Cálculo Numérico**. Disponível em: www.matematica.pucminas.br/lcn/vcn1.htm. Acesso em: 12 ago. 2014.

SANTOS FILHO, José Alípio. **Um caminho para uma maior compreensão do Cálculo Integral e Diferencial: um pouco de história**. 2002. 131f. Monografia (Especialista em Educação Matemática) - Centro Universitário UNI-BH, Belo Horizonte, 2002.

SHINYASHIKI, Roberto. **Problemas? Oba!** A revolução para você vencer no mundo dos negócios. São Paulo: Editora Gente, 2011.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Pioneira-Thomson Learning, 2014.

STOCHIERO, Arnaldo. **Iniciação ao Cálculo Integral**. Belo Horizonte: CEFET – MG, 1992.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

VYGOTSKY, L.S. **Formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed Editora, 1998.

APÊNDICE A



PUC Minas

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática



CADERNO DE ATIVIDADES

INTEGRAL DEFINIDA

conteúdos de ensino e
estratégias de aprendizagem

Thiago Linhares Brant Reis

Orientador: Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda

2015

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| APRESENTAÇÃO | 171 |
| 1. O CÁLCULO NA HISTÓRIA..... | 175 |
| 2. INTEGRAL DEFINIDA, CONCEITOS E VISUALIZAÇÕES GEOMÉTRICAS ... | 180 |
| 2.1 A notação sigma..... | 180 |
| 2.2 Estimando com somas finitas..... | 183 |
| 2.2.1 Área..... | 183 |
| 2.2.2 Valor Médio | 191 |
| 2.2.3 Comprimento do arco de uma curva plana | 193 |
| 2.2.4 Volume de um sólido de revolução | 198 |
| 2.3 Limites de somas finitas..... | 202 |
| 2.4 O Limite de somas visto como uma Integral Definida | 212 |
| 2.5 Teorema do Valor Médio..... | 214 |
| 2.6 Teorema Fundamental do Cálculo | 217 |
| 3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ATIVIDADES | 227 |
| ATIVIDADE 1: Aproximações finitas | 227 |
| ATIVIDADE 2: Somatório | 229 |
| ATIVIDADE 3: Limite de Somas Finitas | 230 |
| ATIVIDADE 4: Teorema Fundamental do Cálculo..... | 231 |
| ATIVIDADE 5: O Limite de Somas definido como uma Integral Definida..... | 233 |
| ATIVIDADE 6: Desenvolvendo habilidades para o cálculo de área | 236 |
| ATIVIDADE 7: O uso do VCN para o cálculo da Integral Definida..... | 237 |
| ATIVIDADE 8: Experimentando objetos quaisquer com lápis, borracha, régua, calculadora, GeoGebra e o VCN | 238 |
| REFERÊNCIAS..... | 240 |

APRESENTAÇÃO

Este produto é o resultado de uma pesquisa realizada no curso de Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática da PUC Minas.

Essas atividades foram criadas a fim de desenvolver uma sequência didática para facilitar a compreensão no estudo da Integral Definida aplicada ao cálculo de área, volume e comprimento de curvas. Além disso, buscamos criar atividades que permitissem ao aluno, perceber o que está por trás da Integral Definida.

Segundo Zabala (1998, p. 63), na sequência didática devem existir atividades:

- a) que nos permitam determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem;
- b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam significativos e funcionais para os alunos;
- c) que possamos inferir se são adequadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno;
- d) que representem um desafio alcançável para o aluno, com a ajuda necessária, de modo que permitam o desenvolvimento de cada um;
- e) que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do aluno;
- f) que promovam uma atitude favorável, ou seja, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos;
- g) que estimulem a autoestima e o autoconceito em relação às aprendizagens que se propõem, ou seja, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que o esforço valeu a pena;
- h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender;
- i) que lhe permita ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens.

A pesquisa realizada que embasou a construção deste Caderno de Atividades teve como finalidade contribuir para uma aprendizagem mais significativa da Integral Definida, por meio de uma Pesquisa-Ação embasada em Fiorentini e Lorenzato (2006) e Barbier (2007), submetendo o desenvolvimento de atividades didáticas

planejadas a um grupo de três alunos voluntários, do segundo período de um curso de engenharia de um Centro Universitário em Belo Horizonte.

A partir da temática em estudo, foram, então, elaborados três objetivos específicos, que foram alcançados:

- Implementamos um ambiente para o estudo de Integral Definida, com textos de atividades didáticas e acesso a *softwares* matemáticos como o GeoGebra e o VCN, que permitissem o acompanhamento e a observação da ação de um grupo de alunos de engenharia.
- Utilizamos a teoria dos conteúdos de aprendizagem no desenvolvimento das atividades, para que os alunos adquirissem autonomia, participando da construção do próprio conhecimento.
- Produzimos um produto (Caderno de Atividades), que buscasse contribuir para o ensino e aprendizagem de Integral Definida, desenvolvendo o raciocínio e o entendimento do tema.

Ressalta-se que a forte relação existente entre a aritmética, a álgebra e a geometria, nas aplicações geométricas da Integral Definida foi observada ao longo da pesquisa, no momento em que esta foi relacionada com o Limite de somas. Portanto, essa relação deve ser abordada pelo professor, em benefício do aprendizado do aluno, pois mostra o que está por trás do cálculo da Integral Definida.

Na elaboração deste Caderno de Atividades, nos apoiamos nas teorias de Zabala (1998) e Duval (2009) elaborando questões que levaram os alunos a observar, questionar e relacionar conceitos, significados e procedimentos de cálculo.

Portanto, as atividades foram organizadas e apresentadas de acordo com o material utilizado. Torna-se importante salientar que o caderno apresenta sugestões de atividades e o professor poderá, conhecendo a realidade dos seus alunos, realizar as devidas alterações adaptando-as para suas aulas. Tratam-se de 8 atividades a serem trabalhadas, descritas conforme quadro a seguir:

Quadro 1 – Orientações Metodológicas das Atividades

| ATIVIDADE | DURAÇÃO | OBJETIVOS GERAIS | METODOLOGIAS |
|---|----------|---|---|
| Atividade 1: Aproximações finitas (2 Questões) | 2 h/aula | Estimar medidas de áreas, volumes e comprimentos de arcos. | Utilizar as aproximações finitas, o <i>software</i> GeoGebra e o cálculo manual. |
| Atividade 2: Somatório (3 Questões) | 2 h/aula | Lidar com o símbolo Somatório. | Utilizar a definição e as propriedades do Somatório e o cálculo manual. |
| Atividade 3: Limite de somas finitas (3 Questões) | 4 h/aula | Avaliar Limites de somas e aplicar em cálculo de área e volume. | Utilizar propriedades dos Limites, do Somatório e o cálculo manual. |
| Atividade 4: Teorema Fundamental do Cálculo (3 Questões) | 4 h/aula | Entender o Teorema Fundamental do Cálculo e aplicá-lo em cálculos de medidas geométricas. | Utilizar a notação de Integral e o cálculo manual. |
| Atividade 5: O Limite de somas definido como uma Integral Definida (5 Questões) | 4 h/aula | Explorar a Integral Definida como Limite de somas. | Utilizar a relação entre a álgebra e a geometria (equações e gráficos) através do cálculo manual. |
| Atividade 6: Desenvolvendo habilidades para o cálculo de área. (1 Questão) | 2 h/aula | Explorar diferentes modelos para estimar medidas geométricas. | Utilizar conceitos para a montagem dos modelos, o cálculo manual, o GeoGebra e o VCN. |
| Atividade 7: O uso do VCN e do GeoGebra para o cálculo da Integral Definida (2 Questões) | 2 h/aula | Desenvolver habilidades para o cálculo de Integrais Definidas. | Utilizar conceitos para a montagem dos modelos, o cálculo manual, o GeoGebra e o VCN. |
| Atividade 8: Experimentando diferentes mídias e modelos (6 Questões) | 8 h/aula | Representar matematicamente modelos físicos e avaliar suas medidas. | Utilizar conceitos, fórmulas, o cálculo manual, o GeoGebra e o VCN. |

Fonte: Dados da pesquisa.

Este caderno de atividades apresenta a seguinte organização:

- Na primeira parte, teórica, apresentam-se dois capítulos, sendo um deles contendo um breve histórico sobre o tema, e o segundo com explicações teóricas que servirão como auxílio sob a forma de leitura

extra-aula para os alunos ou, ainda, como maneira para se introduzir o assunto para os alunos antes da execução das atividades.

- Na segunda parte o capítulo 3, com os Roteiros de Atividades propriamente ditos.
- Finalizando, as referências bibliográficas para a construção deste produto, a fim de que possa auxiliar o direcionamento de possíveis leituras para o professor e, porque não dizer, também para o aluno que demonstre interesse pelo assunto.

Bom trabalho!

1. O CÁLCULO NA HISTÓRIA

Segundo Santos Filho (2002), as origens do Cálculo remontam à Grécia antiga, sendo os seus precursores Eudoxo de Cnido (390-338 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). Eudoxo, discípulo de Platão (427-428 a.C.) - fundador da Academia em Atenas, a mais importante da Grécia – foi considerado o maior matemático do seu tempo e desenvolveu o Método da Exaustão, uma base para o Cálculo Integral. Arquimedes desenvolveu métodos para determinar áreas de regiões limitadas por curvas e volumes de regiões limitadas por superfícies, utilizando, muitas vezes, o Método da Exaustão. Aos problemas de Cálculo de áreas de figuras planas, os matemáticos antigos se referiam como “quadratura”, sendo famoso o problema da quadratura do círculo, que nada mais é do que a determinação de um quadrado com a área equivalente à área de um determinado círculo.

Muitos outros matemáticos trabalharam com o Cálculo, alguns tentando provar a sua consistência lógica, outros utilizando o seu poder operacional, sem se preocupar com as questões filosóficas da sua origem.

O francês Pierre de Fermat (1601-1665) abordou a quadratura de hipérboles infinitas usando um conjunto de retângulos inscritos cujas áreas relacionavam-se como termos de uma Progressão Geométrica. Assim como Fermat, o francês René Descartes (1596-1650) também estava interessado na introdução dos métodos algébricos na geometria, com o objetivo de tornar as soluções independentes das propriedades das curvas, possibilitando, assim, a generalização das soluções. Ambos também fizeram estudos sobre tangentes, utilizando métodos algébricos.

Durante a primeira metade do século XVII, utilizando-se de um método ou outro, os matemáticos já tinham solução, tanto para determinação das tangentes, quanto para a quadratura de curvas do tipo $y = x^n$ (sendo n inteiro e positivo). O matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) conseguiu relacionar tangentes e quadraturas diretamente, através do conceito de movimento, generalizando e estendendo ideias já desenvolvidas por Galileu, do qual foi aluno, e do italiano Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), seu amigo e sócio. No caso desta curva do movimento, em particular, Torricelli compreendia a relação inversa entre a tangente e a quadratura, porém, não publicou seus trabalhos a respeito do assunto,

enquanto estava vivo. Suas ideias foram transmitidas por intermédio do seu discípulo italiano Stefano degli Angeli (1623-1697) aos matemáticos ingleses Isaac Barrow (1630-1677) e James Gregory (1638-1675).

Em um trabalho denominado *Geometriae pars universalis* (A parte universal da Geometria), de 1668, Gregory faz uma exposição contendo operações para determinação de arcos, tangentes, áreas e volumes que estariam vinculados a um trabalho de Cálculo infinitesimal. Esta obra mostra que ele já tinha compreensão da relação inversa entre tangente e quadratura, pois em determinada proposição ao longo do trabalho, ele passa diretamente da quadratura de uma curva à construção da tangente. Barrow, que foi professor de Newton, foi um pouco além, e no seu *Lectiones Geometriae*, de 1670, apresenta o que se conhece como Teorema Fundamental do Cálculo, através da inversibilidade entre uma quadratura e uma tangente.

Ainda no século XVII, com a divulgação dos trabalhos do inglês Isaac Newton (1642-1727) e do alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ocorreu uma significativa mudança na Ciência. Tão significativa que, tradicionalmente, a origem do Cálculo é atribuída a eles. Entretanto, entre a Grécia antiga e o final do século XVII, muita Matemática foi desenvolvida na busca do entendimento dos problemas das quadraturas e das tangentes, o que possibilitou aos dois grandes matemáticos realizarem esta invenção.

Assim, diante do exposto, pode-se, então, resumir o cenário da época em que Newton e Leibniz desenvolviam os seus métodos para o Cálculo:

- o modelo de Arquimedes, embora prestigiado, era pouco usado devido à dificuldade de aplicação prática;
- a representação algébrica conquistava espaço rapidamente;
- a notação de Descartes se propagava rapidamente;
- a pesquisa de métodos gerais com possibilidade de aplicação em todas as curvas ganhava espaço em relação aos métodos utilizados para curvas específicas;
- a quadratura se tornou reconhecida como modelo geométrico para todos os métodos de integração (cubatura, retificação de arcos etc.);
- a relação entre os métodos de construção das tangentes e a determinação dos pontos extremos já estava estabelecida;
- a relação inversa entre integração (quadratura) e diferenciação (determinação das tangentes) já havia sido tratada por muitos matemáticos, tais

como Torricelli, Gregory e Barrow, sendo que Barrow publicou uma demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, em 1670;

- a ideia da descrição de curvas por meio da análise de movimentos havia sido usada para determinar tangentes, quadraturas e para relacionar uma com a outra;

- para a quadratura de curvas algébricas, já havia uma regra específica do

tipo: $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$, onde p é um número racional diferente de -1 ;

- interesses crescentes em métodos de tangentes, principalmente com Fermat e Descartes, levaram Frans Van Schooten (1615-1660) a idealizar um algoritmo, ou seja, um conjunto de regras para a passagem do problema na forma da equação de uma curva para a solução final, que seria a construção da tangente; e

- havia um grande interesse na possibilidade de expansão em séries como meios de integração, estimulado principalmente por John Wallis (1616-1703).

A partir da análise do cenário em que se encontrava o estudo do Cálculo, por volta de 1663, coube a Newton estender para todas as curvas e unificar os vários processos e foi Leibniz quem os relacionou através de uma notação eficaz e operacional, ressaltando que ambos o fizeram sem que um conhecesse o trabalho do outro, porém, uma grande polêmica se estabeleceu entre ambos para provar de quem seria a primazia da invenção. Essa polêmica retardou o desenvolvimento da Matemática inglesa em um século, pois a notação de Leibniz que era muito mais flexível e, portanto, mais útil para o desenvolvimento do Cálculo, foi adotada no continente a começar pelos franceses e rejeitada pelos ingleses.

O fato é que Leibniz iniciou seus estudos de Cálculo infinitesimal em 1675 e os publicou no periódico *Acta Eruditorum*, em 1684 (revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782), enquanto Newton só publicou algo relativo ao Cálculo três anos mais tarde, no seu *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), onde, em algumas passagens, o Cálculo era abordado, estando, porém, na forma geométrica. Já o tratado *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (O método das fluxões e séries infinitas) foi a mais extensa exposição do seu Cálculo, sendo escrita em 1671, sendo publicado em 1736. Hoje parece bastante claro que a descoberta de Newton antecede a de Leibniz em cerca

de 10 anos, e que os trabalhos de Leibniz foram feitos independentemente dos trabalhos de Newton, apesar de Leibniz ter publicado seus trabalhos primeiro.

Para Newton, as quantidades que considerava perceptíveis, porém indefinidamente crescentes, são consideradas fluentes e as velocidades com que elas fluem são consideradas fluxões. Já Leibniz baseou suas descobertas em algumas ideias que se revelaram especialmente importantes, a saber: a busca de um simbolismo e de uma notação, vinculados à sua ideia de uma linguagem simbólica geral, uma vez que ele não estava interessado em resultados especiais, mas em métodos tão gerais quanto possível. Reconheceu, também, que a determinação das tangentes e o cálculo de áreas são processos inversos.

Um dos conceitos básicos do Cálculo de Leibniz é o da Diferencial, onde dy é a diferencial de uma variável y , ou seja, a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de y , e dx é a diferencial de uma variável x , ou seja, a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de x . E foi Leibniz quem criou o atual símbolo da Integral, representando um S , a inicial da palavra Suma, que significa Soma.

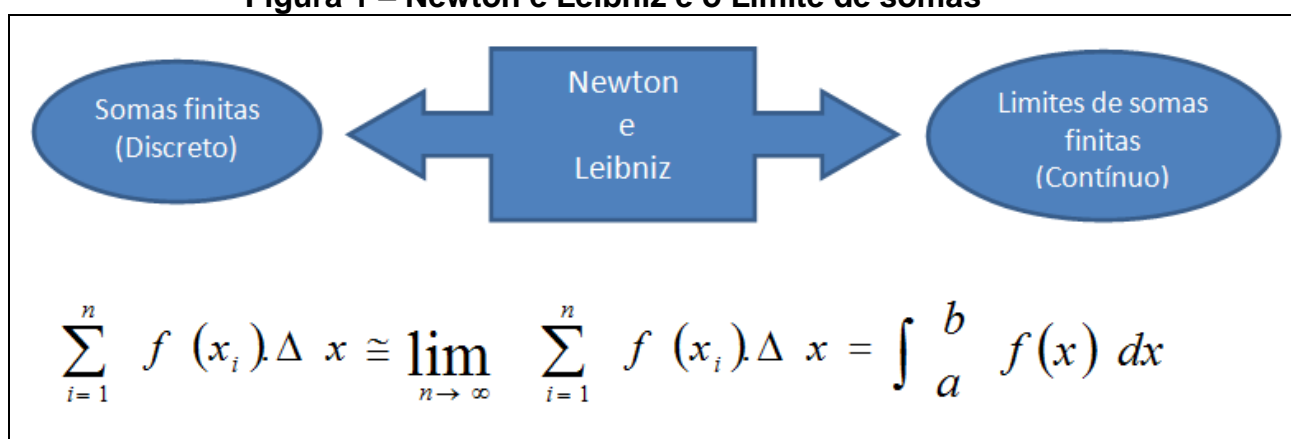
Leibniz não publicou suas descobertas imediatamente, apenas nove anos depois, em outubro de 1684, no *Acta eruditorum Lipsiensium* (Atas dos eruditos de Leipzig, o primeiro periódico científico da Alemanha, fundado em 1682), um artigo intitulado “Um novo método para máximos e mínimos assim como para tangentes não impedido por quantidades nem fracionais nem irracionais e um importante tipo de cálculo para elas”. Também com Leibniz ficou estabelecida claramente a ideia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas. O seu simbolismo algébrico se mostrou muito mais eficiente que o de Newton, sendo até hoje adotado universalmente.

De um modo geral, os livros de Cálculo tratam Newton e Leibniz como os inventores do Cálculo, mas entende-se que ao tempo deles já havia muitas contribuições ao seu desenvolvimento, feitas por grandes matemáticos. Newton e Leibniz, na verdade, não inventaram o Cálculo, mas fizeram algo diferente, fizeram algo maior que seus antecessores, ou, como Newton mesmo disse, em 1676: “Se consegui enxergar mais longe foi porque estava apoiado sobre os ombros de gigantes”.

Porém, mesmo diante do que foi exposto, entende-se que, no final das contas, Newton e Leibniz receberam o mérito de serem os inventores do Cálculo, pois:

- os vários métodos infinitesimais dos seus antecessores eram muito restritos a determinadas curvas;
- ambos criaram um sistema coerente de métodos a fim de resolver problemas sobre todos os tipos de curvas (quadraturas, tangentes etc.), independentes de suas naturezas;
- o Teorema Fundamental do Cálculo foi reconhecido universalmente a partir deles, mas Barrow já o havia demonstrado. Esse é o teorema que trata da relação inversa entre a diferenciação e a integração. Através deste Teorema reconheceu-se o relacionamento recíproco entre os problemas de quadraturas e das tangentes;
- ambos criaram um sistema de notação e de símbolos pelo qual podiam aplicar analiticamente os seus novos métodos, na forma de um algoritmo claro e simples, dando origem ao formulário do Cálculo Integral e Diferencial;
- acrescentaram às somas por aproximações finitas, noções de limite, aperfeiçoando a técnica, tornando-a mais precisa e rápida;
- se promoviam melhor que seus antecessores.

Figura 1 – Newton e Leibniz e o Limite de somas



Fonte: Elaborado pelo autor

2. INTEGRAL DEFINIDA, CONCEITOS E VISUALIZAÇÕES GEOMÉTRICAS

Um dos grandes avanços da geometria clássica foi obter fórmulas para determinar área de figuras planas como triângulos e círculos, volume de sólidos de revolução, como cilindros, cones e esferas, assim como determinar o comprimento de curvas.

Neste trabalho serão apresentadas algumas maneiras de se calcular área, valor médio, comprimento de arco e volume, de figuras nem sempre conhecidas, tendo, como ferramentas, a notação sigma, a estimação por somas finitas, Limites de somas finitas, Limite de somas finitas visto como uma Integral Definida, e, por fim, o Teorema Fundamental do Cálculo.

2.1 A notação sigma

Segundo Stochiero (1992),

Desde os tempos imemoriais, quando o homem deparou-se com as primeiras necessidades de contar, tem sido incessante a busca de técnicas e processos que lhe favorecessem os cálculos. Se nos primeiros ensaios houve a utilização dos dedos das mãos ou de pequenos fragmentos de pedra lascada, com o passar dos séculos tais recursos revelaram-se ineficazes. (STOCHIERO, 1992, p.39).

Posteriormente, os egípcios, os babilônios, os gregos e os romanos desenvolveram técnicas mais aprimoradas de contagem. Porém, somente a partir do século IX, através de Al-Karismi, surgiu o sistema de numeração posicional dotado de apenas dez algarismos, contribuindo decisivamente para o avanço da Matemática nos séculos subsequentes. (STOCHIERO, 1992).

Tal qual esse desafio histórico, o estudioso das ciências matemáticas deve trazer dentro de si o cuidado de sempre utilizar uma simbologia simples e adequada que represente, de forma sucinta e inequívoca, as operações que deseja realizar. Assim, se quiser determinar a soma dos 100 primeiros números naturais,

$1+2+3+\dots+100$, usa-se a notação: $\sum_{i=1}^{100} i$

Sendo:

Σ : letra **sigma** maiúscula, do alfabeto grego, correspondente à nossa letra S, de soma. Nas operações matemáticas, tal símbolo recebe a denominação específica de **somatório**;

i : índice da soma, representando onde começa e onde termina a soma.

Assume valores inteiros;

1: limite inferior da soma;

100: limite superior da soma.

Exemplos:

- $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$

- $\sum_{j=1}^5 (j+2) = (1+2) + (2+2) + (3+2) + (4+2) + (5+2) = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

- $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$

- $\sum_{i=3}^6 \frac{1}{i+1} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{5+1} + \frac{1}{6+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

- $\sum_{i=1}^n f(i) = f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n)$

Tem-se, como propriedades do somatório, portanto, segundo Stochiero (1992):

v) $\sum_{i=1}^n k = k.n$, sendo k uma constante dada.

vi) $\sum_{i=1}^n k.f(i) = k.\sum_{i=1}^n f(i)$

vii) $\sum_{i=1}^n [f(i) + g(i)] = \sum_{i=1}^n f(i) + \sum_{i=1}^n g(i)$

$$\text{viii)} \sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0) \text{ (STOCHIERO, 1992, p.41).}$$

Além disso, o Cálculo Somatório apresenta algumas igualdades notáveis de grande utilidade, entre as quais podem ser citadas como mais utilizadas:

A soma dos primeiros n inteiros positivos:

A história (STOCHIERO, 1992) diz que Gauss, orientador de Riemann, a descobriu por volta dos 8 anos de idade:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

A soma dos quadrados dos primeiros n inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exemplo 1: Calcular o somatório em cada caso abaixo:

$$\text{d)} \sum_{i=1}^3 7 = 7 \cdot 3 = 21$$

$$\text{e)} \sum_{i=1}^3 7i = 7 \cdot \sum_{i=1}^3 i = 7 \cdot (1 + 2 + 3) = 7 \cdot 6 = 42$$

$$\text{f)} \sum_{i=1}^3 (2i - 5) = \sum_{i=1}^3 2i - \sum_{i=1}^3 5 = 2 \cdot \sum_{i=1}^3 i - 5 \cdot 3 = 2 \cdot (1 + 2 + 3) - 15 = 2 \cdot 6 - 15 = -3$$

Exemplo 2: Calcular a soma dos 100 primeiros números naturais:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = 5050.$$

Exemplo 3: Calcular a soma dos quadrados dos 100 primeiros números naturais:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{100 \cdot (100+1) \cdot (2 \cdot 100 + 1)}{6} = 338350. \text{ (STOCHIERO, 1992,}$$

p.44).

2.2 Estimando com somas finitas

A ideia básica da integração é que muitas quantidades podem ser calculadas quando divididas em pedaços menores e, então, soma-se a contribuição de cada parte. Essas somas finitas representam a base da definição da integração, podendo ser utilizadas em várias aplicações, como áreas, volumes e comprimentos de curvas.

2.2.1 Área

Segundo Thomas, Weir e Hass (2009), embora não se tenha ainda uma fórmula geométrica simples para calcular a área de formas com contorno curvo, como a região R , é possível aproximá-la de um modo simples, utilizando retângulos para preencher a área. Assim, quanto maior for a quantidade de retângulos utilizados para preencher a mesma área, menor será o Δx , e, conseqüentemente, maior será a precisão da aproximação.

O cálculo da área, portanto, pode ser realizado através da soma das áreas dos retângulos, pela fórmula:

$$S_n = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n$$

Logo, a medida da área é dada por: $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ ou $S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$,

Onde:

Δx_i é a medida da base do retângulo ou o comprimento do intervalo $[x_i - x_{i-1}]$;

c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_i - x_{i-1}]$;

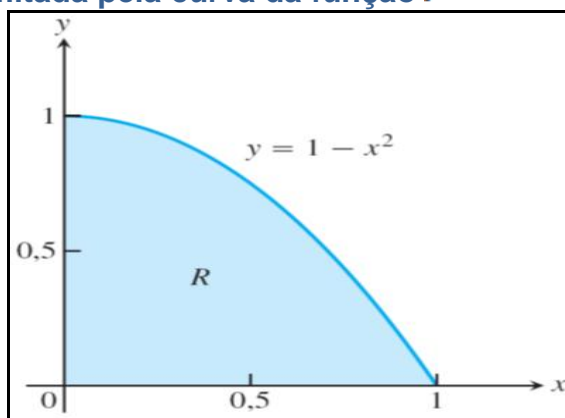
$f(c_i)$ é a imagem de c_i , ou melhor, a medida da altura do retângulo;

$f(c_i) \cdot \Delta x_i$ é o produto que dá a área do retângulo.

S_n é a soma das áreas dos n retângulos.

Observe que para se calcular a medida da área da figura 1, serão utilizados alguns retângulos, como será visto adiante.

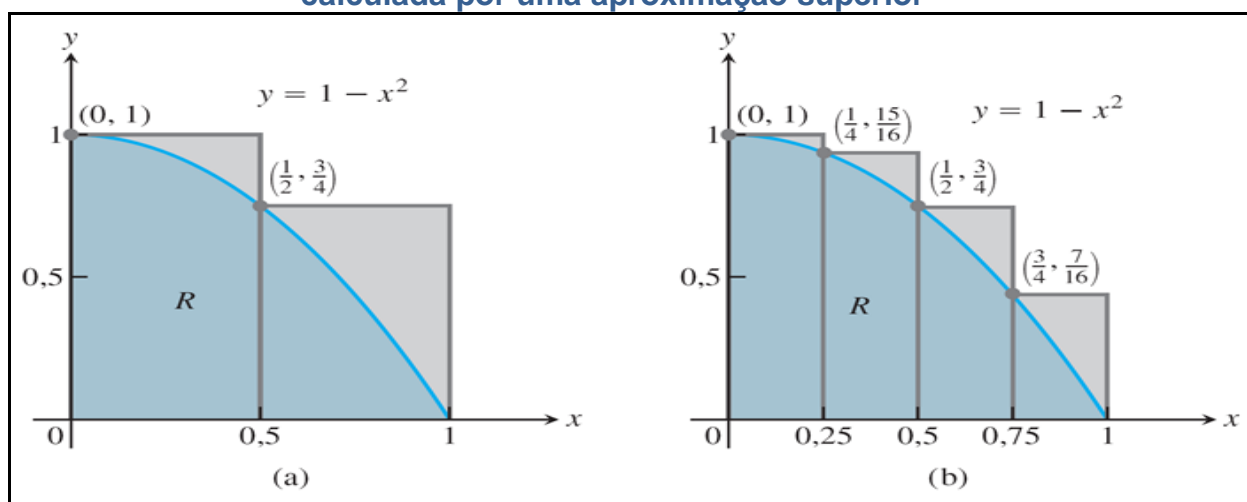
Figura 2 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p.354.

Como mostrado na figura 3, nota-se que em (a), foram utilizados dois retângulos. Somando essas áreas, obtém-se 0,875 u.a., uma aproximação superior à área da região R. Já em (b), foram utilizados quatro retângulos. Somando essas áreas obtém-se 0,78125 u.a., uma aproximação superior, porém, melhor.

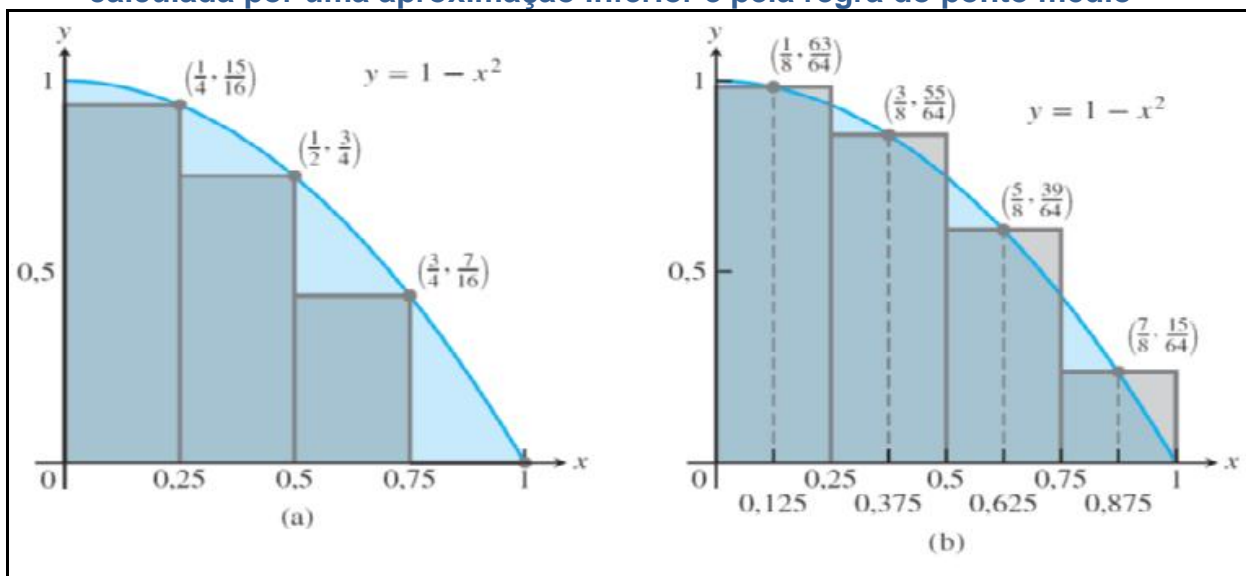
Figura 2 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação superior



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p.355.

Já na figura 4, em (a), foram usados três retângulos. Somando essas áreas, obtemos 0,53125 u.a., uma aproximação inferior à área da região R. Em (b), foi utilizado o ponto médio x de cada base de retângulo para determinar a altura $y=f(x)$. Somando essas áreas, obtém-se 0,671875 u.a. Essa é a regra do ponto médio, que entre as formas utilizadas, é a que melhor se aproxima de R.

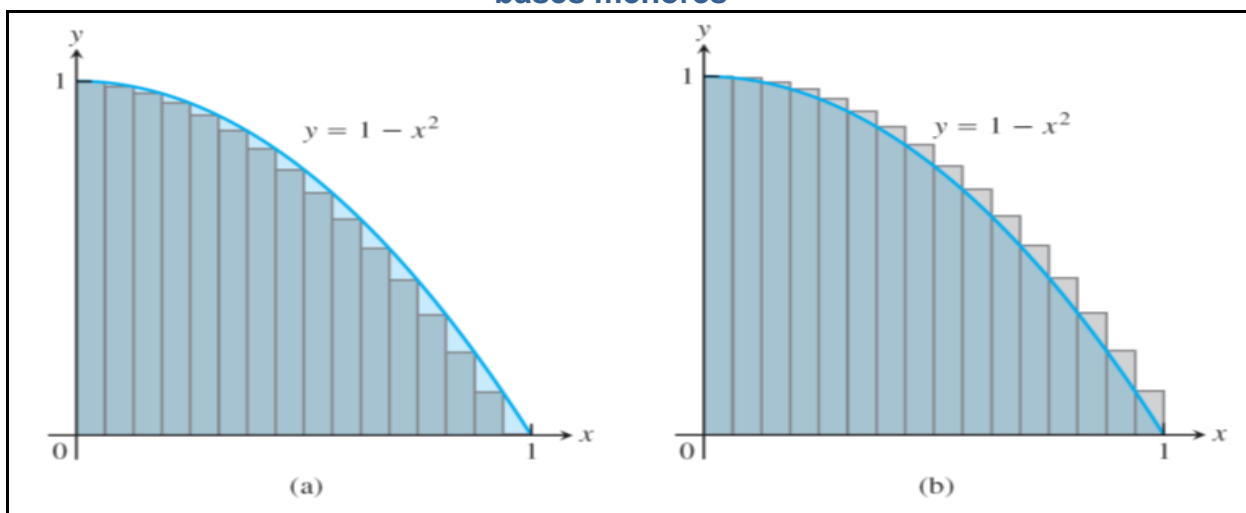
Figura 4 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação inferior e pela regra do ponto médio



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 356.

Vale a pena, portanto, observar que quanto menores forem as medidas das bases desses retângulos (Δx), mais subintervalos serão obtidos e, portanto, mais próximos da área real se estará, como indicado na figura 5:

Figura 5 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação inferior e por uma aproximação superior, com bases menores



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 357.

Como visto, em (a), foram utilizados dezesseis retângulos inscritos. Somando essas áreas, obtém-se 0,634765625 u.a., uma aproximação inferior à área da região R. Já em (b), também foram utilizados dezesseis retângulos circunscritos. Somando essas áreas, obtém-se 0,697265625 u.a., uma aproximação superior. A regra do

ponto médio para esses 16 retângulos semi-inscritos dá uma aproximação da área total no valor de 0,6669921875, ou seja, bem próxima da área real. Eis as aproximações finitas da área de R (TABELA 1):

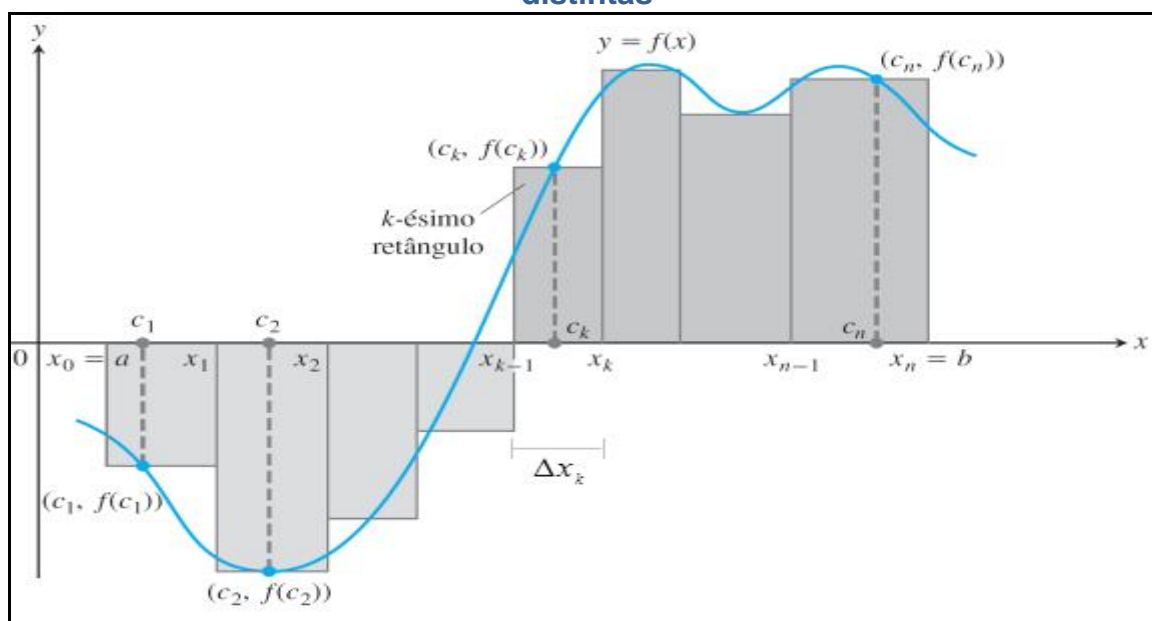
Tabela 1 - Área limitada pela curva da função $y = 1 - x^2$, no intervalo $[0,1]$, calculada por uma aproximação inferior, pela regra do ponto médio e por uma aproximação superior, com número de subintervalos distintos

| Número de subintervalos | Soma inferior | Regra do ponto médio | Soma superior |
|--------------------------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|
| 2 | ,375 | ,6875 | ,875 |
| 4 | ,53125 | ,671875 | ,78125 |
| 16 | ,634765625 | ,6669921875 | ,697265625 |
| 50 | ,6566 | ,6667 | ,6766 |
| 100 | ,66165 | ,666675 | ,67165 |
| 1.000 | ,6661665 | ,66666675 | ,6671665 |

Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p.357.

Na figura 6, observa-se que os retângulos aproximam a região que fica entre a curva da função $f(x)$ e o eixo x . Nesse caso, os n subintervalos têm larguras diferentes.

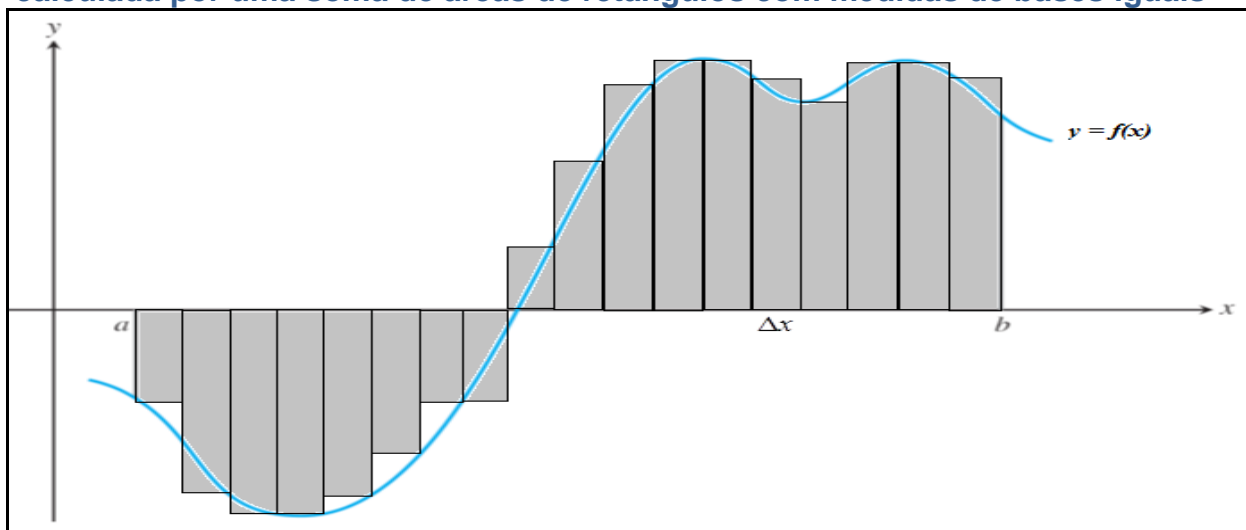
Figura 6 - Área limitada pela curva da função $y = f(x)$, no intervalo $[a,b]$, calculada por uma soma de áreas de retângulos com medidas de bases distintas



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 371.

Já na figura 7, os n subintervalos têm a mesma largura, que pode ser calculada por $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde Δx é a largura dos mesmos.

Figura 7 - Área limitada pela curva da função $y = f(x)$, no intervalo $[a,b]$, calculada por uma soma de áreas de retângulos com medidas de bases iguais



Fonte: Adaptada de Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 370.

Exemplo:

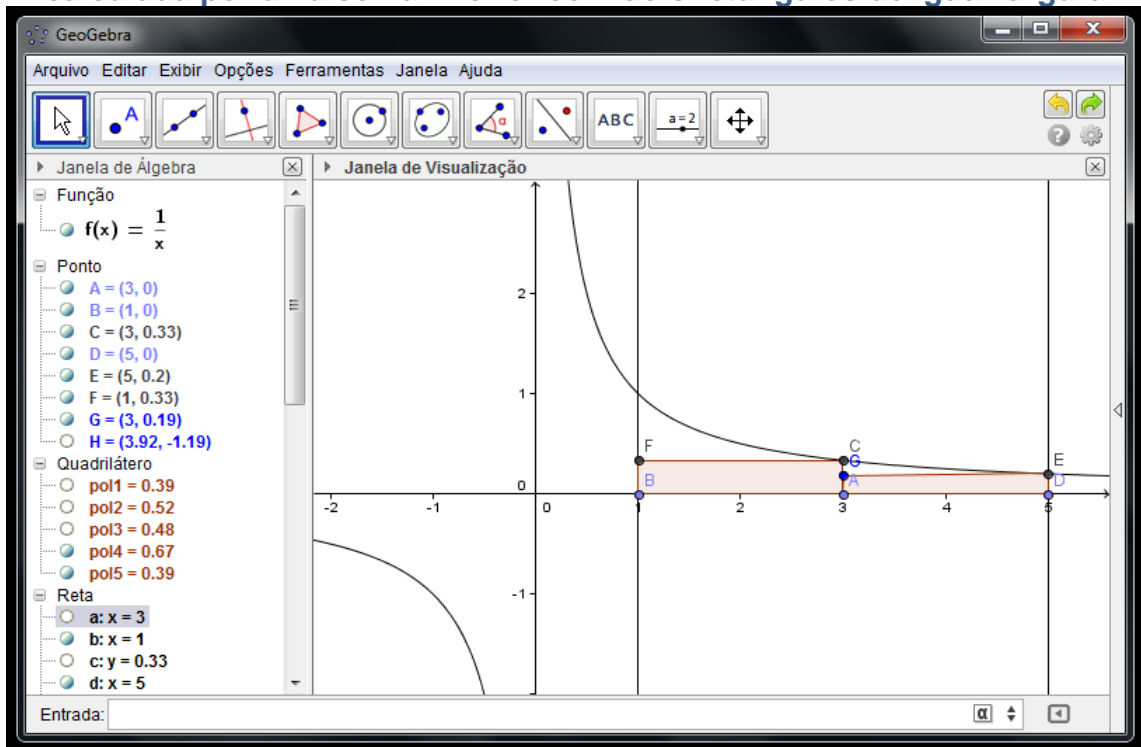
Através das aproximações finitas, estimar a área sob a curva da função

$f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x=1$ e $x=5$ utilizando:

Uma soma inferior com dois retângulos de iguais larguras.

Tendo, como base o trabalho com o *software* GeoGebra, tem-se, então, a figura 8, a seguir:

Figura 8 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por uma soma inferior com dois retângulos de igual largura

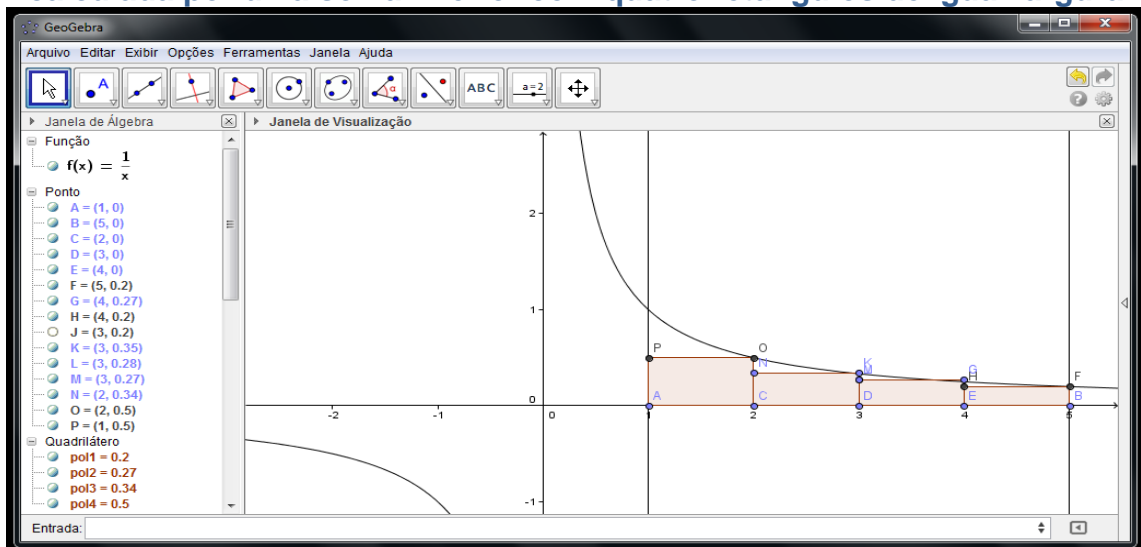


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

No trabalho com o *software* GeoGebra, tem-se, então, como medida da soma das áreas dos retângulos: $0,67+0,39 = 1,06$ u.a.

Uma soma inferior com quatro retângulos de iguais larguras.

Figura 9 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por uma soma inferior com quatro retângulos de igual largura

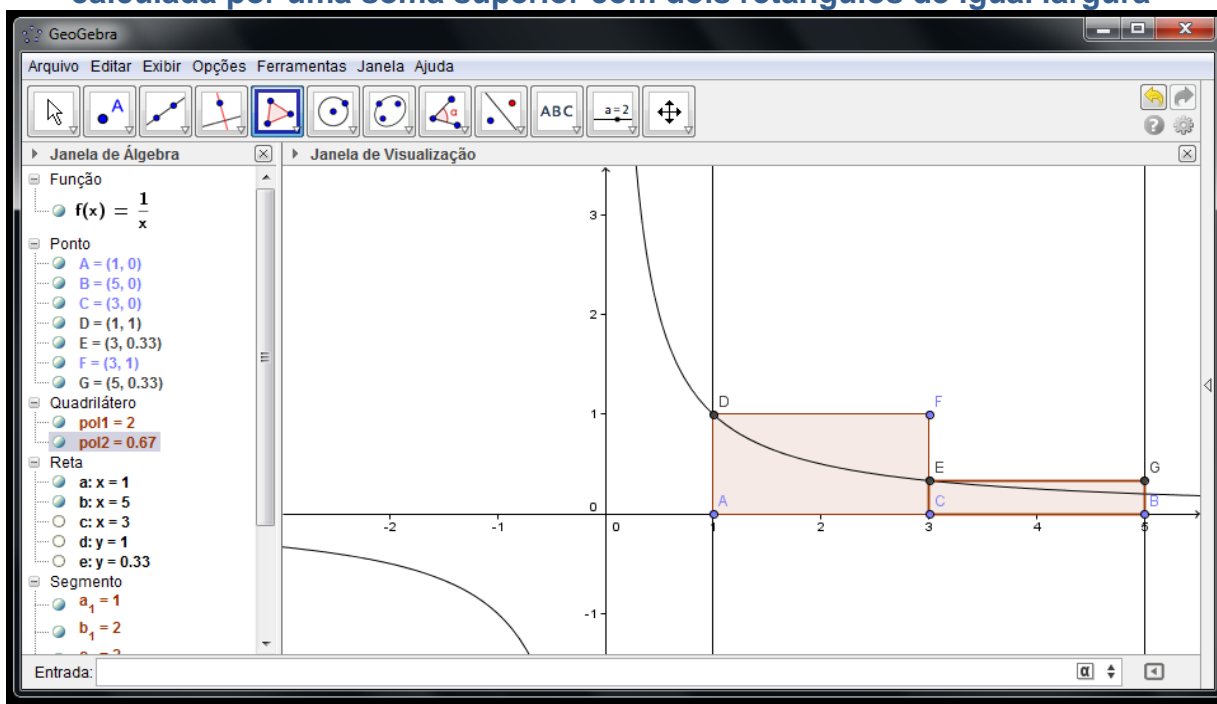


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Como se pode notar, pela figura 9, tem-se, como área = $0,2+0,27+0,34+0,5 = 1,31$ u.a.

Uma soma superior com dois retângulos de iguais larguras.

Figura 10 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por uma soma superior com dois retângulos de igual largura

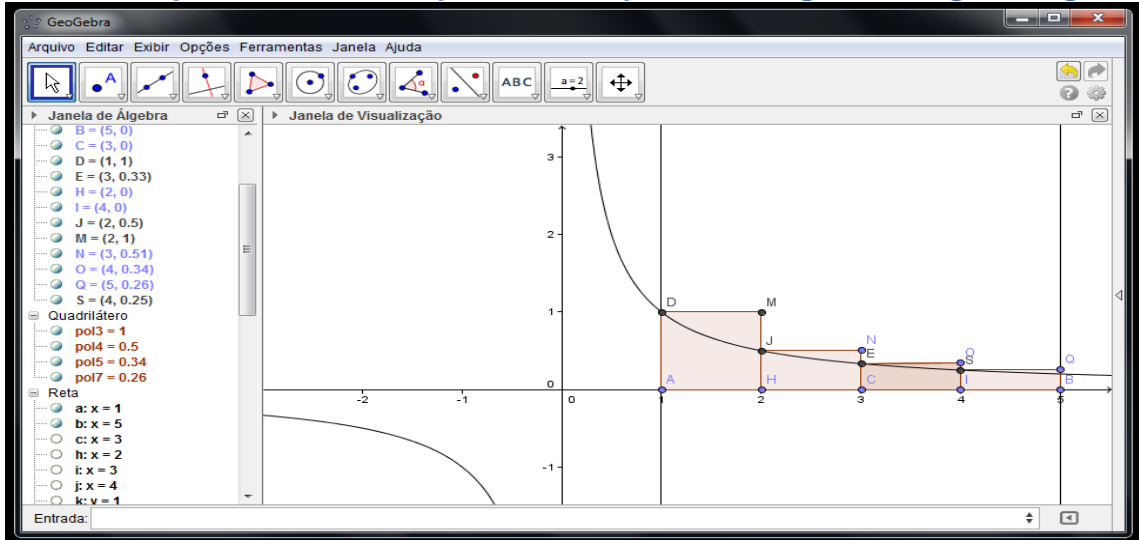


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Como pode ser notado na figura 10, o valor da área limitada foi de $2 + 0,67 = 2,67$ u.a.

Uma soma superior com quatro retângulos de iguais larguras.

Figura 11 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por uma soma superior com quatro retângulos de igual largura

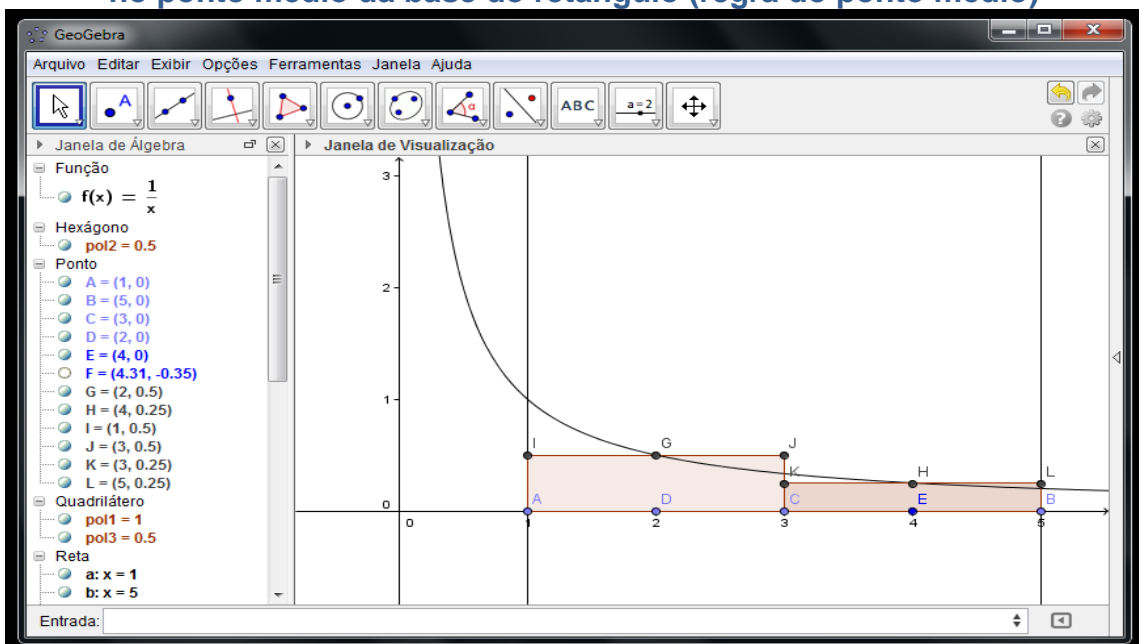


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Portanto, a área encontrada foi de $1 + 0,5 + 0,34 + 0,26 = 2,1$ u.a.

Dois retângulos cujas alturas sejam dadas pela imagem da função no ponto médio da base do retângulo (regra do ponto médio).

Figura 12 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por dois retângulos cujas alturas são dadas pela imagem da função no ponto médio da base do retângulo (regra do ponto médio)

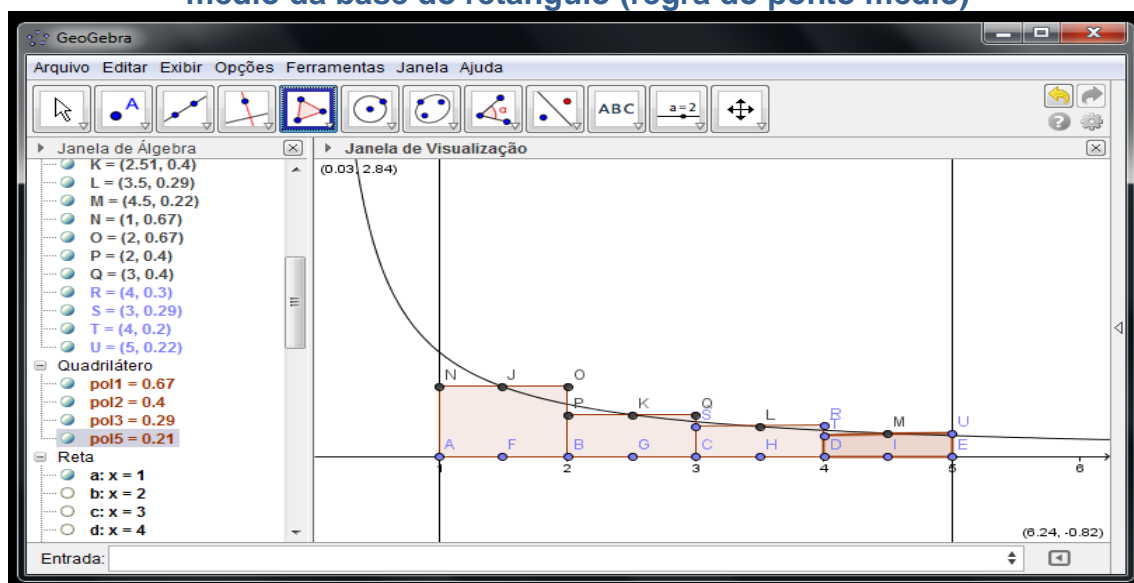


Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

A área calculada pelo *software* dos retângulos foi de $1 + 0,5 = 1,5$ u.a.

Quatro retângulos cujas alturas sejam dadas pela imagem da função no ponto médio da base do retângulo (regra do ponto médio).

Figura 13 - Área limitada pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo $[1,5]$, calculada por quatro retângulos cujas alturas são dadas pela imagem da função no ponto médio da base do retângulo (regra do ponto médio)



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

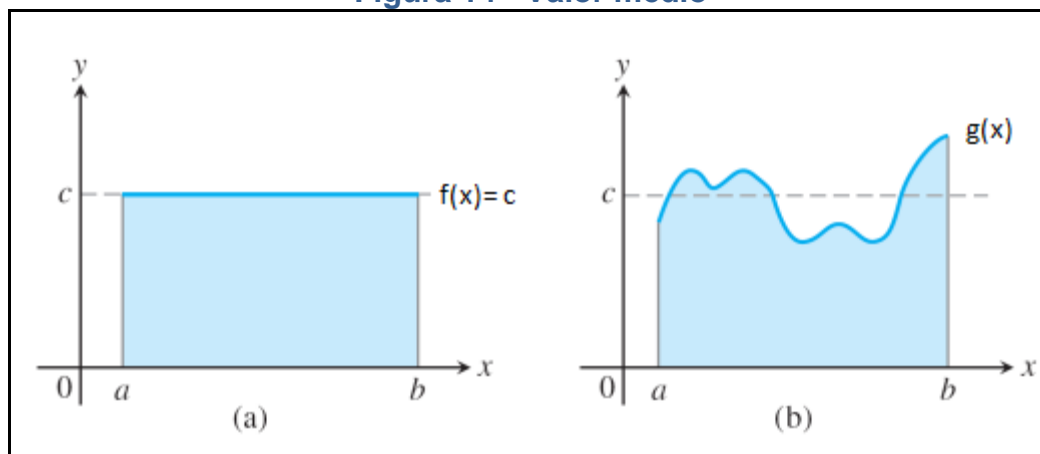
Dessa forma, a partir do *software* utilizado, pode-se notar que a área = $0,67 + 0,4 + 0,29 + 0,21 = 1,57$ u.a.

Pode-se inferir, portanto, diante dos exercícios exemplificados que quanto menor forem as medidas das bases desses retângulos, mais subintervalos teremos e, portanto, mais próximos da área real estaremos. Em todos os casos, as aproximações chegarão perto da área real, desde que todos os retângulos sejam suficientemente estreitos. Dessa forma, quando se tem poucos retângulos, a regra do ponto médio é a que melhor se aproxima.

2.2.2 Valor Médio

Geometricamente, o valor médio de $f(x)$, sendo $f(x) > 0$, é a altura média de um retângulo, utilizada para calcular a área aproximada entre a curva e o eixo das abscissas, num determinado intervalo (FIGURA 14).

Figura 14 - Valor médio



Fonte: Thomas, Weir e Hass, 2009, p. 360.

Em (a), foi utilizada uma figura cuja fórmula para o cálculo de área é conhecida:

Área do retângulo = Base x Altura

$$A = (b - a) \cdot c$$

Logo,

$$c = \frac{A}{b - a}$$

O valor médio de $f(x) = c$ no intervalo $[a, b]$ é, portanto, a área do retângulo dividida por $(b - a)$. Em (b), já foi utilizada uma figura cuja fórmula para o cálculo de área é desconhecida. Nem por isso o procedimento será diferente, pois a ideia continua sendo a mesma. O valor médio de $g(x)$, ou seja, a altura média da área abaixo da curva, no intervalo $[a, b]$ é, portanto, a tal área dividida por $(b - a)$.

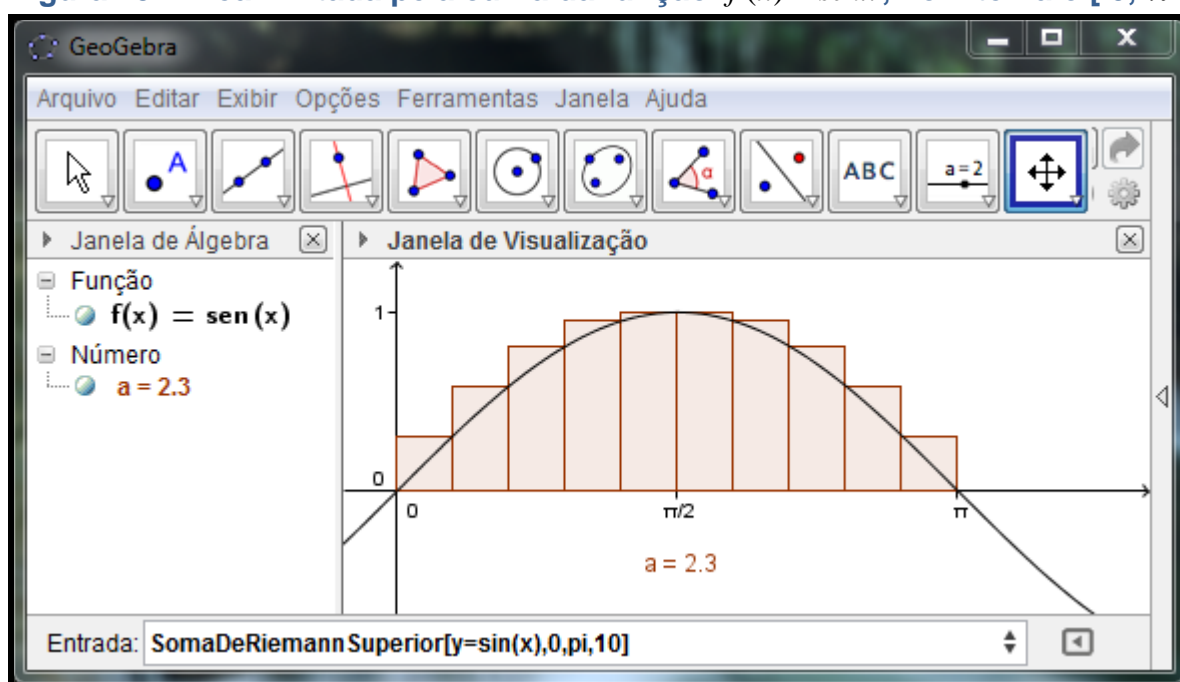
Portanto, para se calcular o valor médio, deve-se, primeiro, calcular a medida da área e, então, dividi-la pelo comprimento da base. O resultado obtido será o tal valor médio, ou melhor, a altura média. Multiplicando o comprimento da base pelo valor médio, obtém-se a área da figura. Caso não seja possível calcular as medidas exatas, serão obtidas medidas bem próximas.

Exemplo:

Através das aproximações finitas, estimar a área sob a curva da função $f(x) = \text{sen}x$, entre $x = 0$ e $x = \pi$ e, logo em seguida, estimar o valor médio da função, nesse intervalo, utilizando dez retângulos circunscritos:

Resolução com o auxílio do *software* GeoGebra:

Figura 15 - Área limitada pela curva da função $f(x) = \text{sen}x$, no intervalo $[0, \pi]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Pode-se notar na figura 15, que, após a inserção dos dados no *software*, chegou-se às seguintes medidas:

Área total $\cong 2,3$ u. a.

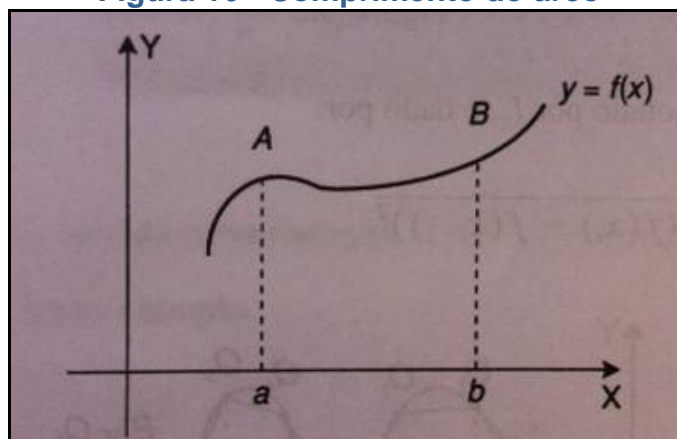
Comprimento da base total = $\pi \cong 3,14$ u.c.

Logo, o valor médio é igual a $2,3 \div 3,14 \cong 0,73$ u.c.

2.2.3 Comprimento do arco de uma curva plana

Segundo Fleming e Gonçalves (2006, p. 335), “a representação de uma função $y = f(x)$ num intervalo $[a,b]$ pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. A porção da curva do ponto A ($a, f(a)$) ao ponto B ($b, f(b)$) é chamada arco”. O objetivo, portanto, é estimar o comprimento desse arco, intuitivamente (FIGURA 16).

Figura 16 - Comprimento do arco

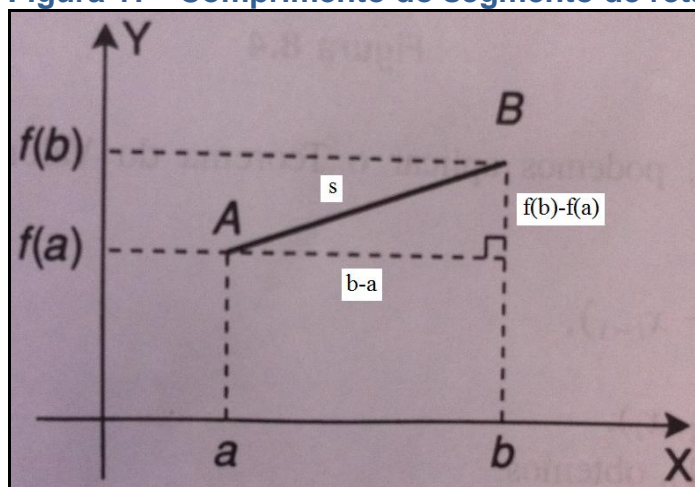


Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 335.

Observe:

a) O gráfico abaixo no intervalo $[a, b]$ representa um segmento de reta (FIGURA 17).

Figura 17 - Comprimento do segmento de reta



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves, 2006, p. 335.

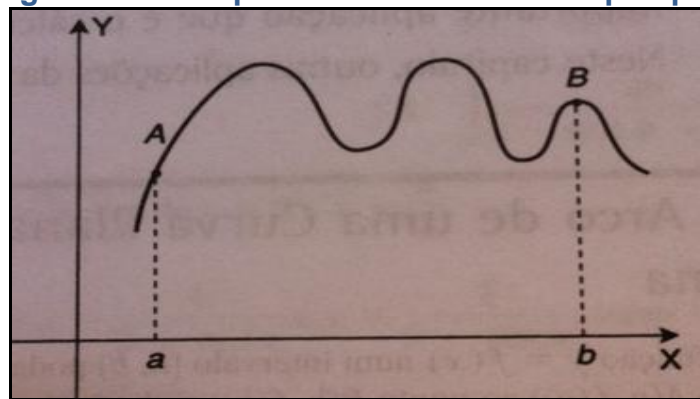
O comprimento s desse segmento AB indicado na figura 16 pode ser calculado através do Teorema de Pitágoras. Veja:

$$s^2 = (b - a)^2 + (f(b) - f(a))^2$$

$$s = \sqrt{(b - a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$$

b) Já o gráfico abaixo, no mesmo intervalo, representa uma curva qualquer (FIGURA 18).

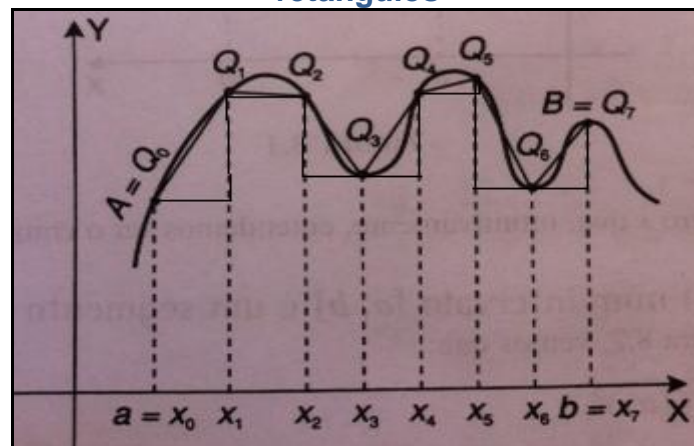
Figura 18 - Comprimento de uma curva qualquer



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 336.

O comprimento s dessa curva mostrada na figura 18 pode ser calculado através da soma de n pequenos segmentos, obtidos também pelo Teorema de Pitágoras. Nesse caso, cada segmento estará representando a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Figura 19 - Comprimento de uma curva qualquer, através da soma de n pequenos segmentos, representados pelas hipotenusas dos triângulos retângulos



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves, 2006, p. 336.

Assim, S_n é a soma das medidas das hipotenusas determinadas no intervalo dado. Observe que quanto menor for o Δ_x , mais próximo do comprimento real se estará. Portanto:

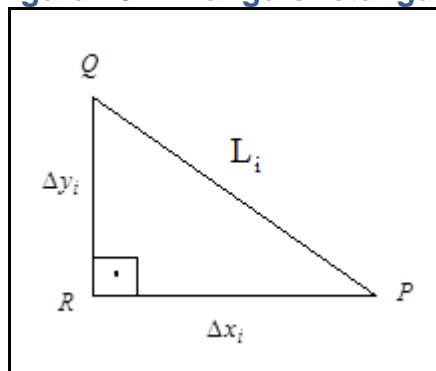
$$S_n = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (f(x_1) - f(x_0))^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} + \dots + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}$$

Logo,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}.$$

Analisando sob outro aspecto cada triângulo gerado, tem-se, através do Teorema de Pitágoras (FIGURA 20):

Figura 20 - Triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, S_n é a soma das medidas das hipotenusas L_i

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i$$

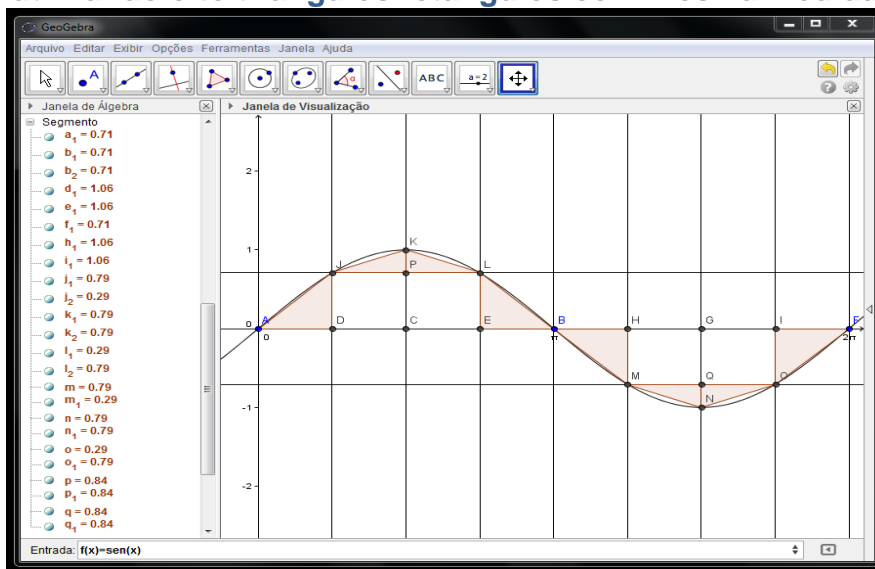
$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left[1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right]} \cdot \Delta x_i$$

Exemplo:

Através das aproximações finitas, estimar o comprimento do arco da curva da função $f(x) = \text{sen}x$, entre $x = 0$ e $x = 2\pi$, utilizando oito triângulos retângulos com mesma medida de base.

Resolução com o auxílio do *software* GeoGebra:

Figura 21 - Comprimento do arco da curva da função $f(x) = \text{sen}x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, utilizando oito triângulos retângulos com mesma medida de base



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Dessa forma, as medidas dos catetos do triângulo ADJ são dadas por:

$$\overline{AD} = 0,79$$

$$\overline{DJ} = 0,71$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, pode-se calcular a medida da hipotenusa

\overline{AJ} :

$$\overline{AJ}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DJ}^2$$

$$\overline{AJ}^2 = 0,79^2 + 0,71^2$$

$$\overline{AJ}^2 = 1,1282$$

$$\overline{AJ} = 1,06$$

Obs.: Como o GeoGebra calcula a medida da hipotenusa, não é necessário utilizar o Teorema de Pitágoras. Portanto, a partir de agora, serão apresentadas as medidas das outras sete hipotenusas já calculadas pelo *software*.

Triângulo JPK:

$$\overline{JK} = 0,84$$

Triângulo KLP:

$$\overline{KL} = 0,84$$

Triângulo BEL:

$$\overline{BL} = 1,06$$

Triângulo BHM:

$$\overline{BM} = 1,06$$

Triângulo MNQ:

$$\overline{MN} = 0,84$$

Triângulo NOQ:

$$\overline{NO} = 0,84$$

Triângulo FIO:

$$\overline{OF} = 1,06$$

Agora, basta somar as medidas das oito hipotenusas obtidas, para se estimar o comprimento da curva, no intervalo dado.

Como $S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}$, tem-se, então:

$$S_8 = 1,06 + 0,84 + 0,84 + 1,06 + 1,06 + 0,84 + 0,84 + 1,06$$

$$S_8 = 7,6 \text{ u.c.}$$

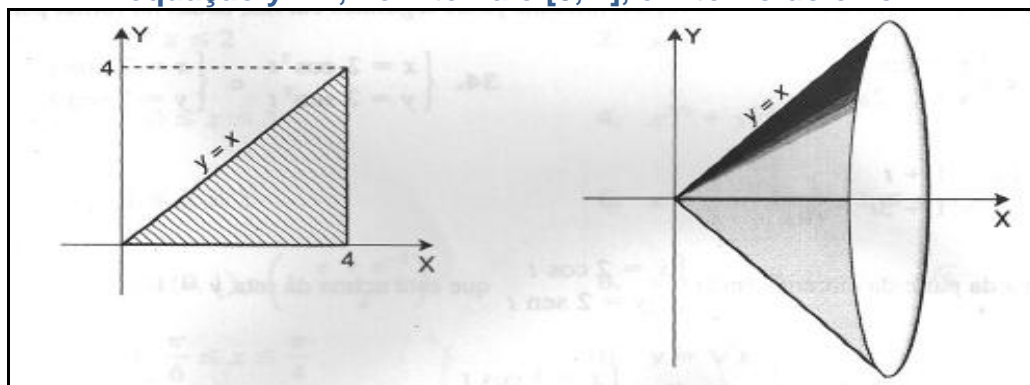
2.2.4 Volume de um sólido de revolução

Segundo Flemming e Gonçalves (2006), fazendo uma região plana girar em torno de uma reta no plano, obtém-se um sólido, que é chamado sólido de revolução. A reta ao redor da qual a região gira é chamada de eixo de revolução.

Observe alguns casos:

- a) Girando a região limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x$ e $x = 4$ em torno do eixo x , o sólido de revolução obtido é um cone, como indicado na figura 22.

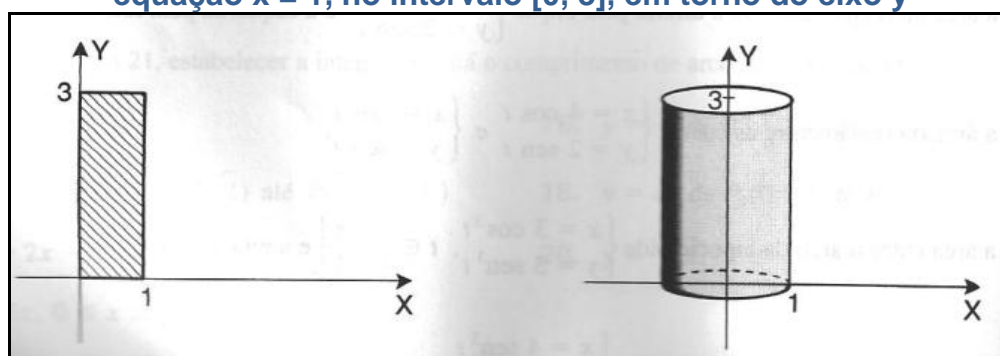
Figura 22 - Visualização do sólido gerado a partir da rotação da reta de equação $y = x$, no intervalo $[0, 4]$, em torno do eixo x



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 346.

- b) Girando o retângulo limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 3$ em torno do eixo y , obtém-se um cilindro (FIGURA 23).

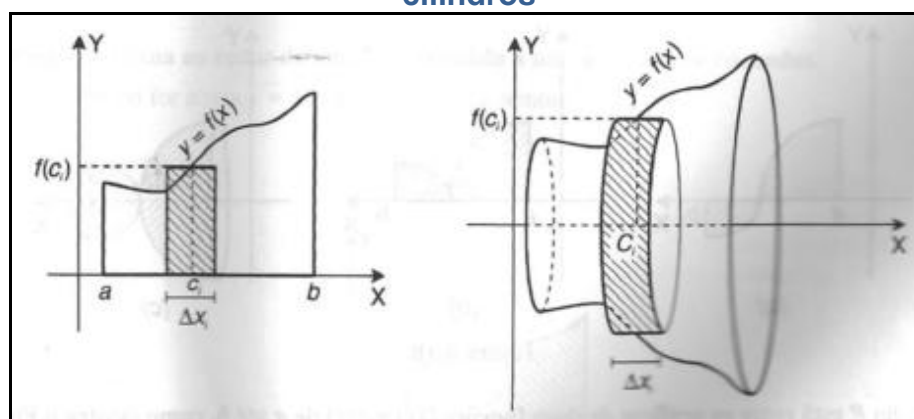
Figura 23 - Visualização do sólido gerado a partir da rotação da reta de equação $x = 1$, no intervalo $[0, 3]$, em torno do eixo y



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 346.

- c) Girando uma região plana qualquer em torno do eixo x , obtém-se o sólido de revolução representado na figura 24.

Figura 24 - Visualização do sólido gerado a partir da soma dos volumes dos cilindros



Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 347.

Assim, seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhe-se um ponto qualquer c_i .

Para cada i , $i = 1, \dots, n$, constrói-se um retângulo R_i , de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo x , o sólido de revolução obtido passa a ser um cilindro. No cilindro, $f(c_i)$ passa a ser a medida do raio e Δx_i passa a ser a medida da altura, cujo volume é dado por: $V = \text{Área da base} \times \text{altura}$. Assim,

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

A soma dos volumes dos n cilindros, pode ser representada por V_n :

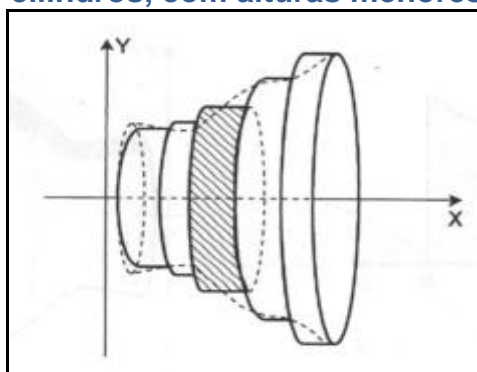
$$V_n = \pi \cdot f(c_1)^2 \cdot \Delta x_1 + \pi \cdot f(c_2)^2 \cdot \Delta x_2 + \dots + \pi \cdot f(c_n)^2 \cdot \Delta x_n$$

$$V_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i \text{ ou } V_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Essa fórmula dá uma aproximação do volume do sólido representado na figura 24.

A figura 25 ilustra a soma dos volumes dos cilindros se aproximando do volume real.

Figura 25 - Visualização do sólido gerado a partir da soma dos volumes dos cilindros, com alturas menores



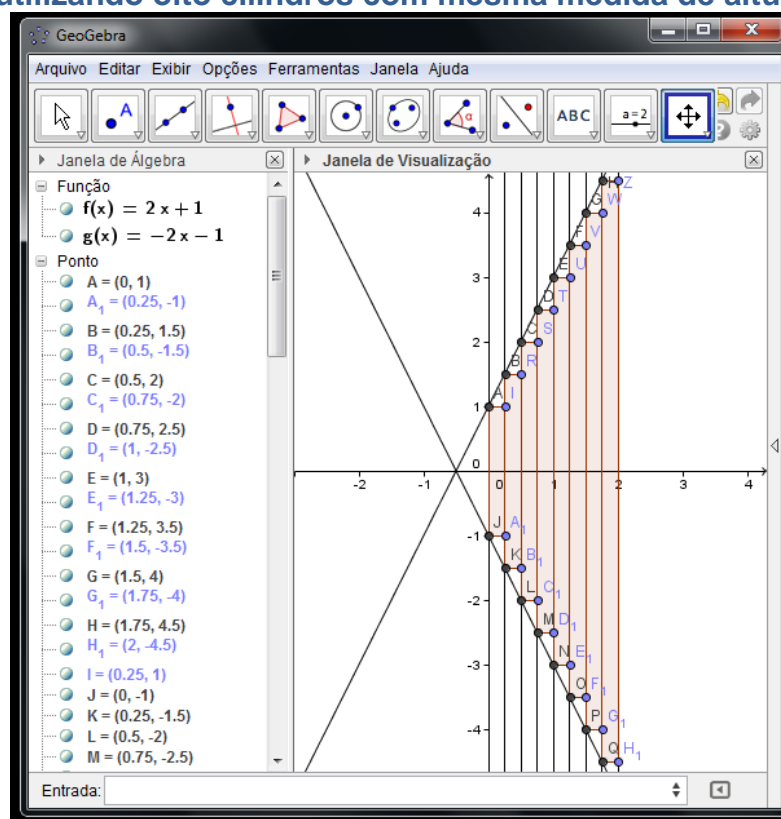
Fonte: Flemming e Gonçalves, 2006, p. 348.

Exemplo:

Através das aproximações finitas, estimar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da reta $f(x) = 2x + 1$ em torno do eixo x, no intervalo $[0, 2]$, utilizando oito cilindros com mesma medida de altura.

Resolução com o auxílio do software GeoGebra:

Figura 26 - Volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva de equação $f(x) = 2x + 1$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando oito cilindros com mesma medida de altura



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Essa figura 26 apresenta a vista lateral do sólido gerado, obtendo-se oito cilindros de mesma altura com raios que variam de 1 a 4,5 u.c. A partir daí, calcula-se o volume de cada um deles, somando-os a fim de calcular o volume aproximado, como a seguir:

$$\text{Volume 1: } \pi \cdot 1^2 \cdot 0,25 \approx 0,78 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 2: } \pi \cdot 1,5^2 \cdot 0,25 \approx 1,77 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 3: } \pi \cdot 2^2 \cdot 0,25 \approx 3,14 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 4: } \pi \cdot 2,5^2 \cdot 0,25 \approx 4,9 \text{ u.v}$$

$$\text{Volume 5: } \pi \cdot 3^2 \cdot 0,25 \approx 7,07 u.v$$

$$\text{Volume 6: } \pi \cdot 3,5^2 \cdot 0,25 \approx 9,62 u.v$$

$$\text{Volume 7: } \pi \cdot 4^2 \cdot 0,25 \approx 12,57 u.v$$

$$\text{Volume 8: } \pi \cdot 4,5^2 \cdot 0,25 \approx 15,9 u.v$$

Tem-se, então, o volume total aproximado:

$$V_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

$$V_8 \approx 0,78 + 1,77 + 3,14 + 4,9 + 7,07 + 9,62 + 12,57 + 15,9$$

$$V_8 \approx 55,75 u.v$$

Observe que quanto menor for a medida do intervalo da altura do cilindro, ou seja, a medida de Δx_i , mais cilindros são obtidos e mais próximos do volume real sua soma estará.

2.3 Limites de somas finitas

Como visto, as aproximações de somas finitas descritas anteriormente ficavam mais precisas conforme o número de termos crescia e a medida Δx_i dos subintervalos diminuía.

O exemplo a seguir (STOCHIERO, 1992, p. 50) mostra como calcular um valor limite quando a base do retângulo tende a zero e o número de retângulos cresce rumo ao infinito, ou seja, tende ao infinito.

“Calcular a área limitada pela reta $f(x) = x - 1$ e pelo eixo x , no intervalo $[1, 5]$, utilizando o Limite de somas.”

Isso será feito dividindo o intervalo em n subintervalos iguais e utilizando retângulos inscritos.

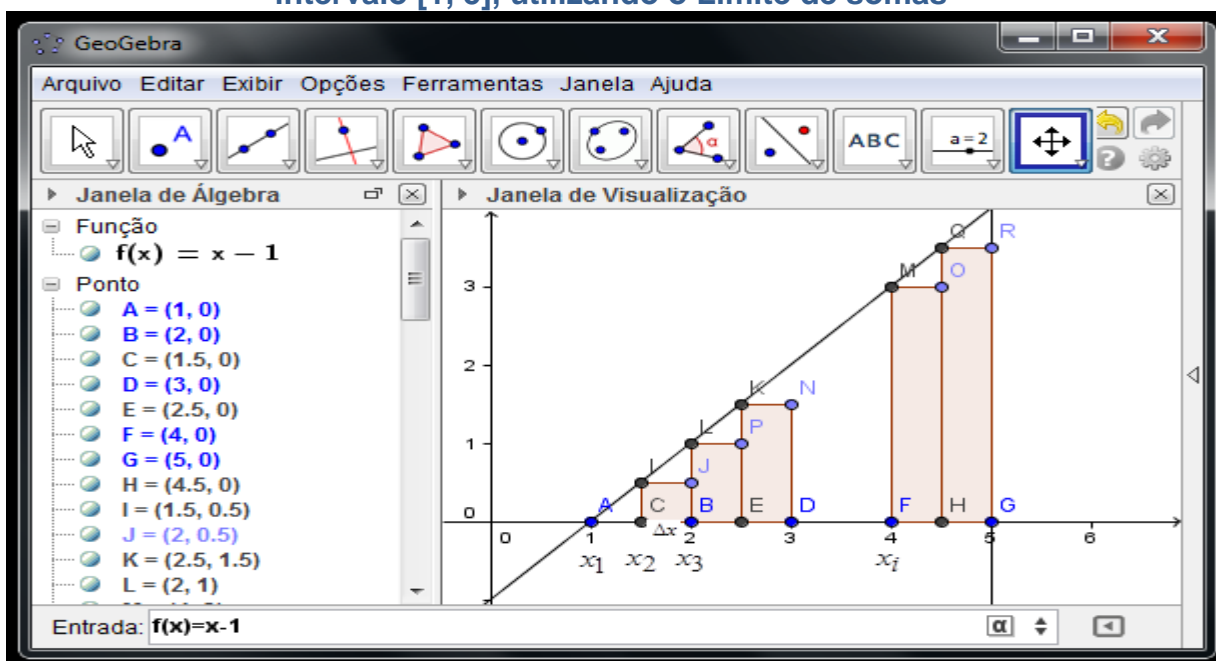
Ainda segundo Stochiero (1992),

[...] todo o raciocínio desenvolvido com a utilização dos retângulos inscritos também é válido para os retângulos circunscritos. Ao considerarmos o número n de retângulos circunscritos suficientemente grande, os fragmentos de área em excesso (que extrapolam a região dada) também serão desprezíveis e o resultado encontrado será o mesmo. Analogamente, a

utilização de retângulos semi-inscritos nos conduz ao mesmo resultado. (STOCHIERO, 1992, p.54).

O que foi dito por Stochiero (1992) pode ser visualizado a partir da figura 27:

Figura 27 - Área limitada pela curva de equação $f(x) = x - 1$ e pelo eixo x , no intervalo $[1, 5]$, utilizando o Limite de somas



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Assim, como pode ser notado na figura 27, tem-se que:

Número de subintervalos (ou número de retângulos): n

Comprimento de cada subintervalo x_i (ou comprimento da base de cada

retângulo): $\Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$

Altura de cada retângulo: $f(x_i)$

Percebe-se, então, que há, no exemplo acima, uma boa aproximação da área desejada, somando as áreas dos retângulos, ou seja, através do somatório:

$$A = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i.$$

Entende-se, ainda, que quanto menor for a medida da base do retângulo, mais retângulos no mesmo intervalo são obtidos e, portanto, mais próximos da área real sua soma estará. Por isso, surgiu a necessidade de utilizar o Limite para aprimorar a eficácia do cálculo, conforme fórmula a seguir:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Vale a pena observar que aumentando o número n de retângulos indefinidamente, ou seja, $n \rightarrow \infty$, conseqüentemente, o comprimento de sua base Δx vai tendendo a zero, ou seja, $\Delta x \rightarrow 0$. Por isso, pode-se escrever a fórmula da área de outra forma também, quer seja:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Assim, voltando aos dados do exercício, tem-se que Δx é constante e que $f(x_i)$ varia de acordo com o intervalo, sendo necessário, então, determinar uma expressão para representar $f(x_i)$.

Analisando novamente a figura 27 entende-se que:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1 + \Delta x$$

$$x_3 = 1 + 2\Delta x$$

$$x_4 = 1 + 3\Delta x$$

.

.

.

$$x_i = 1 + (i-1)\Delta x$$

$$x_i = 1 + (i-1) \cdot \frac{4}{n}$$

Logo,

$$f(x_i) = x_i - 1$$

$$f(x_i) = 1 + (i-1) \cdot \frac{4}{n} - 1$$

$$f(x_i) = (i-1) \cdot \frac{4}{n}$$

Portanto, a área poderá ser calculada pela fórmula:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (i-1) \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} - n \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \cdot \left(\frac{n^2 + n - 2n}{2} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \cdot \left(\frac{n^2 - n}{2} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} (n^2 - n)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 - \frac{8}{n} \right)$$

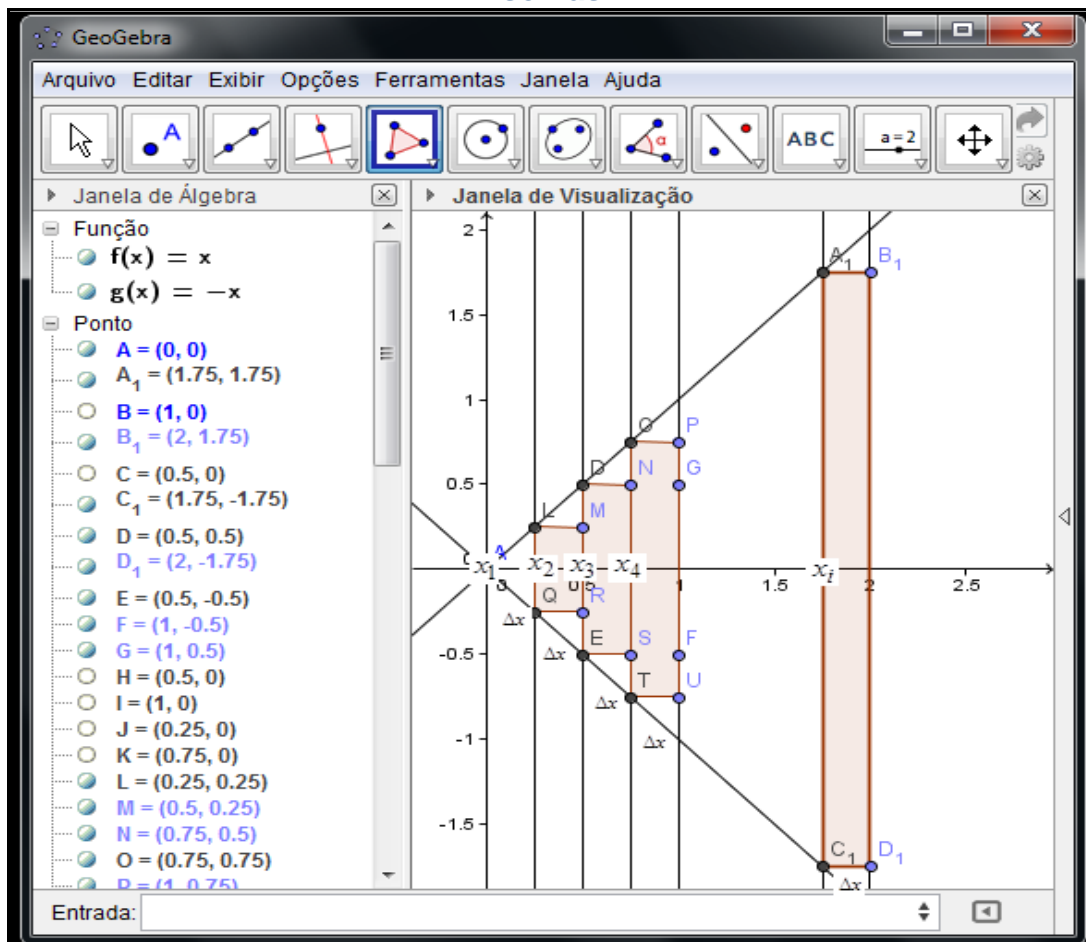
$$A \rightarrow 8 - 0$$

$$A \rightarrow 8 \text{ u.a.}$$

Eis outro exemplo:

Calcular o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva de equação $f(x) = x$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando o limite de somas. A resolução com o auxílio do GeoGebra é apresentada na figura 28.

Figura 28 - Volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da área limitada pela curva da equação $f(x) = x$, no intervalo $[0, 2]$, utilizando o Limite de somas



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Pode-se verificar, portanto, que a figura 28 representa a vista lateral dos n cilindros, com $n \rightarrow \infty$, de altura Δx , com $\Delta x \rightarrow 0$, que, juntos, tendem a formar um cone. Já foi compreendida, então, a possibilidade de uma boa aproximação do volume desejado, somando os volumes dos n cilindros, ou seja, através do somatório:

$$V_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Percebeu-se, ainda, que quanto menor for a medida da altura de cada cilindro, mais cilindros no mesmo intervalo serão obtidos e, conseqüentemente, mais próximos do volume real sua soma estará, o que permitiu a utilização do Limite para aprimorar a eficácia do cálculo, sob a fórmula:

$$V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Vale a pena observar que, da mesma maneira como ocorreu no cálculo de área, aumentando o número n de cilindros rumo ao infinito, ou seja, $n \rightarrow \infty$, conseqüentemente, a medida de sua altura Δx vai diminuindo rumo a zero, ou seja, $\Delta x \rightarrow 0$. Por isso, pode-se escrever a fórmula do volume da seguinte maneira:

$$V_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x, \text{ onde:}$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Assim, ainda analisando a figura 28 tem-se que:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 + \Delta x$$

$$x_3 = 0 + 2\Delta x$$

$$x_4 = 0 + 3\Delta x$$

.

.

.

$$x_i = 0 + (i-1)\Delta x$$

$$x_i = (i-1) \cdot \frac{2}{n}$$

Logo,

$$f(x_i) = x_i$$

$$f(x_i) = (i-1) \cdot \frac{2}{n}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot \left[(i-1) \cdot \frac{2}{n} \right]^2 \cdot \frac{2}{n} \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1) \cdot \frac{4}{n^2} \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1) \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + n \right) \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 - n + n \right) \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right) \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4\pi}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1) - 6n^2}{3} \right) \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4\pi}{3n^3} (2n^3 - 3n^2 + n) \right] \\
V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{n} + \frac{4\pi}{3n^2} \right] \\
V_n &\rightarrow \frac{8\pi}{3} \text{ u. v.}
\end{aligned}$$

2.4 O Limite de somas visto como uma Integral Definida

O símbolo \int foi introduzido por Leibniz e é denominado sinal de integração. Esse símbolo representa um **S** alongado, isso porque a Integral é um Limite de **S**omas finitas.

Na notação $\int_a^b f(x) dx$, $f(x)$ é chamado integrando; a e b são os Limites de integração, onde a é o limite inferior e b o limite superior; algebricamente, dx indica que a variável da função integrando é x ; geometricamente, dx indica o quanto x está variando, no cálculo de uma área, volume, curva etc., podendo representar comprimento da base, largura ou altura de uma determinada figura.

A soma $S = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$ é chamada soma de Riemann, em homenagem ao matemático

alemão Bernhard Riemann⁶ (1826-1866), onde Δx_i é a largura do intervalo.

S , então, representa a soma das áreas dos retângulos limitados entre a curva da função $f(x)$ e o eixo x ou $g(y)$ e o eixo y . Esse é o conceito geométrico da Integral Definida, que permite, entre outras coisas, o cálculo da área de forma integral. Logo, a Integral Definida de f em $[a,b]$ é o Limite das somas de Riemann, sob a fórmula:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Segundo Stewart (2014, p.350), o “Teorema Fundamental do Cálculo” é apropriado, pois estabelece uma conexão entre os dois ramos centrais do Cálculo, o Diferencial e o Integral, considerados como inversos um do outro. Isto significa que se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada (ou vice-versa), volta-se à função original, como visto a seguir:

Integral indefinida:

$$\int f(x) dx = g(x) + c \rightarrow \text{Admite infinitas soluções.}$$

Integral definida:

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a) \rightarrow \text{Admite uma única solução.}$$

Onde $g(x)$ é a primitiva de $f(x)$, isto é, uma função tal que $g'(x) = f(x)$.

⁶ Bernhard Riemann realizou seu doutorado sob orientação de Gauss, na Universidade de Göttingen, e lá permaneceu para ensinar. Gauss não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, mas referiu-se a Riemann como uma “mente criativa ativa, verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil”. Infelizmente, faleceu aos 39 anos, de tuberculose. (STEWART, 2014, p.350).

Ainda segundo Stewart (2014, p.360), é necessária uma distinção cuidadosa entre Integral indefinida e Integral Definida, já que, enquanto a Integral indefinida é uma função ou uma família de curvas, a Integral Definida é um número.

2.5 Teorema do Valor Médio

Seja f integrável em $[a,b]$, então, o Valor Médio $f(c)$ em $[a,b]$, também chamado de Média é dado por:

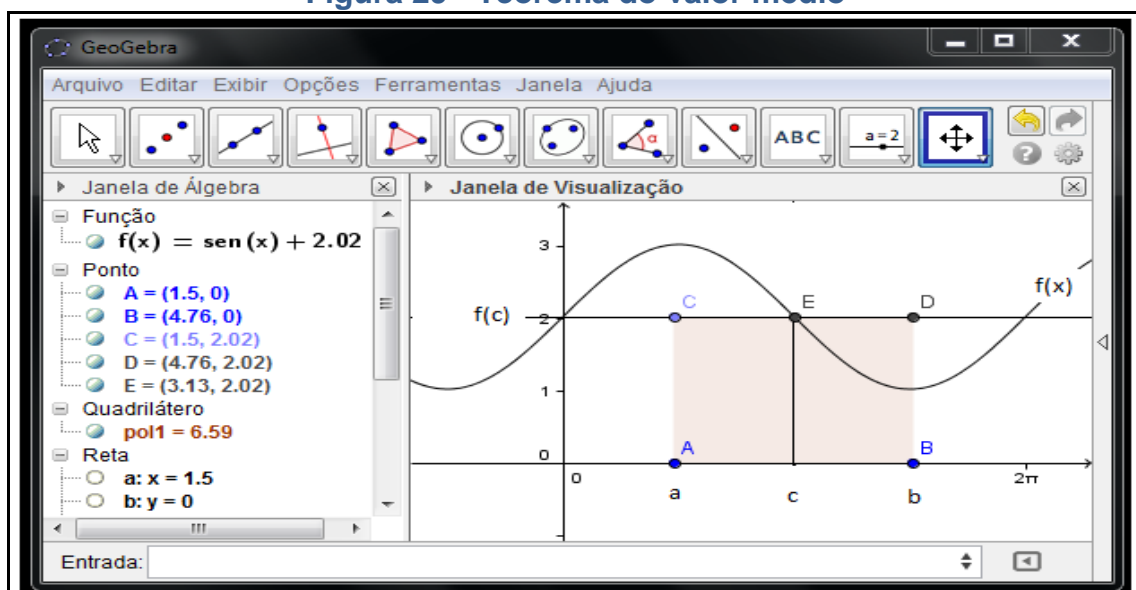
$$M_{(f)} = f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Onde:

Geometricamente, sendo $f(x) > 0$, $(b - a)$ é a base do retângulo e $f(c)$ é a altura média desse retângulo. Assim, o produto entre a base e a altura gera a área sob a curva $f(x)$, limitada pelo eixo x , no intervalo $[a,b]$. Observe na figura 28 que uma região é aproveitada e a outra não, pois uma acaba compensando a outra. Com isso, obtém-se uma área muito próxima da real, que pode ser calculada intuitivamente por $\int_a^b f(x) dx$. O interessante é, inicialmente, calcular o valor médio $f(c)$ e logo em seguida, calcular o valor de c , pois é ele que equilibra essa espécie de balança.

Figura 29 - Teorema do valor médio



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

De acordo com a figura 29, pode-se verificar que, como $f(c)$ representa a altura média do retângulo, é possível, a partir dessa informação, chegar ao número representado ponto c . Esse Teorema, portanto, mostra que é possível calcular a área sob a curva através do cálculo da área de um retângulo.

Exemplo:

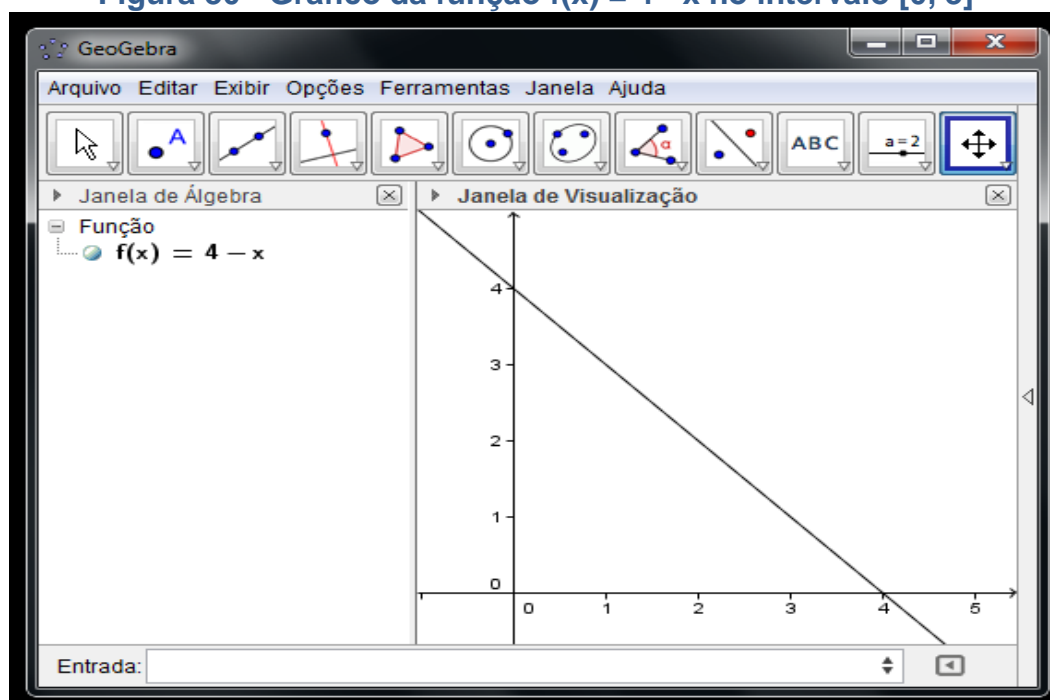
Determinar o valor médio de $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$ e em que valor c do domínio dado, f realmente assume esse valor:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Resolução:

Primeiramente, torna-se necessário, para resolver essa questão, o desenho do gráfico (FIGURA 30):

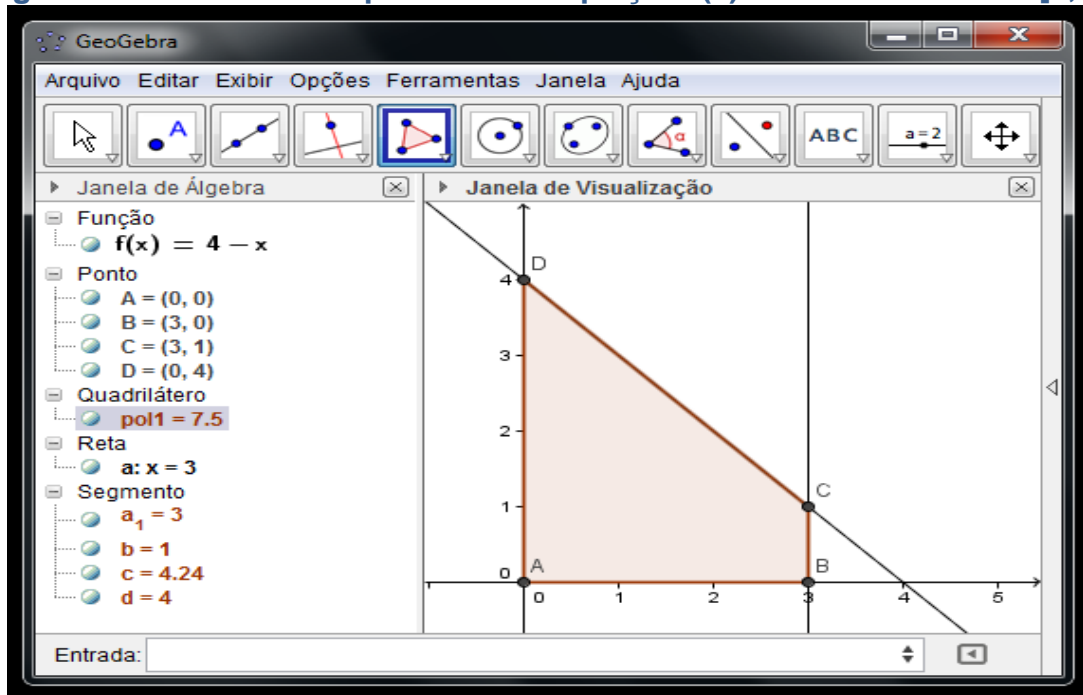
Figura 30 - Gráfico da função $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Após o desenho do gráfico, é preciso limitar a área de acordo com o intervalo dado, como apontado na figura 31:

Figura 31 - Área limitada pela reta de equação $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

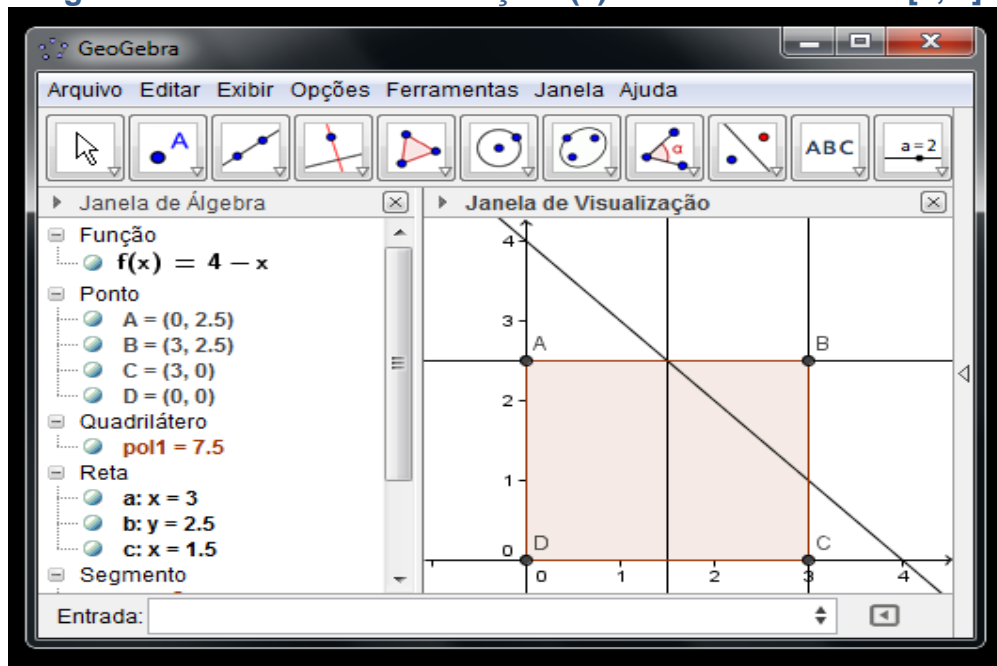
Utilizando a fórmula do valor médio e os dados da figura 31, pode-se calcular $f(c)$ e o valor de c , como abaixo:

$$\begin{aligned}
 f(c) &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \\
 f(c) &= \frac{1}{3-0} \cdot \int_0^3 (4-x) dx \\
 f(c) &= \frac{1}{3} \cdot \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 \\
 f(c) &= \frac{1}{3} \cdot \left(4 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right) - 0 \\
 f(c) &= \frac{1}{3} \cdot (12 - 4,5) \\
 f(c) &= \frac{7,5}{3} \\
 f(c) &= 2,5
 \end{aligned}$$

Assim, se $f(x) = 4 - x$ e $f(c) = 2,5$, então $4 - c = 2,5$. Logo, $c = 1,5$.

Portanto, o retângulo indicado na figura 32 com base no intervalo $[0,3]$ e altura 2,5 tem área igual à área entre o gráfico de f e o eixo x , no mesmo intervalo. Dessa forma, $c = 1,5$ é o valor de x que equilibra a balança, ou seja, que fornece a altura desejada exata.

Figura 32 - Valor médio da função $f(x) = 4 - x$ no intervalo $[0, 3]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

O retângulo, naturalmente, assume uma forma geométrica diferente da original, porém, com mesma área. Observe que a área que sobra no retângulo equivale à área que falta na figura original.

2.6 Teorema Fundamental do Cálculo

O Cálculo Diferencial surgiu de um problema cujo objetivo era obter a equação da reta tangente a uma curva num determinado ponto, enquanto o Cálculo Integral surgiu de um problema cujo objetivo era o cálculo da área de uma figura plana com forma desconhecida.

O inglês Isaac Barrow (1630-1677), mentor de Isaac Newton em Cambridge, Inglaterra, descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados, percebendo derivação e integração são operações inversas. O “Teorema Fundamental do Cálculo” fornece a relação inversa precisa entre a derivação e a integração.

Como já dito anteriormente, Leibniz e Newton observaram que o Teorema Fundamental do Cálculo os capacitou a calcular áreas e Integrais Definidas muito mais facilmente que Barrow, sem que fosse necessário calculá-las como Limites de somas, e sim usando a primitiva da função envolvida.

Segundo Courant e Robbins (2000, p. 499), a noção de integração e de diferenciação tinha sido razoavelmente bem desenvolvida antes do trabalho de Newton e de Leibniz. Para desencadear a evolução da nova análise Matemática, apenas mais uma descoberta era necessária. Os dois processos de Limite aparentemente não relacionados, envolvidos na diferenciação e na integração de uma função, estão intimamente relacionados. São, de fato, inversos um do outro, como as operações adição e subtração, multiplicação e divisão. Não existe portanto, um Cálculo Diferencial e outro Cálculo Integral separados, mas um só Cálculo.

Ainda segundo Courant e Robbins (2000):

O grande feito de Leibniz e Newton foi o de terem pela primeira vez identificado e explorado claramente este Teorema Fundamental do Cálculo. Naturalmente, sua descoberta situava-se no caminho correto do desenvolvimento científico, sendo perfeitamente natural que vários homens tenham chegado a uma compreensão clara da situação, de modo independente e quase ao mesmo tempo. (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 499).

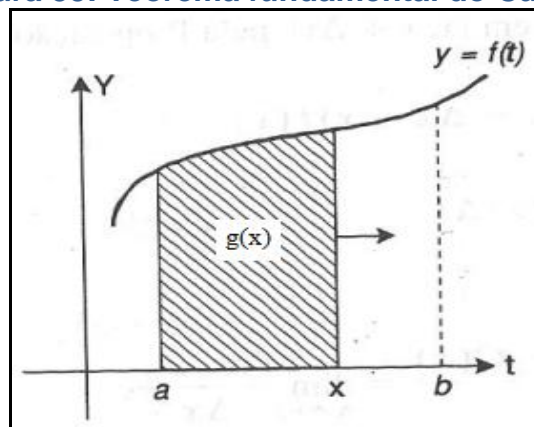
Esse Teorema é dividido em duas partes. Segundo Thomas, Weir e Hass (2009, p. 389), tem-se que:

Parte 1:

Se f é contínua em $[a, b]$, então, $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e sua derivada é $f(x)$. Assim:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} g(x) = f(x)$$

Figura 33: Teorema fundamental do Cálculo



Fonte: Adaptado de Fleming e Gonçalves, 2006, p. 265).

Assim, da forma como explicitado, entende-se a possibilidade de relacionar as operações de derivação e integração, conforme o exemplo a seguir:

Exemplo:

$$\begin{aligned}
 \text{Calcular } & \frac{d}{dx} \int_0^x \cos t \, dt \\
 &= \frac{d}{dx} \left. \text{sen } t \right|_0^x \\
 &= \frac{d}{dx} (\text{sen } x - \text{sen } 0) \\
 &= \frac{d}{dx} \text{sen } x \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

Parte 2:

Na parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, Thomas, Weir e Hass (2009, p. 392) afirma que, se f é contínua em qualquer ponto de $[a,b]$ e se g é uma primitiva de f neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(t) \, dt = g \Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Vale a pena observar o quanto fica mais simples, prática e rápida a resolução de cada exercício visto anteriormente, agora pela Integral Definida, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Embora o Teorema possa ser surpreendente à primeira vista, ele fica plausível se sua interpretação for realizada em termos físicos. Assim, se $v(t)$ é a velocidade de um objeto e $s(t)$ é a sua posição no instante de tempo t , então, $v(t)=s'(t)$, de forma que s é uma primitiva de v .

Considerando um objeto que se move sempre no sentido positivo e fazendo a conjectura de que a área sob a curva da velocidade é igual à distância percorrida, tem-se, então:

$$\int_a^b v(t) \, dt = s(t) \Big|_a^b = s(b) - s(a)$$

Segundo Stochiero (1992), algumas propriedades do Teorema Fundamental do Cálculo são fundamentais, tais como:

- Se os Limites de integração são iguais, a Integral é nula:

$$\int_a^a f(x).dx = 0$$

- Se houver a inversão da ordem dos Limites de integração, a Integral troca o sinal:

$$\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$$

- Sendo a Integral $\int_a^b k.f(x).dx$, o fator constante k pode ser transposto para fora do símbolo da Integral:

$$\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$$

- A Integral de uma soma algébrica de funções é igual à soma algébrica das Integrais das funções parciais:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$$

- A Integral Definida pode ser decomposta na soma algébrica de duas ou mais Integrais parciais:

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$$

Segundo George Thomas, Weir e Hass (2009), a possibilidade de encontrar funções a partir de suas taxas de variação é uma das ferramentas de cálculo mais eficientes. Veja alguns exemplos de simples aplicação:

- 1) Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $s(t) = 10t - 4,9t^2$.

a) Calcule a velocidade quando $t = 2$.

Sabendo que a derivada da função posição gera a função velocidade, basta derivar $s(t)$ para obtermos $v(t)$:

Dessa forma:

$$s'(t) = 10 - 9,8t$$

$v(t) = 10 - 9,8t$ (Essa é a função que irá informar a velocidade da bola em cada instante t).

Para $t = 2$, tem-se:

$$v(2) = 10 - 9,8 \cdot 2$$

$$v(2) = -9,6 \text{ m/s}$$

Vale ressaltar que o sinal negativo indica que a bola já passou pelo ponto crítico (máximo) e, portanto, já está voltando (caindo/descendo) para o solo.

b) Com que aceleração a bola atinge a superfície?

A função aceleração pode ser obtida derivando a função velocidade cuja variável é o tempo. Acontece que não se sabe, por enquanto, quanto tempo essa bola leva para voltar ao solo. Esse deve ser o primeiro cálculo para esse exercício.

Assim, sabendo que a posição da bola, ao longo do tempo, é orientada pela função $s(t) = 10t - 4,9t^2$, tem-se que obter os valores de t que zeram s , ou seja, tempo inicial e tempo final, conforme explicitado:

$$10t - 4,9t^2 = 0$$

$$t(10 - 4,9t) = 0$$

$$t = 0 \text{ s (inicial) ou } t = \frac{10}{4,9} \text{ s (final)}$$

Agora que já se sabe o tempo final, ou seja, quanto tempo ela demora para retornar ao solo, fica fácil calcular a aceleração da bola quando a mesma atinge a superfície:

$$v(t) = 10 - 9,8t$$

$$v'(t) = -9,8$$

$$a(t) = -9,8 \text{ m/s}^2$$

Observe que, nesse caso, não foi necessário utilizar o tempo final.

c) Sabendo que a aceleração de um corpo em queda livre a partir do repouso é de $9,8 \text{ m/s}^2$, determine:

- A velocidade do corpo após 2 segundos:

$$v(t) = \int a(t) dt$$

$$v(t) = \int 9,8 dt$$

$$v(t) = 9,8t + c$$

Como o corpo cai partindo do repouso, $v(0) = 0$, logo:

$$9,8 \cdot 0 + c = 0$$

$$c = 0$$

Portanto, a função velocidade é $v(t) = 9,8t$

Então,

$$v(2) = 9,8 \cdot 2$$

$$v(2) = 19,6 \text{ m/s}$$

- A posição do corpo após 2 segundos:

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$s(t) = \int 9,8t dt$$

$$s(t) = 9,8 \frac{t^2}{2} + c$$

$$s(t) = 4,9 t^2 + c$$

Assim, se a altura inicial é $s(0) = h$, positiva para baixo a partir da posição de repouso, então:

$$4,9 \cdot 0^2 + c = h$$

$$c = h$$

Logo, a função posição será $s(t) = 4,9 t^2 + h$.

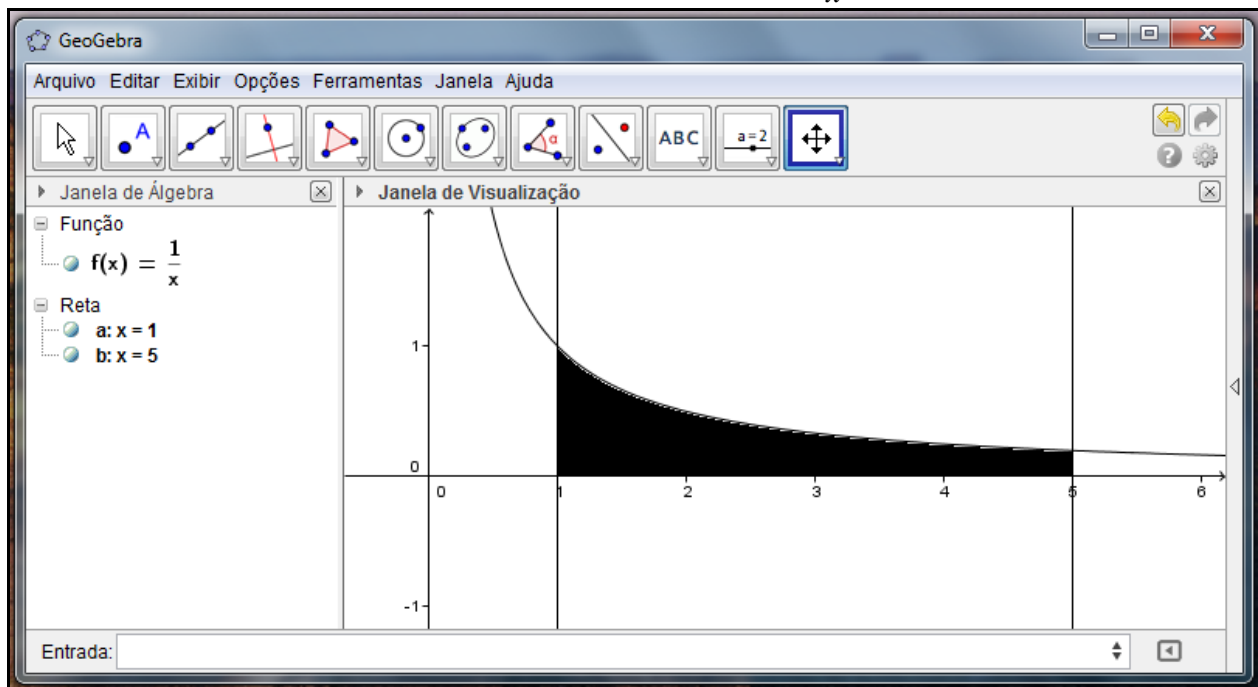
Portanto, $s(2) = 19,6 + h$.

2) Calcular a área sob a curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x=1$ e $x=5$, utilizando o

Teorema Fundamental do Cálculo:

Para resolver essa questão, torna-se necessário, inicialmente, esboçar o gráfico, auxiliando no seu entendimento (FIGURA 34).

Figura 34 - Área sob a curva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x=1$ e $x=5$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra.

Após esboçado o gráfico, deve-se determinar os Limites de integração. Como nesse caso, os Limites de integração foram dados $[1, 5]$, passa-se, então, para o terceiro e último passo, que é calcular a área:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$A = \int_1^5 \frac{1}{x} dx$$

$$A = \ln x \Big|_1^5$$

$$A = \ln 5 - \ln 1$$

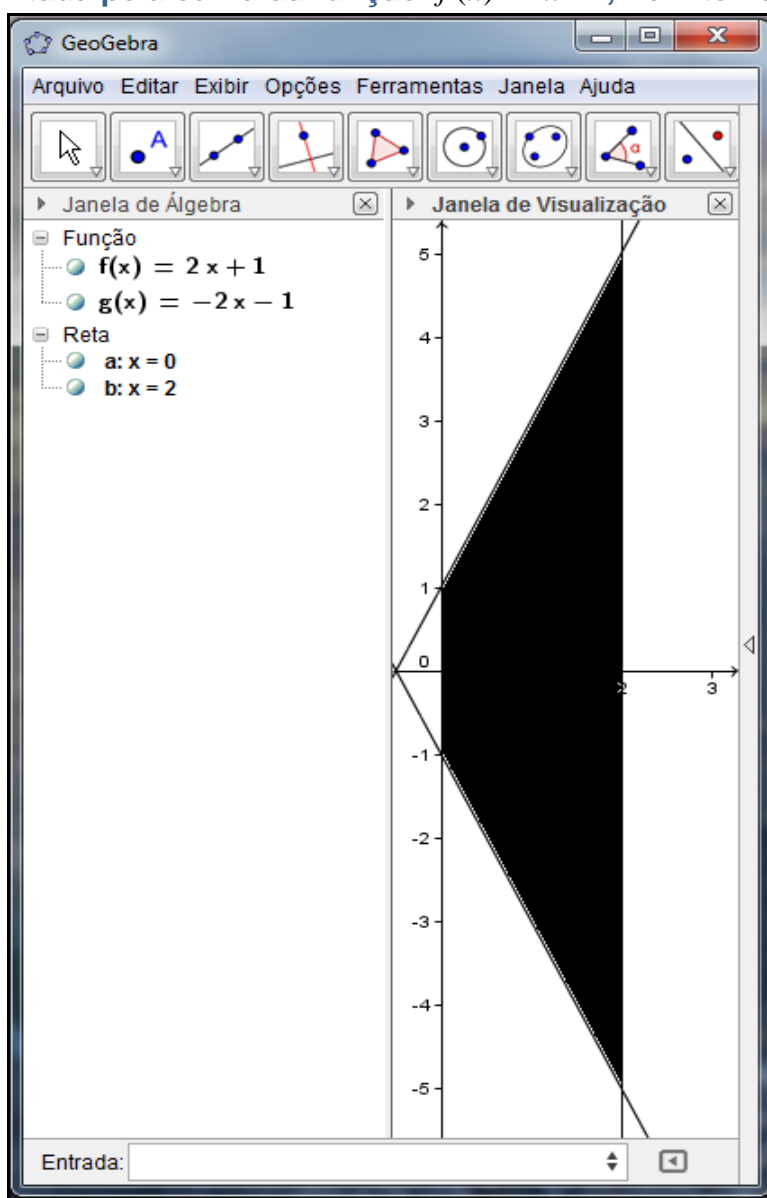
$$A = 1,609 \text{ u.a.}$$

Esse exercício já foi calculado anteriormente pelo método das aproximações finitas. Ressalta-se nessa comparação que, enquanto pelo método das aproximações finitas obtém-se 1,57 u.a., pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtém-se 1,609 u.a., uma medida próxima, porém, mais precisa que a do método anterior.

- 3) Calcular o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x , da área limitada pela curva da função $f(x) = 2x + 1$ em torno do eixo x , no intervalo $[0, 2]$, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo:

Para se resolver a questão proposta, assim como nas demais, torna-se necessário esboçar o gráfico, como mostra a figura 35:

Figura 35 - Vista lateral do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x , da área limitada pela curva da função $f(x) = 2x + 1$, no intervalo $[0, 2]$



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Após desenhar o gráfico, é preciso determinar os Limites de integração. Nesse caso, os Limites de integração foram dados $[0, 2]$, permitindo diretamente o cálculo do volume:

$$V_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

$$V_n = \int_0^2 \pi \cdot (2x+1)^2 dx$$

$$V_n = \pi \cdot \int_0^2 (4x^2 + 4x + 1) dx$$

$$V_n = \pi \cdot \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + x \right]_0^2$$

$$V_n = \pi \cdot \left[\left(\frac{4 \cdot 2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 + 2 \right) - 0 \right]$$

$$V_n = \pi \cdot \left[\frac{32}{3} + 10 \right]$$

$$V_n = \frac{62}{3} \pi \text{ u.v.}$$

$$V_n = 65,97 \text{ u.v.}$$

Esse exercício já foi calculado anteriormente pelo método das aproximações finitas. Ressalta-se, assim como no exercício anterior, que pelo método das aproximações finitas, obtém-se 55,75 u.v., enquanto que pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o resultado é de 65,97 u.v., uma medida próxima, porém, mais precisa que a anterior.

- 4) Calcular o comprimento do arco da curva da função $f(x) = \text{sen}x$, entre $x = 0$ e $x = 2\pi$, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo:

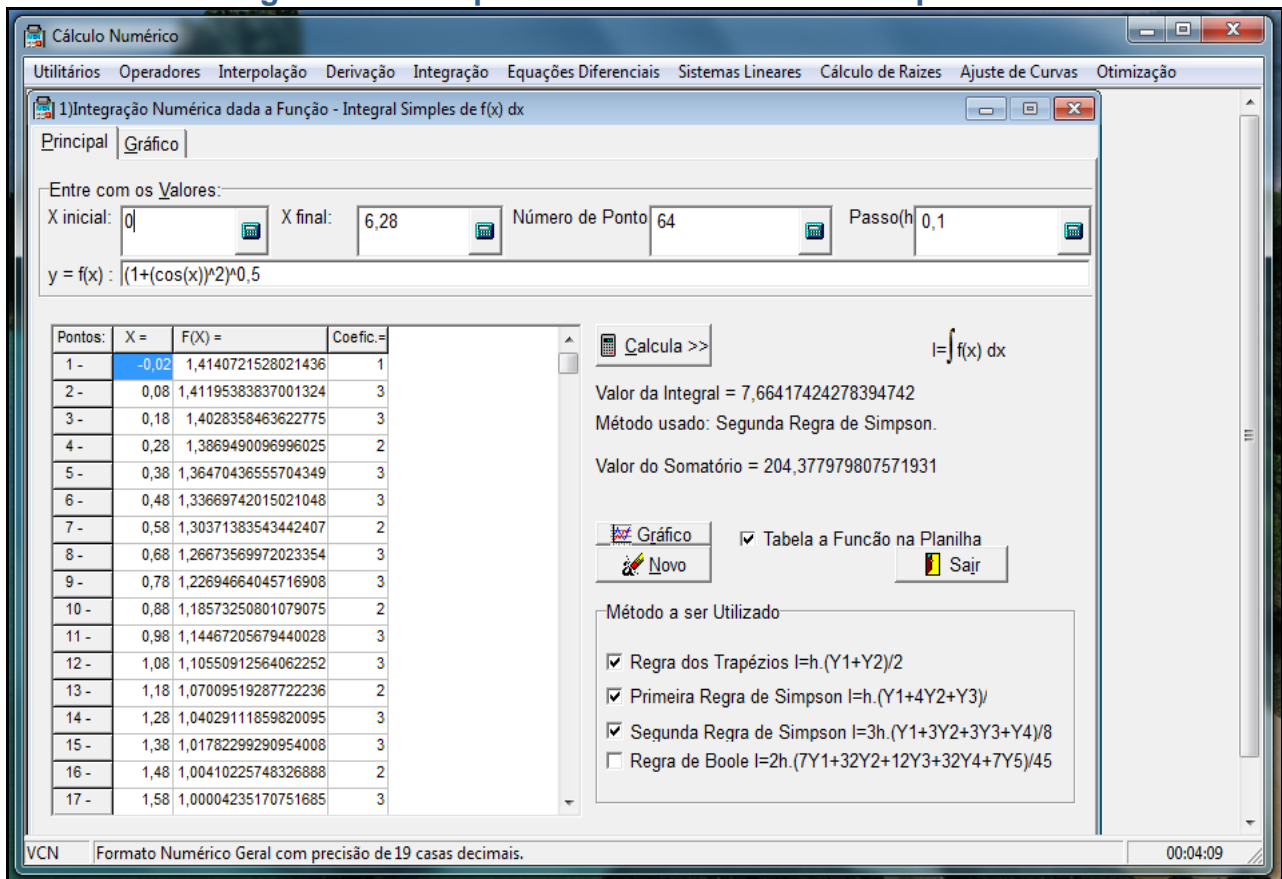
$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

Essa Integral não pode ser facilmente calculada à mão, por isso a necessidade de uso de um *software*, como o VCN, como mostra a figura 36.

Figura 36 - Comprimento da curva calculado pelo VCN



Fonte: Elaborada pelo autor no VCN

Logo,

$$L = 7,66 \text{ u.c.}$$

Ressalta-se que também esse exercício já foi calculado anteriormente pelo método das aproximações finitas, notando-se que pelo método das aproximações finitas, obtém-se um comprimento de 7,6 u.c., com oito triângulos retângulos, enquanto que pelo Teorema Fundamental do Cálculo, é encontrado comprimento igual a 7,66 u.c., que, apesar de ser uma medida próxima, é mais precisa.

3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ATIVIDADES

ATIVIDADE 1: Aproximações finitas

Objetivos:

- Calcular medidas de áreas a partir das aproximações finitas, utilizando o *software* GeoGebra;
- Calcular medidas de volumes a partir das aproximações finitas, utilizando o *software* GeoGebra;
- Calcular medidas de comprimentos de arcos a partir das aproximações finitas, utilizando o *software* GeoGebra;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida e à utilização do *software* GeoGebra.

Questão 1:

Dada a função $f(x) = x + 1$ limitada no intervalo $[0, 2]$, calcular através das aproximações finitas, utilizando o GeoGebra:

- a) A área limitada entre a função e o eixo x , com quatro retângulos semi-inscritos (regra do ponto médio), neste intervalo.
- b) A área limitada entre a função e o eixo x , com oito retângulos semi-inscritos (regra do ponto médio), neste intervalo.
- c) A área limitada entre a função e o eixo y , com quatro retângulos inscritos, neste intervalo.
- d) A área limitada entre a função e o eixo y , com oito retângulos inscritos, neste intervalo.
- e) O volume do sólido gerado pela rotação da área limitada pela função em torno do eixo x , com quatro cilindros inscritos de mesma altura, neste intervalo.
- f) O volume do sólido gerado pela rotação da área limitada pelo gráfico em torno do eixo y , com base nos conceitos de geometria sólida, neste intervalo. Observe que, com a rotação, há a formação de dois sólidos, o de dentro e o de fora. Nesse caso, queremos o volume do sólido de fora.

Obs.: Não utilizar a Integral, e sim as fórmulas:

Volume do cilindro:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Volume do cone:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Questão 2:

Através das aproximações finitas, estimar o **comprimento do arco da curva** da função $f(x) = \cos x$, entre $x = 0$ e $x = \pi$, utilizando o GeoGebra, com:

- a) Quatro triângulos retângulos com mesma medida de base.

Leia com atenção as instruções abaixo, antes de começar a resolver o exercício:

Abrindo o *software* GeoGebra, percebemos que o eixo x está, inicialmente, representando os números reais. Como a função é trigonométrica, devemos mudar a linguagem no eixo x, transformando os números reais em seus correspondentes ângulos, em radianos. Para isso, devemos:

- posicionar o mouse sobre o eixo x e clicar com o botão direito;
- clicar sobre janelas de visualização;
- clicar sobre eixo x;
- clicar sobre distância e alterar para ;
- fechar a janela, voltando para o gráfico.

Obs.:

- No GeoGebra, $x = \pi$, escreve-se $x = \text{pi}$;
- Para movimentar o ponto com mais precisão, pressionamos Shift junto com a seta que guiará o ponto para a posição adequada;
- Utilizaremos as ferramentas novo ponto e polígono;
- O próprio GeoGebra calcula as medidas das hipotenusas necessárias ao exercício.

- b) Oito triângulos retângulos com mesma medida de base.

Siga as mesmas instruções da letra a.

ATIVIDADE 2: Somatório

Objetivos:

- Calcular e interpretar o Somatório;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

Questão 1:

Calcular a soma dos 500 primeiros números naturais:

Questão 2:

Calcular a soma dos quadrados dos 50 primeiros números naturais:

Questão 3:

Calcular as somas abaixo:

a) $\sum_{i=1}^{20} i =$

b) $\sum_{i=1}^{10} 7 =$

c) $\sum_{i=1}^{50} i^2 =$

d) $\sum_{i=1}^{30} (i^2 + 3i) =$

e) $\sum_{i=1}^{20} (5i^2 - 4i + 3) =$

ATIVIDADE 3: Limite de Somas Finitas

Objetivos:

- Calcular Limites de somas, utilizando propriedades dos Limites e do Somatório;
- Calcular medida de área, utilizando o Limite de Somas;
- Calcular medida de volume, utilizando o Limite de Somas;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

Questão 1:

Calcular os Limites abaixo:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{5}{n} + \frac{3i}{n^2} \right)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4i^2}{n^3}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{15}{n^2} \cdot (2i-3)^2$$

Questão 2:

Calcular a área limitada pela reta de equação $f(x) = x+1$ e pelo eixo x , no intervalo $[0, 2]$, utilizando o Limite de somas:

Questão 3:

Esboçar no plano cartesiano, o sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x , da área limitada pela reta da equação $f(x) = x+1$, no intervalo real $[0, 2]$, e calcular o volume desse sólido, utilizando o Limite de somas:

ATIVIDADE 4: Teorema Fundamental do Cálculo

Objetivos:

- Aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo;
- Reconhecê-lo como ferramenta prática para o cálculo de Integral Definida;
- Determinar os Limites de integração;
- Esboçar os gráficos que representam as áreas;
- Montar a Integral Definida;
- Calcular as medidas das áreas das regiões compreendidas entre as curvas abaixo, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

Questão 1:

Resolver o exercício anterior utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, ou melhor, a Integral Definida:

Questão 2:

Calcular as Integrais abaixo:

a) $\int_{-2}^3 x \cdot dx$

b) $\int_3^{-2} x \cdot dx$

c) $\int_0^4 5 \, dx$

d) $\int_2^5 (2x + 3) \cdot dx$

e) $\int_{-2}^1 x^4 \cdot dx$

f) $\int_1^3 (4x^3 - 2x^2 + 5x - 6) \, dx$

g) $\int_{-1}^3 \frac{x+5}{3} \, dx$

$$\text{h) } \int_0^2 \frac{x^2 - 3x + 7}{x^4} dx$$

$$\text{i) } \int_1^4 \frac{5}{x} dx$$

Questão 3:

Determinar os Limites de integração, esboçar os gráficos que representam as áreas, montar a Integral e calcular as áreas das regiões compreendidas entre as curvas abaixo:

$$\text{a) } y = x^2 - 2 \text{ e } y = 2 \quad \text{Resp.: } \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

$$\text{b) } y = x^4 - 4x^2 + 4 \text{ e } y = x^2 \quad \text{Resp.: } 8 \text{ u.a.}$$

$$\text{c) } x + y^2 = 0 \text{ e } x + 3y^2 = 2 \quad \text{Resp.: } \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$

ATIVIDADE 5: O Limite de Somas definido como uma Integral Definida

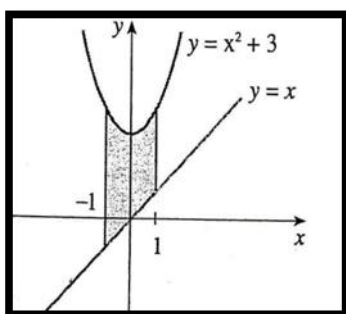
Objetivos:

- Relacionar a Integral Definida com o Limite de Somas;
- Utilizar essa relação para calcular medidas de áreas, volumes, comprimentos de curvas e valores médios;
- Resolver problemas, determinando os Limites de integração, montando a Integral Definida e efetuando os cálculos necessários;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

Questão 1:

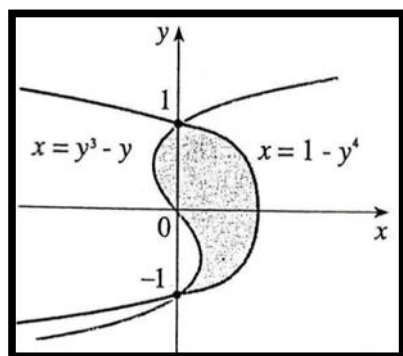
Determinar os Limites de integração, montar a Integral e calcular a área da região hachurada:

a)



Resp.: $\frac{20}{3}$ u.a.

b)



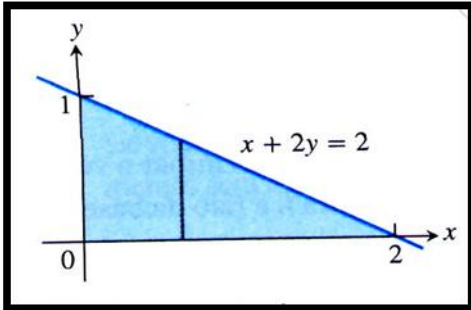
Resp.: $\frac{8}{5}$ u.a.

Questão 2:

Determinar os Limites de integração, montar a Integral e calcular o volume do sólido obtido com a rotação da região sombreada em torno do eixo dado:

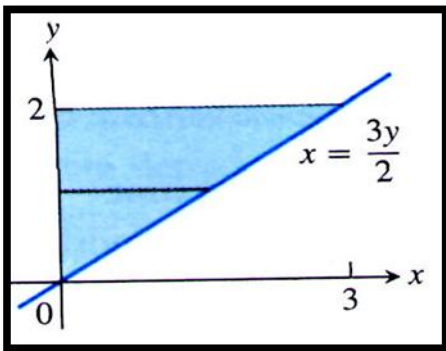
a) Em torno do eixo x

Resp.: $\frac{2\pi}{3}$ u.v.



b) Em torno do eixo y

Resp.: 6π u.v.

**Questão 3:**

Determinar os Limites de integração, esboçar o gráfico que representa o sólido, montar a Integral Definida e calcular o volume do sólido gerado em cada caso abaixo:

a) A região R, limitada pela curva $y = \frac{1}{4}x^2$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$, gira em torno do eixo x. Calcular o volume do sólido de revolução gerado:

Resp.: $\frac{1023}{80}\pi$ u.v.

b) Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = \frac{1}{4}(13 - x^2)$ e pela reta $y = \frac{1}{2}(x + 5)$:

Resp.: $\frac{1024}{80}\pi$ u.v.

- c) A região R, delimitada pela parábola $x = \frac{1}{2}y^2 + 1$ e pelas retas $x = -1$, $y = -2$, $y = 2$ gira em torno da reta $x = -1$. Determinar o volume do sólido de revolução obtido:

Resp.: $\frac{448}{15}\pi$ u.v.

Questão 4:

Montar a Integral e calcular o comprimento de cada curva abaixo, utilizando a Integral Definida. Caso não seja possível calcular a Integral pelos métodos convencionais, utilizar o *software* VCN:

a) $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[2]{(x^2 + 2)^3}$, de $x = 0$ a $x = 3$

Resp.: 12 u.c.

b) $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$, de $y = 1$ a $y = 3$

Resp.: $\frac{53}{6}$ u.c.

Questão 5:

Determinar o valor médio de $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[-3, 3]$ e calcular o valor de c , abscissa do ponto em que f assume esse valor médio:

ATIVIDADE 6: Desenvolvendo habilidades para o cálculo de área

Objetivos:

- Desenvolver habilidades para o cálculo de áreas, utilizando as Aproximações Finitas, o Somatório, o Limite de Somas, o Limite de Somas definido como uma Integral Definida, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, e pela geometria plana básica;
- Desenvolver habilidades quanto à utilização dos *softwares* GeoGebra e VCN, como ferramentas auxiliares para a resolução de problemas que envolvem Integral Definida;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida.

Questão:

Calcular a área limitada pela curva da função $f(x) = 2x$ e pelo eixo das abcissas, no intervalo $[0, 2]$, utilizando:

- a) Aproximações finitas com 4 retângulos semi-inscritos (Utilizar o GeoGebra);
- b) Limite de somas;
- c) O Limite de somas definido como uma Integral Definida;
- d) Teorema Fundamental do Cálculo;
- e) Geometria plana básica;
- f) O VCN para calcular a Integral da área.

ATIVIDADE 7: O uso do VCN para o cálculo da Integral Definida

Objetivos:

- Desenvolver habilidades para o cálculo de Integrais Definidas no *software* VCN;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida, e à utilização do *software* VCN.

Questão 1:

Montar a Integral para calcular o comprimento da curva $y = x^2$, $[-1, 2]$. calcular o comprimento da curva com o auxílio do VCN e traçar a curva com o auxílio do GeoGebra:

Questão 2:

Montar a Integral Definida para calcular o comprimento da curva $f(x) = \cos x$, entre $x = 0$ e $x = \pi$, calcular o comprimento da curva com o auxílio do VCN e traçar a curva com o auxílio do GeoGebra. Comparar o resultado obtido com a questão 2 da atividade 1:

ATIVIDADE 8: Experimentando objetos quaisquer com lápis, borracha, régua, calculadora, GeoGebra e o VCN

Objetivos:

- Calcular medida de área, volume e comprimento de curva por Aproximações Finitas, com o auxílio do GeoGebra;
- Determinar uma função a partir de pontos, utilizando o VCN;
- Calcular medida de área, volume e comprimento de curva, utilizando a Integral Definida e o VCN;
- Desenvolver habilidades para o cálculo de Integrais Definidas utilizando o *software* VCN;
- Incentivar o desenvolvimento da autonomia no aluno quanto ao estudo da Integral Definida e à utilização dos *softwares* GeoGebra e VCN.

Questão 1:

O grupo irá buscar no mapa do Brasil, uma determinada região e calcular a medida dessa área utilizando as aproximações finitas, manualmente, com retângulos, trapézios ou triângulos. Comparar o resultado obtido com a área real dessa região, utilizando a escala desse mapa, onde 1 cm equivale à 250 km no espaço real.

Questão 2:

Utilizando a mesma região, faça o que se pede:

- a) Dividir a região escolhida em duas ou mais regiões;
- b) Determinar vários pontos ao longo da linha de fronteira, usando a régua;
- c) Lançar esses pontos no VCN para determinar uma função que se aproxima do formato da região, determinar os Limites de integração, montar a Integral Definida e calcular a área utilizando o VCN para o cálculo dessa Integral:

Questão 3:

Calcular o volume de um copo descartável através das aproximações finitas, utilizando 8 cilindros inscritos de mesma altura, com o auxílio do *software* GeoGebra. Observe que esse copo é formado pela rotação de uma reta em torno de um eixo:

Questão 4:

Utilizando o mesmo copo, faça o que se pede:

- a) Visualizar a reta que, antes do giro, deu início ao sólido de revolução; determinar pontos sobre essa reta, usando a régua; lançar esses pontos no VCN para determinar uma função que se aproxima do formato da reta; determinar os Limites de integração; montar a Integral Definida e calcular o volume do copo, utilizando o VCN.
- b) Calcular o volume do copo, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo.
- c) Comparar os resultados obtidos nas letras **a** e **b** com o resultado obtido na questão 3.

Questão 5:

Calcular o comprimento de uma curva qualquer, utilizando as aproximações finitas, com o auxílio do GeoGebra para a visualização gráfica e geométrica:

Questão 6:

Utilizando a mesma curva, faça o que se pede:

- a) Lançar os pontos que foram obtidos na questão anterior, no VCN, para determinar uma função cujo gráfico se aproxima do formato da curva.
- b) Determinar os Limites de integração, e calcular o comprimento dessa curva, utilizando a Integral Definida e o VCN para calcular essa Integral.
- c) Comparar o resultado obtido na letra b com o resultado obtido na questão 5.

REFERÊNCIAS

- BARBIER, Renée. **A pesquisa-ação**. Tradução de Lucie Didio. Brasília: Liber Livro Editora, 2007. (Série Pesquisa).
- BARON, Margareth E. & BOS, H.J.M. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Brasília: Editora UNB, 1985.
- BATISTA, Roberto Júnior. **Uma breve introdução à história do Cálculo Diferencial e Integral**. Curitiba: Colégio Militar de Curitiba, 2010.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994. (Coleção Ciências da Educação).
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed., São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares para os cursos de graduação em engenharia**. Brasília, 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12991 Acesso em: 12 ago. 2013.
- COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2000.
- COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Editora Atual, 1995.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**. São Paulo: Editora Livraria da física, 2009
- EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática** Campinas, S.P.:Editora Unicamp, 2004.
- FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas/SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).
- FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**. 6. ed. São Paulo: Editora Pearson, 2006
- GEOGEBRA. **Download**. Disponível em: www.geogebra.org/download. Acesso em: 10 ago. 2014.
- GEOGEBRA. Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro. **O que é o GeoGebra?** Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br>. Acesso em: 15 ago. 2013.
- IBGE. **Estado@**. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/estadosat/>. Acesso em: 29 out. 2014.
- LUDKE, Menga & ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.
- PIAGET, Jean. **O estruturalismo**. 3. ed. São Paulo: Difel, 1979 (1968).
- POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PUC MINAS. **Laboratório de Cálculo Numérico**. Disponível em:
www.matematica.pucminas.br/lcn/vcn1.htm. Acesso em: 12 ago. 2014.

SANTOS FILHO, José Alípio. **Um caminho para uma maior compreensão do Cálculo Integral e Diferencial: um pouco de história**. 2002. 131f. Monografia (Especialista em Educação Matemática) - Centro Universitário UNI-BH, Belo Horizonte, 2002.

SHINYASHIKI, Roberto. **Problemas? Oba!** A revolução para você vencer no mundo dos negócios. São Paulo: Editora Gente, 2011.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Pioneira-Thomson Learning, 2014.

STOCHIERO, Arnaldo. **Iniciação ao Cálculo Integral**. Belo Horizonte: CEFET – MG, 1992.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

VYGOTSKY, L.S. **Formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed Editora, 1998.