



Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Cristiane Dias Rodrigues

UMA ABORDAGEM PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES
INTEGRANDO DIFERENTES LINGUAGENS

Belo Horizonte
2013

Cristiane Dias Rodrigues

**UMA ABORDAGEM PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES
INTEGRANDO DIFERENTES LINGUAGENS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Laudares

Belo Horizonte

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

R696a Rodrigues, Cristiane Dias
Uma abordagem para o estudo de sistemas lineares integrando diferentes linguagens / Cristiane Dias Rodrigues. Belo Horizonte, 2013.
154f.: il.

Orientador: João Bosco Laudares
Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

1. Sistemas lineares. 2. Funções algébricas. 3. Geometria. 4. Tecnologia da informação. 5. Comunicação e tecnologia. I. Laudares, João Bosco. II. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

SIB PUC MINAS

CDU: 517.941

Cristiane Dias Rodrigues

**UMA ABORDAGEM PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES
INTEGRANDO DIFERENTES LINGUAGENS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais perante a Banca Examinadora composta dos seguintes membros:

Prof. Dr. João Bosco Laudares (Orientador) - PUC Minas

Prof. Dr. Sandro Laudares - PUC Minas

Prof. Dr. Dimas Felipe de Miranda - PUC Minas

Belo Horizonte, 11 de março de 2013.

Dedico esta dissertação primeiramente a Deus.

Com similar intensidade dedico-a ao meu marido pela paciência em relação aos períodos dedicados à sua elaboração, ao meu filho querido que está chegando e a todos os meus familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Em especial, agradeço à Professora Maria Clara Rezende Frota pela amizade, apoio, incentivo, paciência e dedicação na orientação parcial desta dissertação. Em suma, minha admiração e eterna gratidão.

Ao Dr. João Bosco Laudares, cuja contribuição foi fundamental na orientação para a coerência e a finalização do trabalho.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa Práticas Investigativas em Educação Matemática (PINEM), por compartilharem suas experiências e conhecimentos.

Aos professores do curso de mestrado da PUC-MG pelas sugestões valiosas durante toda a nossa convivência.

Aos meus alunos, que contribuíram diretamente para realização desta pesquisa.

Ao meu marido Hudson, pelo apoio, paciência e incentivo para a realização dos meus projetos.

Aos meus pais e irmãos, sempre presentes em todos os momentos de minha vida.

A todos, muito obrigada!

Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo.

Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa.

Por isso aprendemos sempre.

Paulo Freire

RESUMO

Rodrigues, Cristiane Dias. Uma abordagem para o estudo de sistemas lineares integrando diferentes linguagens. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais). Belo Horizonte, MG: PUC-MG, 2013. 169p.

O objetivo da pesquisa apresentada nesta Dissertação foi de elaborar atividades matemáticas para o estudo de sistemas lineares, buscando uma correlação entre a Álgebra e a Geometria com a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs). Estas tinham como propósito contribuir para melhor utilização dos dois registros de representação: o algébrico e o geométrico. A metodologia foi empírica e qualitativa. Procurou-se verificar no estudo de sistemas lineares se o uso de diferentes registros de representação e o uso de TICs contribuem no processo do tratamento e da conversão entre registros algébricos e geométricos para uma aprendizagem mais eficaz-resultado e eficiente-processo. A Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval, quanto às transformações de conversão e tratamento, foram os pontos principais de abordagem e análise. Foi realizado um estudo piloto que, depois de ajustado, gerou sete atividades propostas aos alunos do Curso Superior de Sistema de Informação de uma universidade privada de Belo Horizonte, MG. Essas atividades versavam sobre sistemas lineares com seus respectivos objetivos, descrevendo intenções, ideias e perspectivas fazendo uso de TICs. As atividades contribuíram para aulas mais participativas, aumentando a motivação dos alunos. Ideias foram compartilhadas, enriquecendo o conhecimento adquirido da pesquisadora e dos alunos. Concluiu-se que softwares matemáticos efetivamente contribuem para melhor utilização das representações desenvolvidas, de forma que a Álgebra e a Geometria podem ser trabalhadas ao mesmo tempo, contribuindo para a assimilação do processo de cálculo de sistema linear.

Palavras-chave: Sistemas lineares. Resolução Algébrica e Representação Geométrica. Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC).

ABSTRACT

Rodrigues, Cristiane Dias. An approach to the study of linear systems by integrating different languages. Dissertation (Master in Teaching Science and Mathematics, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais). Belo Horizonte, MG: PUC-MG, 2013. 169p.

The goal of the research presented in this dissertation was to work out math activities to the linear systems study, seeking a correlation between algebra and geometry with the use of Information and Communication Technologies (ICTs). These had as purpose to contribute for better use of two records of representation: algebraic and geometric. The methodology was qualitative and empirical. One tried to check in the study of linear systems if the use of different records of representation and the use of ICTs contribute in the process of treatment and conversion between algebraic and geometric records for a more effective-outcome and efficient-process learning. The theory of Semiotic Representations of Raymond Duval, related to change of conversion and treatment, were the main points of approach and analysis. One conducted a pilot study that, once adjusted, generated seven proposed activities to the Information System third degree's students of a Belo Horizonte, MG, private University. Those activities turned on linear systems with their respective objectives, describing intentions, ideas and perspectives making use of ICTs. The activities contributed to more participatory classes, increasing the motivation of students. Ideas were shared, enriching the researcher and students' acquired knowledge. It was concluded that mathematical software effectively contribute to better use of representations developed, so the algebra and geometry can be worked at the same time, contributing to the assimilation of the linear system calculation process.

Keywords: Linear Systems. Algebraic and Geometric Representation Resolution. Information and Communication Technology (ICT).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Atividade que incentiva a investigação	41
Figura 2 -	Atividade que utilizam TICs	42
Figura 3 –	Atividades que retratam as possíveis posições das retas de um sistema linear 2x2	46
Figura 4 –	Atividade que retrata uma possível posição dos planos de um sistema linear 3 x 3	47
Figura 5 –	Atividade que retrata a posição das retas concorrentes em um único ponto de um sistema linear 2 x 2	50
Figura 6 –	Atividade que retrata as posições dos planos em relação a sistemas lineares 3 x 3	51
Figura 7 –	Atividade que retrata a posição das retas e dos planos em relação a sistemas lineares	54
Figura 8 –	Forma pela qual a dupla D1 realizou a construção das retas no Estudo Piloto	68
Figura 9 –	Ciclo do processo formativo educacional	70
Figura 10 –	Ciclo da relação da geometria e da álgebra através das TICs	71
Figura 11 -	Organograma mostrando os tipos de transformações entre representações semióticas no estudo de Sistemas Lineares (SL)	89
Figura 12 –	Transformação de tratamento: método do escalonamento na resolução de um sistema linear	92
Figura 13 –	Transformação de conversão: representação algébrica para a representação geométrica na resolução de um SL	92
Figura 14 –	Transformação de conversão: representação geométrica para a representação algébrica na resolução de um sistema linear	94
Figura 15 –	Transformações tratamento e conversão: método da matriz inversa na resolução de um sistema linear	96
Figura 16 –	Transformação tratamento e conversão: método da Regra de Cramer na resolução de um sistema linear	97
Figura 17 –	Método da adição – T3A6 e T3A63	99
Figura 18 –	Método da adição – T3A15	100
Figura 19 –	Método da adição – T3A12	101
Figura 20 –	Método da adição – T3A3	102
Figura 21 –	Método da adição – T3A6	102
Figura 22 –	Método da comparação – T3A48 e t3A49	103
Figura 23 –	Método da comparação – T3A11	104
Figura 24 –	Método da comparação – T3A6	105
Figura 25 –	Método da comparação – T3A9	105
Figura 26 –	Atividade 2 - Tarefa 1 T3 dupla D5	107
Figura 27 –	Atividade 2 - tarefa 1 T3 dupla D2	107
Figura 28 –	Atividade 2 tarefa 2a – T3 dupla D7	109
Figura 29 –	Atividade 2 tarefa 2b - T3 dupla D6	109

Figura 30 – Atividade 2 tarefa 2c – T3 dupla D18	110
Figura 31 – Atividade 2 tarefa 3 – T3 dupla D27	111
Figura 32 – Atividade 3 tarefa 1.1a – T3 dupla D22 - VCN	112
Figura 33 – Atividade 3 tarefa 1.1a – T3 dupla D22 - GeoGebra	113
Figura 34 – Atividade 3 tarefa 1.1b – T3 dupla D3	113
Figura 35 – Atividade 3 tarefa 2.1 – T3 dupla D3	114
Figura 36 – Atividade 3 tarefa 3- T3 dupla D9	115
Figura 37 – Atividade 3 tarefa 4.1 – T3 dupla D2	116
Figura 38 – Atividade 3 tarefa 4.2 – T3 dupla D2	117
Figura 39 – Atividade 3 tarefa 5 – T3 dupla D10	118
Figura 40 – Atividade 4 tarefa 1 – T3 dupla D3	119
Figura 41 – Atividade 4 tarefa 1 – T3 dupla D3	120
Figura 42 – Atividade 4 tarefa 3 – T3 dupla D4	121
Figura 43 – Atividade 5 tarefa 1 – T3 dupla D3	122
Figura 44 – Atividade 5 tarefa 1 – T3 dupla D11	123
Figura 45 – Atividade 5 tarefa 2a – T3 dupla D3	124
Figura 46 – Atividade 5 tarefa 2b – T3 dupla D22	125
Figura 47 – Atividade 5 tarefa 3 – T3 dupla D4	126
Figura 48 – Atividade 5 tarefa 4 – T3 dupla D14	127
Figura 49 – Atividade 6 tarefa 1c – T3 dupla D25	128

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Resultado da tarefa 1 da Atividade 1 do Estudo Piloto	64
Gráfico 2 – Resultado da tarefa 2 letra (a) da atividade 1 do Estudo Piloto	65
Gráfico 3 – Resultado da tarefa 2 letra (b) da atividade 1 do Estudo Piloto	66
Gráfico 4 – Resultado da tarefa 2 letra (c) da atividade 1 do Estudo Piloto	67
Gráfico 5 – Resultado da tarefa 3 da atividade 1 do Estudo Piloto	67
Gráfico 6 – Percentual de dificuldades na operacionalização de TICs	149
Gráfico 7 – Oportunidade anterior de associação de solução algébrica com a geometria	150
Gráfico 8 – Software para aprender sistemas lineares	150
Gráfico 9 – Alguma introdução por TIC em sistema linear	151
Gráfico 10 – Vantagens e desvantagens de introdução prévia de sistemas lineares	151
Gráfico 11 – Questões, uso apenas de software, necessidade de cálculo manual	152
Gráfico 12 – Questões e dificuldades com os softwares	152
Gráfico 13 - Representação geométrica como método para resolver sistemas lineares	153
Gráfico 14 – Métodos algébricos conhecidos	153
Gráfico 15 – Percepção de conhecimento adquirido com as atividades de TICs	154
Gráfico 16 – Propostas para a aprendizagem de sistemas lineares	154

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Quantidade de atividades propostas por Dante (2010) em relação ao tipo de representação	47
Quadro 2 – Quantidade de atividades propostas por lezziet al. (2010) em relação ao tipo de representação	48
Quadro 3 – Quantidade de atividades propostas por lezzi e Hazzan (1993) em relação ao tipo de representação	49
Quadro 4 – Quantidade de atividades propostas por Smole e Diniz (2010) em relação ao tipo de representação	52
Quadro 5 – Quantidade de atividades propostas de Kolman (1987) em relação ao tipo de representação	53
Quadro 6 – Quantidade de atividades propostas por Anton e Busby (2006) em relação ao tipo de representação	55
Quadro 7 – Cronograma de aplicação das atividades em 2012	70
Quadro 8 – Atividade 1 – Tarefa 1	72
Quadro 9 – Atividade 2 - Delineamento	73
Quadro 10 – Atividade 2 – Tarefa 1	74
Quadro 11 – Atividade 2 – Tarefa 2	74
Quadro 12 – Atividade 2 – Tarefa 3	75
Quadro 13 – Atividade 3 – Delineamento da abordagem matricial	75
Quadro 14 – Atividade 3 – Tarefa 1	76
Quadro 15 – Atividade 3 – Tarefa 2	77
Quadro 16 – Atividade 3 – Tarefa 3	77
Quadro 17 – Atividade 3 – Tarefa 4	78
Quadro 18 – Atividade 3 – Tarefa 5	78
Quadro 19 – Atividade 4 – Atividades complementares	79
Quadro 20 – Atividade 4 – Tarefa 1	79
Quadro 21 – Atividade 4 – Tarefa 2	80
Quadro 22 – Atividade 4 – Tarefa 3	80
Quadro 23 – Atividade 5 – Novas ideias SL 3x3	80
Quadro 24 – Atividade 5 – Tarefa 1	81
Quadro 25 – Atividade 5 – Tarefa 2	82
Quadro 26 – Atividade 5 – Tarefa 3	83
Quadro 27 – Atividade 5 – Tarefa 4	83
Quadro 28 – Atividade 6 – Abordagem matricial na solução SL 3x3	84
Quadro 29 – Atividade 6 – Tarefa 1	84
Quadro 30 – Atividade 6 – Tarefa 2	85
Quadro 31 – Atividade 6 – Tarefa 3	85
Quadro 32 – Atividade 7 – Atividades complementares	86
Quadro 33 – Atividade 7 – Tarefa 1	86
Quadro 34 – Atividade 7 – Tarefas 2, 3 e 4	86
Quadro 35 – Atividade 7 – Tarefa 5	87

Quadro 36 – Síntese da pesquisa de Di Pinto (2000)	143
Quadro 37 – Síntese da pesquisa de Celestino (2000)	144
Quadro 38 – Síntese da pesquisa de Nagamachi (2006, 2009)	145

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

A – Aluno

CTS – Ciência, Tecnologia e Sociedade

D - Dupla

DAM – Dificuldades de Aprendizagem em Matemática

ENEM – Exame Nacional de Ensino Médio

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação

MEC – Ministério da Educação

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

SL – Sistema Linear

T – Tarefa

TIC – Tecnologia de Informação e Comunicação

VCN – Virtual Cálculo Numérico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	AS DIFICULDADES E A IMPORTÂNCIA DA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA	21
2.1	A aprendizagem pela compreensão dos registros de representações	24
3	O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES COM O USO DOS REGISTROS E DAS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICs)	30
3.1	Pesquisas sobre geometria analítica, álgebra linear e o ensino e aprendizagem de sistemas lineares	30
3.2	O uso de diferentes registros de representação semiótica	34
3.3	Textos didáticos e as abordagens de sistemas lineares	37
3.3.1	<i>Os conteúdos abordados e a abordagem em termos de encadeamento de assuntos e da intenção dos autores em incentivarem a investigação</i>	39
3.3.2	<i>Os tipos de registros de representação empregados pelos autores (texto expositivo e exercícios)</i>	45
3.4	O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) no estudo de sistemas lineares	56
4	METODOLOGIA	60
4.1	O contexto da pesquisa	60
4.1.1	<i>A escola</i>	60
4.1.2	<i>Sujeitos de pesquisa</i>	61
4.2	Desenvolvimento da pesquisa	62
4.2.1	<i>Estudo piloto</i>	63
4.2.2	<i>Estudo principal</i>	69
5	DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	88
5.1	Entendimentos de Raymond Duval na prática	89
5.2	Análise da atividade 1	98
	Dificuldades vivenciadas na atividade 1	100
5.3	Análise da atividade 2	106
	Dificuldades vivenciadas na atividade 2	106
5.4	Análise da atividade 3	111
	Dificuldades vivenciadas na atividade 3	112
5.5	Análise da atividade 4	118
	Dificuldades vivenciadas na atividade 4	119
5.6	Análise da atividade 5	121
	Dificuldades vivenciadas na atividade 5	122
5.7	Análise da atividade 6	127
	Dificuldades vivenciadas na atividade 6	129
5.8	Análise da atividade 7	129
5.9	Análise geral do questionário aplicado após as atividades	129
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	131

REFERÊNCIAS	134
Anexo 1 – Quadro adaptado de Di Pinto (2000)	143
Anexo 2 – Quadro adaptado de Celestino (2000)	144
Anexo 3 – Quadro adaptado de Nagamachi (2006, 2009)	145
Apêndice 1 - Atividades do Estudo Piloto	146
Apêndice 2 - Questionário de pesquisa e Resultados	149

1 INTRODUÇÃO

O tema desta pesquisa é o ensino e aprendizagem de sistemas lineares integrando diferentes linguagens, principalmente a Álgebra e a Geometria. Diversas pesquisas já foram conduzidas investigando o tratamento da Geometria e da Álgebra no ensino de sistemas lineares no ensino superior, com o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs). As dificuldades encontradas na aprendizagem são amenizadas, trabalhando os registros da Álgebra e da Geometria para obter melhor compreensão da resolução de sistemas lineares.

A autora desta dissertação tem adquirido experiência na docência de várias disciplinas de Matemática, tais como Cálculo, Matemática Financeira e Estatística desde 2001. A Álgebra Linear e a Geometria Analítica apenas foram incluídas em suas atividades de professora a partir de 2011 no curso de Sistemas de Informação, em que esses conteúdos foram trabalhados em conjunto. Durante as aulas administradas verificou-se que, apesar de a disciplina lecionada ser nomeada Geometria Analítica e Álgebra Linear, a maioria dos textos didáticos trabalham os conteúdos de forma isolada em relação a sistemas lineares (SL).

A preocupação da pesquisadora se situou na realidade possível de o aluno poder confundir o objeto sistema linear com a representação algébrica. Verificou-se, então, a necessidade da visualização de pelo menos dois registros de representação – o algébrico e o geométrico – de forma que os alunos realmente aprendessem o objeto sistema linear (SL) independente da representação utilizada.

A aprendizagem de SL ocorre quando o aluno passa a ser o agente principal do processo, agindo ativamente, e o professor sempre buscando alternativas para aumentar o interesse do aluno em relação ao conteúdo estudado, interligando o ensino de SL por meio dos registros da Álgebra e da Geometria.

Há dificuldade dos alunos quanto ao estudo de sistemas lineares, já que foram ensinados anteriormente apenas por meio do registro da álgebra linear. A aprendizagem ocorre quando esse objeto matemático é apresentado na transformação de um registro para outro, ou seja, quando ocorre não somente o tratamento, mas também a conversão entre os registros de representação (DUVAL, 2009).

Duas questões foram formuladas:

- O uso de diferentes registros de representação semiótica em matemática pode facilitar a aprendizagem de sistemas lineares?
- O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) favorece a interligação da Álgebra e da Geometria e pode facilitar a aprendizagem de sistemas lineares?

Com o intuito de responder a essas perguntas, definiu-se elaborar as atividades investigativas sempre observando a interligação entre a Álgebra e a Geometria pela utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs).

Os objetivos específicos foram:

- Identificar as dificuldades vivenciadas pelos alunos ao trabalhar com sistemas lineares (SL) quanto às transformações dos registros de representação na visão de Raymond Duval;
- Revisar, sistematicamente, diversos estudos de sistemas lineares (SL) com o uso de registros e de instrumentos da Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC) no que se refere às pesquisas sobre geometria analítica, álgebra linear e o ensino e aprendizagem de SL e o que constam em textos didáticos;
- Identificar como a TIC tem sido utilizada e pesquisada pela comunidade acadêmica no ensino e aprendizagem de SL;
- Descrever as principais dificuldades dos alunos na compreensão de sistemas lineares com a integração de diferentes linguagens.

A metodologia compreendeu uma pesquisa diagnóstica desenvolvida com 89 alunos do curso de Sistemas de Informação de uma Instituição de Ensino Superior da cidade de Belo Horizonte, Minas Gerais. Foram elaboradas sete atividades considerando sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas, e de 3 equações e 3 incógnitas, que foram desenvolvidas individualmente ou em dupla. Nas atividades de investigação foram utilizados três softwares matemáticos: Winplot (Geométrico – SL 3x3), GeoGebra (Geométrico – SL 2x2) e Visual Cálculo Numérico (VCN) (Algébrico) por se considerar que o uso das tecnologias pode facilitar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e possibilitar melhor visualização das representações algébrica e geométrica. A aplicação e a análise demandaram 05 meses.

Estruturou-se a dissertação em seis capítulos, sendo o primeiro composto por esta Introdução, que descreve o interesse pela abordagem do assunto, apresenta seus objetivos e informa sobre o embasamento teórico e a metodologia utilizada.

No segundo capítulo, foram apresentadas as dificuldades e a importância da aprendizagem matemática, incluindo entendimentos sobre a aprendizagem pela compreensão dos registros de representações baseadas em Raymond Duval (2003, 2005, 2009, 2011).

O terceiro capítulo trata do estudo de sistemas lineares com o uso dos registros e das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), estando delineadas pesquisas sobre Geometria Analítica, Álgebra linear e o ensino e aprendizagem de sistemas lineares, bem como o uso de diferentes registros de representação semiótica. São citados, também, neste capítulo, noções e pareceres sobre textos didáticos e representação semiótica, além de informado o conjunto de textos selecionados para a análise no capítulo da discussão. Complementarmente, são revisados trabalhos acadêmicos que tratam do uso das TICs no estudo de sistemas lineares.

No quarto capítulo apresenta-se a metodologia adotada caracterizando o contexto da pesquisa, a análise do estudo piloto e a apresentação do estudo principal com os objetivos das atividades ajustadas a partir do resultado do estudo piloto.

No quinto capítulo, são apresentadas as análises sobre sistemas lineares, de livros textos e do uso das TICs pelos pesquisadores acadêmicos revisados e de livros textos selecionados pela autora deste estudo (conteúdos e abordagem em termos de encadeamento de assuntos e intenção dos autores em incentivarem a investigação e tipos de registros de representação empregados). Com base em Raymond Duval foram apresentados alguns exemplos matemáticos práticos. Em seguida, complementando o atendimento aos objetivos específicos, analisaram-se, uma a uma, as sete atividades aplicadas ao grupo de 64 alunos, dos 89 participantes, no que se refere às suas dificuldades e, a razão de seus equívocos no desenvolvimento das atividades investigativas, considerando as transformações entre os registros interferindo no estudo de sistemas lineares.

E finalmente, no sexto capítulo, são apresentadas as considerações finais dos principais resultados observados, as limitações no desenvolvimento da pesquisa e a expectativa em relação ao tema proposto.

O produto é constituído por sete atividades, composto por sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas e também de 3 equações e 3 incógnitas, que abordam as representações algébricas e geométricas.

Seguem-se as referências bibliográficas que possibilitaram o desenvolvimento do estudo, três anexos (revisão sistemática de estudos) e dois Apêndices (atividades do estudo piloto e o questionário de pesquisa).

2 AS DIFICULDADES E A IMPORTÂNCIA DA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

A aprendizagem da Matemática é tida, juntamente com a leitura e a escrita, como uma das aprendizagens fundamentais da Educação Básica, dado o caráter instrumental dos seus conteúdos (ORRANTIA, 2006). É preciso que os alunos aprendam sobre Matemática para entender o mundo ao seu redor, pois além de matéria escolar, é parte importante de suas vidas cotidianas. Entretanto, como disciplina, observa-se que pode ser fonte de dificuldades para muitos e, dentre os motivos que contribuem para isso, incluem-se particularidades que podem dificultar sua aprendizagem (ZATTI et al., 2010).

Grande parte dos alunos apresenta baixo nível de proficiência em relação à Matemática. Algumas avaliações são realizadas em âmbito nacional a fim de identificar o nível dos alunos nesta área do conhecimento. Pode-se citar, por exemplo, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que é realizado a cada dois anos e avalia o conhecimento de alunos em relação às disciplinas Português e Matemática. Segundo esse sistema, dos alunos de Ensino Médio que foram avaliados em 2003, apenas 5,99% se encontram no nível adequado de aprendizado, conseguindo interpretar e resolver problemas de forma competente, apresentando habilidades compatíveis com a série; 26,57% demonstram um nível intermediário de conhecimento desenvolvendo algumas habilidades de interpretação de problemas aproximando-se da série em que se encontravam, além de utilizar as operações de forma adequada e 67,44% apresentam resultado abaixo do esperado para o nível de escolaridade cursado, não conseguindo transpor para uma linguagem matemática os comandos operacionais compatíveis com a série, ou não conseguindo interpretar problemas do cotidiano, que envolve habilidades essenciais para a série (ALMEIDA, 2006).

Ao tratar da questão da etiologia das Dificuldades de Aprendizagem em Matemática (DAM), observa-se existirem muitas interrogações e, com frequência, não há uma única causa que possa ser atribuída, mas várias delas e em conjunto. As origens podem ser buscadas no aluno ou em fatores externos, em particular no modo do professor ensinar a Matemática. Quanto a aspectos referentes aos alunos, são consideradas a memória, a atenção, a atividade perceptivo-motora, a

organização espacial, as habilidades verbais, a falta de consciência e as falhas estratégicas como fatores responsáveis pelas diferenças na execução matemática (SMITH; STRICK, 2001).

Na opinião de Porro e Arango (2011, p.253), a relação que existe

[...] entre professoras/es e alunas/os dentro de sala de aula é fundamental, pois é nessa interação que estão em jogo transferências diárias que permitem o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem. É nesse intercâmbio que os docentes valorizam as posições que assumem frente à disciplina que ensinam e as transmitem a suas alunas e a seus alunos.

Uma questão importante para compreender as dificuldades refere-se à investigação que busca conhecer se o aluno com dificuldade de aprendizagem possui sintomas diferenciados no modo de processar os dados numéricos ou, se o processamento é semelhante ao de um aluno normal, existindo, no caso, um atraso significativo. Geralmente, o diagnóstico tenta identificar se os alunos com dificuldades de aprendizagem de matemática diferem quanto aos conceitos, habilidades e execuções em relação aos seus companheiros de igual ou menor idade sem dificuldades de aprendizagem. Trata-se de determinar se os que apresentam dificuldades de aprendizagem alcançam seu conhecimento aritmético de maneira qualitativamente distinta daquelas sem essas dificuldades, ou pelo contrário, adquirem esse conhecimento do mesmo modo, porém com ritmo diferenciado.

Teixeira (2004) destaca algumas características dos conceitos matemáticos que podem ser responsáveis pelas dificuldades encontradas na aprendizagem dessa disciplina, dentre elas: (1) a aprendizagem de conceitos matemáticos é de natureza lógico-matemática e não empírica; (2) os conceitos matemáticos se baseiam na capacidade geral da inteligência humana de fazer relações de natureza necessária e não contingente; (3) os conceitos matemáticos se formam por dedução e não por indução; (4) os conhecimentos matemáticos são abstratos, referindo-se a regularidades distantes do diretamente observável; (5) a generalização de regras, categorias ou estratégias demanda conhecer condições para sua aplicação; e (6) os conceitos são expressos em uma linguagem específica. Ainda podem estar envolvidos o próprio ensino da Matemática e as características dos processos cognitivos dos alunos.

Sanchez (2004) destaca que as dificuldades de aprendizagem em Matemática podem se manifestar nos seguintes aspectos:

- Dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; Dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente;
- Dificuldades quanto às crenças, às atitudes, às expectativas e aos fatores emocionais acerca da matemática;
- Dificuldades relativas à própria complexidade da disciplina, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos;
- Dificuldades mais intrínsecas, como bases neurológicas alteradas, atrasos cognitivos generalizados ou específicos, problemas linguísticos que se manifestam na matemática, dificuldades atencionais e motivacionais, dificuldades na memória, dentre outros;
- Dificuldades originadas no ensino inadequado ou insuficiente porque sua organização não está bem sequenciada ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes (SANCHEZ, 2004).

Para Machado (1992, p. 31), os alunos se dispersam quando o ensino da Matemática se faz rotineiro,

[...] ocultando consciente e inconscientemente sua verdadeira força e beleza, complicando-a inutilmente com fórmulas que não sabem de onde vem. O ensino deve alcançar uma investigação em que o aluno sinta a sensação de estar fazendo algo com isso, em que se sinta mais confiante colocando em prática o seu trabalho efetivo e com isso, faça-o perceber o seu próprio rendimento.

No ensino da Matemática, D'Ambrosio (1976, p. 35) afirma que para grande parte dos professores de Matemática há um equívoco, pois sua preocupação

[...] está em levar ao conhecimento do aluno uma série de algoritmos, fórmulas e símbolos, sem que fique explícito para que servem, onde serão usados e como serão usados. Não há, pois, uma preocupação maior de integrar os conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento.

Nesse contexto e com outro foco, muitas pesquisas têm sido desenvolvidas e tem-se defendido uma educação em ciências, tecnologia e matemática em uma perspectiva de literacia científica, tecnológica e matemática – por oposição a uma

lógica de mera instrução – que promova o desenvolvimento pessoal dos alunos e lhes permita pensar por si próprios, enfrentar a vida e participar ativa e adequadamente no planejamento e resolução de problemas e necessidades sociais, de forma a viabilizar o desenvolvimento de modos de vida mais justos e democráticos (TENREIRO-VIEIRA; VIEIRA, 2011).

Quando da busca de textos para compor o referencial teórico desta pesquisa percebeu-se sempre estar destacada relativa aversão dos alunos em relação à matemática e a falta de articulação entre os saberes escolares, como em Pantoja (2008), pesquisa adiante detalhada. Em perspectiva similar, neste estudo foi colocada a seguinte questão norteadora: *a conexão entre o método de substituição (ensino fundamental) e o método do escalonamento (ensino médio) favorece a conversão de registros semióticos desses métodos?*

Na prática docente diária, defende-se que a aprendizagem ocorre quando o aluno é capaz de estabelecer conexões entre as diversas representações dos objetos matemáticos estudados, pois a compreensão ocorre pela articulação dos registros. Quando o aluno executa um único tratamento pode sentir dificuldades no aprendizado, pois não articula os conceitos. Assim, é necessário desenvolver vários tratamentos, trabalhando a conversão entre pelo menos dois registros de representação, e isso implica compreender como as representações semióticas favorecem a aquisição do conhecimento, ou seja, implica revisar entendimentos de Raymond Duval (2009).

2.1 A aprendizagem pela compreensão dos registros de representações

Conforme Duval (2009), a aprendizagem das matemáticas constitui um campo de estudos privilegiados para a análise de atividades cognitivas fundamentais, como a conceituação, o raciocínio, a resolução de problemas e até a compreensão do texto que apresenta a questão colocada.

Nessa perspectiva, as representações semióticas em matemática não são apenas indispensáveis, mas necessárias ao desenvolvimento da disciplina, pois a possibilidade de efetuar os tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Em outras palavras, o desenvolvimento das representações mentais é processado como uma

interiorização das representações semióticas, da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções (VYGOTSKY, 1988).

Segundo Duval (2003), a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar o registro várias vezes, pois essa mudança de registro facilita a aquisição de um conceito. Ao lidar com as várias representações de um mesmo objeto matemático, o aluno passa a ter mais segurança na compreensão e na resolução de problemas.

Os registros de representação semiótica “constituem os graus de liberdade que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma idéia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor” (DUVAL, 2009, p.37).

No domínio da matemática as representações semióticas assumem um papel relevante porque não sendo acessíveis pela percepção, os objetos matemáticos só podem sê-lo por suas representações. Vale lembrar que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes dependendo da necessidade e do uso.

A comunicação em Matemática se dá por meio de representações semióticas. Assim, ao aprender Matemática é imprescindível que os alunos não confundam os objetos e suas respectivas representações semióticas, pois uma coisa é o objeto matemático, outra é sua representação. Nesse sentido Duval (2005, p. 21) apresenta o que denomina de *paradoxo cognitivo*: “como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?” Como resposta a esta pergunta, o autor afirma que a compreensão em Matemática está ligada ao fato de se dispor de ao menos dois registros de representação diferentes para um mesmo objeto, pois essa seria a única maneira de não confundir um objeto e a sua respectiva representação semiótica.

Para analisar a atividade matemática na perspectiva de ensino e de aprendizagem, Duval (2005, 2009, 2011) afirma ser necessário realizar uma abordagem cognitiva sobre os dois tipos de transformações de representações fundamentais para essa análise, os *tratamentos* e as *conversões* de registros de representações semióticas. O termo *conversão* é utilizado para designar as transformações que ocorrem com mudança de sistema (registro), mas conservando-

se os mesmos objetos matemáticos. O termo *tratamento* é usado para denotar as transformações que ocorrem dentro de um mesmo sistema. No estudo de funções, por exemplo, uma atividade que solicite os zeros da função quadrática $y = x^2 + 3x + 2$ envolve um *tratamento* e a atividade que solicite o gráfico da mesma função é uma *conversão*.

Em outras palavras, um *tratamento* é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele em que as regras de funcionamento são utilizadas, ou seja, um tratamento mobiliza apenas um registro de representação. Ao contrário, a *conversão* é uma transformação que faz passar de um registro a outro, requerendo a coordenação dos registros no sujeito que a efetua (DUVAL, 2009).

Segundo Duval (2005), a *conversão* pode ser analisada sob dois aspectos: do *ponto de vista matemático*, a conversão é utilizada somente para a escolha de um determinado registro, em que haveria um tratamento de forma mais fácil, menos trabalhoso possível ou para obter um segundo registro, que serviria de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro.

Por exemplo, na resolução da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ (registro 1) que também pode ser representada por $(x - 3)(x - 3) = 0$ (registro 2), é possível resolvê-la na primeira forma representada empregando a fórmula de Bhaskara (tratamento 1); já na segunda forma, cuja resolução se torna menos trabalhosa, basta verificar a condição: $x - 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$, para concluir que as raízes $x_1 = x_2 = 3$ (tratamento 2). Como se observa, o tratamento 2 leva a uma solução de maneira menos trabalhosa (FEIO; SILVEIRA, 2007).

Já do *ponto de vista cognitivo*, é a atividade de conversão que figura como sendo responsável pelos mecanismos que facilitam a compreensão dos conceitos dos objetos matemáticos, ou seja, a conversão não tem um papel essencial nos processos matemáticos de justificação ou de prova, haja vista que tal justificativa se baseia num tratamento efetuado em um registro estabelecido. Mas do ponto de vista cognitivo é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática (DUVAL, 2005).

Conforme Silveira (2005), um dos grandes problemas da linguagem matemática é a economia de linguagem, pois com a utilização de poucos símbolos

muito se pode dizer de um determinado objeto matemático, por exemplo, com $A = \{x \in \mathbb{Z} / x > 2\}$.

Para quem não tem o domínio da linguagem matemática, Feio e Silveira (2007) observam que essa sentença parece algo escrito em uma língua estrangeira, necessitando ser traduzida para ser compreendida. Em sala de aula, espera-se que os alunos sejam capazes de ler, escrever e interpretar essa linguagem, na qual eventualmente pouco ou nada foram alfabetizados.

Conforme Davis e Oliveira (1990), no trabalho intelectual os conceitos são os principais instrumentos. Sua funcionalidade e a utilização de cada conceito de forma deliberada e voluntária dependem da consciência do aluno. Assim, para que um aluno entenda o conceito de uma função, é necessário que ele compreenda outros conceitos, como o de par ordenado ou de relação, e por meio de uma série de retificações e generalizações.

Na realidade, é sempre por meio de uma significação que se faz a apreensão perceptiva ou conceitual de um objeto. A apreensão das cores ou das figuras geométricas são exemplos típicos muito elementares. Assim,

[...] quando a determinação de um objeto pressupõe a apreensão de uma multiplicidade de dados, cujo número e variedade excedem a capacidade de apreensão simultânea, a apreensão dessa multiplicidade como uma unidade simples pode se fazer apenas sobre o mundo da significação (DUVAL, 2009, p.41).

Da mesma forma, quando um objeto aparece como uma unidade simples,

[...] a discriminação de um objeto torna-se objeto suscetível de ser remarcado, isto é, apenas se ele apreende uma significação própria. Significação e estatuto de 'objeto suscetível de ser visto ou apreendido por alguém' são os dois aspectos recíprocos de toda representação consciente. A significação é a condição necessária de objetivação para o sujeito, isto é, da possibilidade de tomar consciência (DUVAL, 2009, p.41).

Pode-se dizer que a análise do desenvolvimento dos conhecimentos e a dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais relativas à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos confrontam três fenômenos que aparecem estreitamente ligados: (1) a diversificação dos registros de representação semiótica, (2) a diferenciação entre representante e representado e (3) a coordenação entre os diferentes registros (DUVAL, 2009).

A *diversificação dos registros de representação semiótica* pode ser visualizada nos esquemas, nas figuras geométricas, nos gráficos cartesianos ou nas

tabelas, sistemas que colocam, individualmente, questões de aprendizagem específicas. A *diferenciação entre representante e representado* diz respeito à forma e ao conteúdo de uma representação semiótica, ou seja, a possibilidade de associar essa representação a outras e de integrá-la em procedimentos de tratamento. Duval (2009) comenta que essa diferenciação não é facilmente adquirida. No que diz respeito à *coordenação entre os diferentes registros*, pode-se afirmar que o conhecimento de regras de correspondência entre dois sistemas semióticos diferentes não é necessariamente suficiente para que eles possam ser mobilizados e utilizados juntos. O obstáculo está exatamente no fenômeno da não congruência entre as representações produzidas em sistemas diferentes.

A articulação de registros é um caminho para a compreensão em matemática e “as conversões são as mudanças de registro mais eficazes na aquisição de um conceito” (MARANHÃO; IGLIORI, 2003, p.60). Para Duval (2003), um fator importante no fenômeno da conversão é o sentido em que ela ocorre. Desta forma, a conversão nem sempre se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada e, na maioria das vezes, o que ocorre é a priorização de um dos sentidos.

Duval (2009) considera que as representações podem ser mentais, internas ou computacionais e semióticas. Para o autor, as representações mentais cumprem a função de objetivação. Consistem num conjunto de imagens e concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre aquilo que está associado ao objeto ou a situação. Essas representações estão associadas à interiorização das representações externas.

As representações internas ou computacionais são aquelas que privilegiam o tratamento de uma informação que, por sua vez, se caracterizam pela execução automática de uma determinada tarefa a fim de produzir uma resposta adaptada à situação. Estas representações tratam, assim, da codificação de uma informação. O algoritmo da adição é um exemplo deste tipo de representação. Essas representações não são conscientes do sujeito, mas um registro mecânico que o sujeito executa sem pensar em todos os passos necessários para a sua resolução (VERTUAN, 2007). As representações semióticas, por sua vez, são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento (DUVAL, 2009).

Na visão de Damm (1999, p.139), “o sujeito acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização (por exemplo, os algoritmos computacionais ou mesmo os algoritmos das operações)”.

Retomando-se Duval (2003, 2005, 2009, 2011) e resumindo o conteúdo importante deste capítulo para a análise da pesquisa, os objetos matemáticos são abstratos e, portanto, há necessidade de que se usem representações semióticas para torná-los acessíveis. Na Matemática, a compreensão do conteúdo ocorre quando o estudante consegue distinguir o objeto de suas possíveis representações e não confundir, por exemplo, o objeto sistema linear com sua representação algébrica ou gráfica. Pode ocorrer perda de compreensão quando o estudante não consegue distinguir o objeto estudado de suas possíveis representações, mas as representações semióticas são indispensáveis para compreender o objeto matemático. Quando Duval (2003, 2009, 2011) fala de representação, relaciona o objeto com o conteúdo e o tipo da representação, pois os objetos matemáticos são acessíveis apenas pelas representações. De acordo com Duval:

[...] não se pode ter compreensão em matemática se nós não distinguirmos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras [...] porque um objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (DUVAL, 2009, p. 14)

Nesta dissertação optou-se pelo tema de ‘uma abordagem para o estudo de sistemas lineares integrando diferentes linguagens’ e com base em Raymond Duval.

No estudo do objeto matemático Sistemas Lineares, as representações algébricas são a abordagem encontrada na maioria dos textos didáticos. Ao resolver um sistema linear pelo método algébrico, não necessariamente pode-se afirmar que o aluno conhece o objeto matemático sistema linear, pois executando somente procedimentos algébricos, poderia confundir o objeto com sua representação, no caso, a algébrica. O mesmo ocorreria se apenas a representação geométrica fosse empregada. É através das possíveis representações semióticas para Sistemas Lineares, entre elas a representação algébrica e a geométrica, que o aluno tem acesso ao objeto sistema linear. Desta forma defende-se menor risco de o aluno confundir a representação algébrica de um sistema linear com o próprio objeto sistema linear.

3 O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES COM O USO DOS REGISTROS E DAS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICs)

A finalidade deste capítulo é apresentar o embasamento teórico para o desenvolvimento da construção da pesquisa e de sua avaliação reflexiva. Constatam-se delineamentos de pesquisas desenvolvidas anteriormente sobre geometria analítica, álgebra linear e sistemas lineares. Cabe ressaltar que essas pesquisas são descritas brevemente, pois o conteúdo de sua análise encontra-se no capítulo 5 desta dissertação, Discussão e Análise dos Resultados.

À luz de Raymond Duval (1998, 2003, 2011) por meio dos Registros de Representação Semiótica, a pesquisa foi conduzida considerando o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) na construção de atividades propostas pelas teorias de Borba e Penteadó (2010), Pedro Demo (2008, 2009) e Ubiratan D'Ambrosio (1999).

3.1 Pesquisas sobre geometria analítica, álgebra linear e o ensino e aprendizagem de sistemas lineares

Di Pinto (2000) apresentou como objetivo principal de seu trabalho fazer um levantamento das pesquisas realizadas no Brasil na década de 90 em relação ao processo ensino-aprendizagem em Geometria Analítica, analisando 13 trabalhos (Anexo 1). Esse autor buscou identificar o tipo da obra, o objetivo da pesquisa, a metodologia utilizada para responder à questão levantada e embasamento teórico que deu suporte a pesquisa e as conclusões observadas. Na análise de textos didáticos, Di Pinto (2000) cita pesquisas de Munhoz (1999), Freitas (1999), Jardinetti (1991) e Bittar (1998, 1998a) em relação ao objeto trabalhado, observando que a maioria dos livros não disponibiliza uma quantidade interessante de atividades que trabalham com a representação geométrica privilegiando a representação algébrica, não permitindo a visualização que contribui no processo ensino-aprendizagem, facilitando a compreensão do objeto estudado.

Celestino (2000) fez o levantamento das produções científicas de teses, dissertações e artigos brasileiros referentes ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear na década de 90, apresentando como descrição o tipo da obra, o objetivo da

pesquisa, a metodologia, as fundamentações teóricas que contribuem para um ensino mais eficiente e as conclusões observadas em relação a problemas que colaboram para melhorar o ensino da matemática (Anexo 2). Em sua dissertação, Celestino (2000) comenta sobre a importância da Aritmética, da Geometria e de sistemas de equações lineares relacionados à Álgebra Linear e considera em sua análise três trabalhos que abordam sistemas de equações lineares (SILVA, 1999; DIAS, 1998, 1998a).

Nagamachi (2006, 2009) pesquisou algumas dissertações e teses em educação matemática no Brasil com o tema equações do ensino médio. Dentre os vários tipos de equações existentes escolheu seis trabalhos elaborando um quadro (Anexo 3) considerando o título, autoria, ano de defesa, número de páginas, orientador, instituição, resumo, objetivo, metodologia, fundamentação teórica, conclusão e referências bibliográficas. O autor analisa trabalhos sobre as equações do ensino médio, sendo que apenas a de Lima (1999) considera o uso de tecnologias e a de Freitas (1999) indica seu uso como importante recurso de ensino-aprendizagem. A maioria dos trabalhos considerados por Nagamachi (2006, 2009) utiliza a análise dos textos didáticos. Freitas (1999) e Lima (1999) também utilizaram os registros de representação de Duval (1993, 1996) como embasamento teórico.

Além dos trabalhos citados, muitos outros foram desenvolvidos, como, por exemplo, o de Pantoja (2008), que construiu e avaliou uma sequência de ensino que relacionou o saber matemático referente ao conteúdo de sistema linear ensinado pelo método da substituição (tratamento algébrico) no ensino fundamental com o método do escalonamento (tratamento aritmético-matricial) no ensino médio, buscando verificar se essa conexão poderia promover a aprendizagem do objeto sistema linear.

Battaglioli (2008) afirma em seu estudo que para os alunos a álgebra é abstrata e difícil. Apesar de executarem os cálculos, não os compreendem e não verificam sua aplicabilidade. Apesar de adquirirem as técnicas necessárias para resolver sistema linear não obtém condições de interpretar os resultados encontrados. O autor analisou três livros didáticos mencionando o tipo de registro de representação utilizado no ensino de sistema linear, considerando os registros da língua natural, do registro gráfico e do registro algébrico. Em relação aos registros gráficos verificou que são abordados somente nos textos explicativos e pouco explorados nos exercícios resolvidos ou propostos, colocados, portanto, apenas

como informação. Destes registros, o que mais predomina em relação ao sistema linear é o algébrico. Assim, o aluno pode dominar a técnica, mas pode não compreender que a solução encontrada verifica as equações desse sistema linear. Assim, é importante considerar a representação gráfica em que o aluno visualiza a solução encontrada. Os livros apresentam maior número de exposição do registro gráfico dos sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, além da linguagem natural, pois é através dela que o aluno verifica maior sentido, relacionando sistema linear com seu dia-a-dia.

Pinho (2010) objetivou verificar se as matrizes facilitam o tratamento de SL mostrando como o uso de matrizes na resolução de SL é útil no estudo de certos fenômenos. Apresentou como proposta a introdução no currículo do ensino médio do conteúdo de álgebra linear sendo nomeado: “matrizes e suas aplicações” verificando de que forma este conteúdo pode contribuir para SL. Na parte referente à SL, o aluno deveria adquirir conhecimentos no sentido de transcrever enunciados em SL e conseqüentemente resolver e interpretar estes SL, quando possível, pelo método de Gauss-Jordan. Pinho (2010) considerou importante o incentivo da utilização das tecnologias como apoio na resolução de SL e operações com matrizes, e cita os programas GeoGebra e Winplot como referências de TICs como programas matemáticos que trabalham a parte algébrica e geométrica. Afirmou, ainda, que através da significação geométrica e algébrica de matrizes pode ocorrer maior facilidade de assimilação do conceito de matriz e considerou válido trabalhar com aplicação de matrizes e geometria auxiliando na resolução de SL. Saliou a importância de o aluno escrever matematicamente considerando ainda esta atividade como pouco explorada pelos educadores matemáticos.

Santos (2011) relacionou os registros de representação de Raymond Duval (2003) com a teoria das matrizes e, analisou a exploração dos livros didáticos em relação aos registros de representação. A escolha da teoria das matrizes foi o fato de o conteúdo apresentar registros algébricos, gráficos e geométricos. Com relação ao embasamento teórico de Duval (2003), o autor também concorda que a compreensão da matemática ocorre quando o aluno é capaz de distinguir o objeto de suas representações. Com relação aos sistemas lineares Santos (2011) considerou os seguintes registros de representação possíveis: escrita matricial, escrita algébrica, língua natural e gráfico cartesiano, incluindo as possíveis conversões entre esses registros de representação.

Outra pesquisa revisada foi a de Steinhorst (2011), que buscou verificar a contribuição da planilha Excel no ensino dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares. A pesquisa foi realizada com alunos do ensino médio de uma escola particular e envolveu um estudo comparativo entre duas turmas, sendo que uma trabalhou com a planilha e outra não o fez. Com a planilha, ao invés de os alunos utilizarem um tempo grande com cálculos, houve disponibilidade temporal para a interpretação dos problemas. As TICs foram consideradas pelo autor como importante meio de aprendizagem significativa. A planilha executa os cálculos, mas o aluno interpreta as questões. A experiência foi considerada positiva, melhorando as aulas teóricas pelas TICs, além de associar atividades interdisciplinares entre os conteúdos de Física, Biologia e Educação Física, possibilitando o incentivo aos estudos matemáticos com maior participação dos alunos nas aulas.

Chiari (2011) objetivou identificar em sua pesquisa se os alunos conseguiam através das operações elementares transformar os SL em outros SL equivalentes. Concluiu que os alunos conseguiam obter o resultado do SL, mas apresentaram dificuldades em justificar as transformações necessárias.

Em sua dissertação, Jordão (2011) elaborou uma sequência didática em que relacionava as representações algébrica e geométrica de sistemas lineares 2×2 e 3×3 com o auxílio do software Winplot junto a alunos do 2º ano do ensino médio. Utilizou como referencial teórico Raymond Duval (2003), considerando a importância da diversidade dos registros e a simultaneidade da utilização das representações através de transformações de tratamento e conversão para se compreender o objeto matemático. Com o software Winplot Jordão (2011) trabalhou com atividades em que o aluno convertia registros algébricos para gráficos, diferente do método tradicional (lápiz e papel) e, conseqüentemente, apenas o registro algébrico. O pesquisador previa que a visualização computacional apontaria para situações mais interessantes em que o aluno trabalhasse de forma a visualizar geometricamente o que era feito algebricamente. Na pesquisa, observou que alguns alunos apresentavam dificuldades em leitura e interpretação de texto no sentido de buscar solucionar a questão. Quando tinham que executar combinação entre duas a duas equações apresentavam dificuldades significativas para obter novos sistemas lineares e obter a solução procurada. Na realidade, é importante se trabalhar dois registros para verificar se a solução encontrada está correta. Dúvidas surgiram em relação a sistemas de equações lineares com solução possível indeterminada. A

autora considera importante a visualização através de recursos computacionais contribuindo para a construção do conhecimento. Na pesquisa, Jordão (2011) constatou que os alunos apresentaram dificuldades em visualização e interpretação de sistemas lineares 3×3 quanto à interseção de três planos, inclusive quanto à limitação do programa em relação à definição da interseção entre os planos, e à necessidade do tratamento algébrico para confirmar a solução encontrada. A autora verificou a importância do tratamento e da conversão entre os registros de representação para melhor compreensão do objeto sistema linear.

Bertolazi (2012) apresentou como objetivo investigar processos de pensamento avançado observados em registros escritos no sentido de obter a abstração matemática, uma proposta de avaliação reflexiva. Observou com estudantes de Licenciatura em Matemática que eles apresentaram dificuldades em relação à visualização principalmente quando se tratava de sistema linear de três equações e três variáveis. Os alunos lembraram que estudaram no ensino médio apenas os sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas e apresentaram conhecimento de três diferentes registros dentre os nove considerados por Bertolazi (2012). Apenas três dos alunos conseguiram demonstrar a capacidade de formalizar, generalizar e sintetizar as tarefas em relação a sistemas lineares. A conclusão do autor é que o tratamento de Sistemas Lineares é importante em relação à visão da Álgebra Linear e da Geometria Analítica, pois pode contribuir para que o aluno reflita sobre a significação da solução encontrada, explorando na sua resolução diversas representações matemáticas e manipulando diferentes conceitos matemáticos.

Pelos entendimentos até aqui colocados e de todas as pesquisas analisadas que mencionam o tema SL, as que relacionaram as representações algébricas e geométricas obtiveram resultados positivos, inclusive as referentes às transformações de conversão e tratamento.

3.2 O uso de diferentes registros de representação semiótica

Pelo fato de a teoria de Raymond Duval estar sendo bastante utilizada em pesquisas, como também por defendê-la como necessária, fez-se um levantamento de algumas dissertações que tratam de temas matemáticos com embasamento

teórico de Duval e considerando os dois tipos de transformação, ou seja, tratamento e conversão.

Traldi Junior (2002) buscou verificar se os alunos eram capazes de resolver problemas de programação linear através das transformações entre os registros de representação de um objeto matemático: sistemas de inequações do 1º grau. Considerou os seguintes registros de representações: algébrico, gráfico e linguagem natural. Verificou que os alunos apresentam dificuldades: em converter da linguagem natural para a sentença matemática, da sentença matemática para a representação gráfica, interpretar gráficos na representação gráfica de inequações e na solução algébrica de sistemas de inequações. Considerou a importância de trabalhar com atividades de tratamento, conversão e coordenação, acreditando que podem contribuir bastante para a formação de conceitos e aplicação de inequações do 1º grau, pois ocorreram melhoras significativas nos conhecimentos referentes ao conteúdo de inequações. Traldi Junior (2002) considerou importante trabalhar a técnica da representação gráfica dos problemas de inequações, pois os resultados alcançados na representação algébrica são verificados através da visualização gráfica.

Karrer (2006) abordou o estudo das transformações lineares tendo como referência as ideias de Duval (2003), utilizou softwares matemáticos de geometria dinâmica e também procedeu à análise dos livros didáticos do ensino superior em relação a transformações lineares, considerando os registros de representação utilizados e as conversões executadas nesses livros. Em relação aos alunos foi constatado que apresentam dificuldades consideráveis em relação à transformação de conversão de representações e dificuldades na distinção entre o objeto e sua representação. A autora verificou também problemas na não congruência de questões e dificuldades em assimilação de alguns conceitos de álgebra linear e o uso de registros geométricos.

Silva (2007) analisou o uso de diferentes registros de representação semiótica para resolver problemas de matemática. Foi verificado que o uso de registros de representação apresenta implicações positivas na resolução de problemas. Os registros considerados nesta pesquisa foram figural, aritmético, algébrico, linguagem natural e gráfica. Em relação à atividade proposta da dissertação, que envolvia a conversão entre os registros da língua corrente para a matemática, algébrica para gráfica, gráfica para a corrente, percebeu que os alunos não usam os diferentes

registros de representação, normalmente utilizam as linguagens aritmética e numérica. O mesmo autor observou também que poucos alunos recorrem à variedade dos registros e, portanto, poucas conversões executadas e em relação a que aqueles alunos que utilizaram registro de representação semiótico tiveram melhor desempenho do que os que não utilizaram as representações do objeto estudado. Observou, também, que os alunos apresentam dificuldades em relação à linguagem algébrica e conseqüentemente a de maior sucesso foi a linguagem aritmética. Quando na atividade existiu a liberdade de escolha do registro ocorreu o maior sucesso obtido na questão do que quando a atividade estipulava o registro de representação a ser utilizado, não aplicando a linguagem requerida de acordo com o solicitado. Verificou o uso de linguagem natural iniciando ou terminando questões. Aqueles alunos que não representaram o objeto através de algum registro de representação não obtiveram sucesso na questão. Silva (2007) considerou a importância de explorar os objetos matemáticos através dos diferentes registros de representação possíveis do objeto em estudo e principalmente executar a transformação de conversão entre estes registros. Saliou a importância de propor atividades representando o objeto explorado através dos diferentes registros de representação, principalmente a conversão entre estes registros de representação e atividades com tradução do enunciado da linguagem natural para a linguagem matemática.

Braga (2009) trabalhou os conceitos das funções afim e quadrática utilizando como recurso a planilha com possibilidades de conversão entre os registros de representação algébrico, tabular e gráfico. O uso das transformações dos registros de representação e a planilha utilizada nas atividades proporcionaram uma melhor compreensão das funções afim e quadrática.

Dell'orti (2010) tratou das representações gráficas: conhecimentos mobilizados por alunos do ensino médio na compreensão e análise de informações contidas em gráficos, considerando a dificuldade de os alunos em interpretar e analisar informações contidas em gráficos. A pesquisa foi norteada pela teoria de Duval (2003), incluindo a necessidade de desenvolver tratamentos e conversões para interpretar gráficos. Foram constatados tratamentos dos registros numéricos e gráficos e conversões entre gráficos e numéricos e vice-versa, linguagem natural e gráfico e gráfico e natural em relação à atividade proposta pelo autor. Dell'orti (2010) obteve como resultado que os alunos apresentam dificuldades em interpretar e

construir gráficos de funções e executar operações de subtração e divisão nas questões que necessitavam dessas operações, inclusive montavam corretamente as operações, mas definindo resultados equivocados, conseguiram interpretar corretamente as informações obtidas dos gráficos. Em relação às representações semióticas os alunos conseguiram realizar as conversões do registro gráfico para o numérico, e numérico para gráfico, e da linguagem natural para o gráfico e tratamentos nos registros numéricos e gráficos. O autor considerou de extrema importância o uso dos registros de representações semióticas verificando as condições dos alunos em executar as transformações, ou seja, converter e tratar os diversos registros disponíveis nas atividades aplicadas em relação a gráficos.

Alves (2010) propôs atividades estratégicas de ensino-aprendizagem em relação ao conteúdo de introdução ao pensamento combinatório que teve como principal objetivo através dos registros de representação semiótica que os alunos identificassem as formas combinatórias relacionando com probabilidade. Devido à dificuldade dos alunos em relação ao conteúdo de análise combinatória, apresentou uma alternativa com atividade diferenciada, em que foi constatado que os registros de representação facilitam os cálculos de possibilidades, arranjos e combinações. Apresentou atividades que necessitam de tratamento e conversão e que através destas transformações o aluno consegue perceber com maior facilidade as diferentes possibilidades nos cálculos de análise combinatória. Alves (2010) confirmou uma atenção especial dada às dissertações, pois apresentam atividades com metodologia diferenciada, que favorecem o processo ensino-aprendizagem e a reflexão da prática educacional.

Cabe ressaltar que o interesse em analisar pesquisas anteriormente realizadas foi buscar identificar como o embasamento teórico de representação semiótica de Raymond Duval tem sido aplicado, percebendo-se ser válido o uso dos registros de representação para melhorar a compreensão dos estudos dos objetos matemáticos.

3.3 Textos didáticos e as abordagens de sistemas lineares

No Capítulo 5 desta dissertação procedemos à análise de textos didáticos do ensino fundamental, médio e superior referentes ao conteúdo de sistemas lineares, buscando verificar dois aspectos empregados e incentivados pelos autores: (1) os

conteúdos e a abordagem em termos de encadeamento de assuntos e da intenção dos autores em incentivarem a investigação e (2) os tipos de registro de representação empregados pelos autores (texto expositivo e exercícios).

As obras selecionadas para a análise dos sistemas lineares foram as seguintes:

- Ensino Fundamental
IMENES, Luiz Marcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para Todos**. São Paulo: Scipione, 2002. 352p.
- Ensino Médio
DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática. 2010. 264 p.
IEZZI, Gelson et al. **Matemática** volume único. 4 ed. São Paulo: Atual, 2010. 688 p.
IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**. Vol. 4. 6 ed. São Paulo: Atual, 1993. 229 p.
SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**. Ensino médio. vol. 2. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 192 p.
- Ensino Superior
STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 1987. 470p.¹
KOLMAN, Bernard. **Álgebra Linear**. 3 ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987. 228 p.
ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman. 2006. 610 p.

Para efeito da análise sobre sistemas de equações lineares (SL) e considerando o referencial teórico de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e o uso das TICs, tornou-se necessário também analisar os conteúdos de livros adotados por escolas e a abordagem em termos de encadeamento de assuntos e da intenção dos autores em incentivarem a investigação.

¹ Livro adotado pela instituição de ensino em que foi realizada a pesquisa (PLT - Programa do Livro Texto).

3.3.1 Os conteúdos abordados e a abordagem em termos de encadeamento de assuntos e da intenção dos autores em incentivarem a investigação

Dentre os diversos textos didáticos do Ensino Fundamental, considera-se a coleção 'Matemática Para Todos' (IMENES; LELLIS, 2002), em que o conteúdo referente a sistemas lineares começa a ser ensinado no 8º ano (referente à antiga 7ª série) do ensino fundamental nesse momento, abordando a resolução algébrica pelos métodos da adição e da substituição de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. No 9º ano (antiga 8ª série) o livro aborda sistemas de equações de 2º grau pelo método da substituição, inclusive mostrando problemas relacionados a sistemas de equações do 2º grau. O livro não aborda sistemas de equações lineares pelo método da comparação, que seria bastante interessante ser abordado na etapa introdutória de sistemas lineares. Não aborda questões simples, mas importantes, que incentivam o aluno a investigar como, por exemplo, escrever, através da linguagem natural, sobre o que significa a solução encontrada.

Optou-se em analisar quatro textos didáticos do Ensino Médio:

- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática. 2010. 264 p.
- IEZZI, Gelson et al. **Matemática** volume único. 4 ed. São Paulo: Atual, 2010. 688 p.
- IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**. Vol. 4. 6 ed. São Paulo: Atual, 1993. 229 p.
- SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**. Ensino médio. vol. 2. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 192 p.

Resumindo-os brevemente, esses livros didáticos tratam dos seguintes assuntos:

- Dante (2010)

Dante aborda o conteúdo de sistemas lineares após matriz e determinante, em relação a sistema linear separa os sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas (2x2) dos sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas (3x3), apresenta também problemas de aplicações. Resolve sistema linear em relação à representação algébrica apenas pelo método do escalonamento. Não apresenta atividades que incentivam o aluno a investigar, expõe o conteúdo através de texto

didático, atividades propostas, mas nenhum desafio ou atividade que incentive a investigação.

- lezziet al. (2010)

Os autores apresentam inicialmente matriz, determinante e logo após sistemas lineares, o conteúdo de sistemas lineares é abordado da seguinte forma: definição de equação linear e sua solução, representação matricial, abordam sistemas lineares 2×2 e 3×3 juntos, inclusive pelos métodos do escalonamento e da Regra de Cramer, sistemas homogêneos e equivalentes, no final uma discussão de um sistema linear em que considera mais uma variável além de x , y e z e que para cada valor definido da variável em questão o sistema é classificado como sendo sistema possível determinado, indeterminado e impossível. Apresentam 24 testes de vestibulares e três questões de desafios sendo nestas atividades o aluno deve analisar as questões de aplicação e escreve com suas palavras o que observou. Essas três questões de desafio incentivam o aluno a investigar, mas o número de questões que incentivam o aluno a pesquisar é reduzido.

- lezzi e Hazzan (1993)

Os autores abordam o conteúdo da seguinte forma: matriz, determinante e após sistemas lineares. Sobre o conteúdo de sistemas lineares fazem uma introdução, desenvolvendo os métodos pela Regra de Cramer e escalonamento.

- Smole e Diniz (2010)

As autoras fazem uma inversão na abordagem dos temas iniciando por sistemas lineares, matrizes e finalmente determinantes, sendo que normalmente os conteúdos são abordados da seguinte forma: matrizes, determinantes e sistemas lineares. Apresentam atividades resolvidas que auxiliam nos exercícios propostos, três desafios sobre sistemas lineares, três desafios sobre matrizes e sistemas lineares e um invente você sobre determinante e sistema linear. Apresentam a definição de equações lineares. Separam sistemas lineares 2×2 dos 3×3 , os sistemas lineares 2×2 sua resolução é apresentada pelos métodos da substituição, da adição e da representação gráfica por aproximação e sua classificação e no caso de sistemas lineares 3×3 pelos métodos da adição por escalonamento. Apresentam atividades computacionais através do software Winplot para os sistemas lineares 2×2 e apresenta no para saber os sistemas lineares 3×3 . Quando abordam matrizes, apresentam juntamente com resolução de sistemas lineares o método da matriz inversa e quando aborda o conteúdo de determinante trata da resolução de sistemas

lineares $n \times n$ pelo método da Regra de Cramer e sobre sistemas lineares homogêneos. O livro incentiva o aluno a investigar, conduzindo-o a inventar atividades similares às atividades propostas, como mostra a Figura 1.

4. Cristiane foi a uma papelaria comprar fichários e canetas. As canetas custavam R\$ 2,50 cada e os fichários, R\$ 5,00 cada. Cristiane gastou R\$ 40,00 na papelaria. Quantos fichários e quantas canetas terá comprado?

a) Traduza esse problema por meio de uma equação.
b) Determine dois pares de valores que sejam solução da equação.
c) Indique um par de números que não seja solução do problema.
d) Há pares de números que são soluções da equação, mas não do problema? Justifique.
e) Organize uma tabela de modo que você encontre todas as soluções do problema.

6. Descubra entre os valores a seguir quais são soluções da equação $x + y + z = 15$.

a) (1, 3, 4)	e) (2, -2, 15)
b) (5, 5, 5)	f) (5,5; -4,5; 5)
c) (-1, 14, 0)	g) (0, 0, 8)
d) (2, -2, 1)	h) (1, -2, 7)


invente você

1. Invente um problema como o 4.
2. Crie um exercício como o 6.
3. Elabore um problema que envolva a equação do exercício 6.

Figura 1 – Atividade que incentiva a investigação

Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010, p.322.

O livro disponibiliza também atividades computacionais utilizando o software Winplot, com questões que incentivam o aluno a redigir utilizando a linguagem natural sobre a solução encontrada do sistema linear, conforme a Figura 2.



NO COMPUTADOR

Representação de sistema linear no Winplot

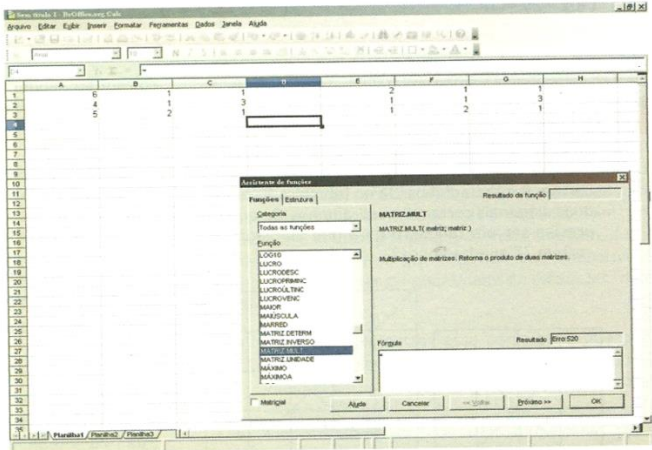
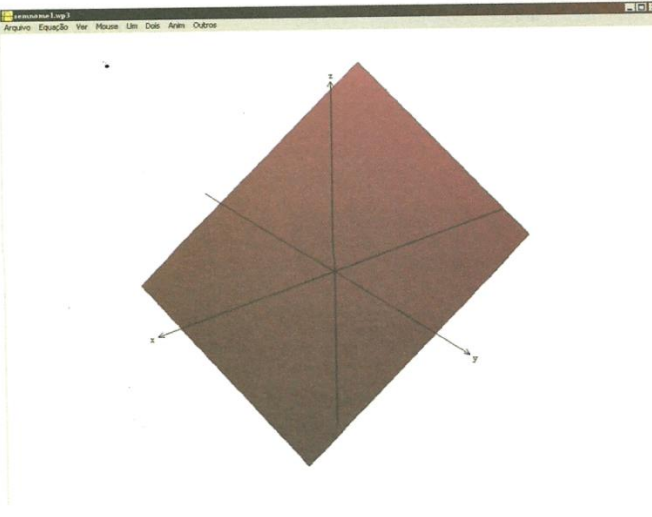
Como será a representação do sistema $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = -2 \end{cases}$ no Winplot?

Que tipo de gráfico será gerado?
Vamos experimentar.

1ª proposta:
Em Janela, selecione "3-dim". Vá até "Equação" e clique em "Explícita".
Observe que na caixa de diálogo é necessário digitar a função z nas variáveis x e y . Assim, para representar a equação $2x + y + 3z = 1$, é necessário isolar a variável z :
$$z = \frac{-2x - y + 1}{3}$$

Agora, usamos essa equação no Winplot como mostramos a seguir.

Ao clicar em "OK", o gráfico deverá aparecer. Caso não visualize os eixos, vá até "Ver" e clique em "Eixos".

Imagens: Reprodução

SISTEMAS LINEARES UNIDADE 12 | 335

Figura 2 - Atividade que utilizam TICs

Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010, p.335.

Foram analisados os quatro textos didáticos do ensino médio, podemos concluir que o único que incentiva a investigação é o de Smole e Diniz (2010), com questões interessantes em que o aluno cria atividades similares às disponíveis. Este livro também é o único do ensino médio que faz a inversão dos conteúdos trabalhados, facilitando assim um entendimento melhor do aluno em relação aos conteúdos: sistema linear, matriz e determinante, trabalhando a solução do sistema

linear pelo método da matriz inversa no conteúdo matriz e a solução do sistema linear pelo método da Regra de Cramer em determinante. Apenas o livro de Smole e Diniz (2010) trata da solução de sistemas lineares pelo método da matriz inversa.

Em relação aos livros do Ensino Superior a analisar optou-se por três textos didáticos:

- STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra Linear e geometria analítica**². 2 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 1987. 470 p.;
- KOLMAN, Bernard. **Álgebra Linear**. 3 ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987. 228 p.
- ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman. 2006. 610 p.

Resumindo-os brevemente, esses livros didáticos tratam dos seguintes assuntos:

- Steinbruch (1987)

O conteúdo é abordado introduzindo vetores e logo após começa por matriz, determinante e dando sequência ao conteúdo sistema linear, classificando os diversos sistemas, mostrando suas equivalências, obtendo soluções algébricas através dos métodos de Gauss-Jordan, da matriz inversa, mas não apresenta a solução geométrica e também não apresenta o método algébrico da solução do sistema linear pela Regra de Cramer. O conteúdo de sistemas lineares é iniciado através da definição e solução de equação linear, sistemas de equações lineares e sua solução, sistema compatível dividido em sistema linear determinado, indeterminado e incompatível, sistemas equivalentes, operações, homogêneo, solução pelos métodos de Gauss-Jordan (escalonamento), matriz inversa, sistema de M equações lineares com N variáveis (para $m \neq n$) e (escalonamento), sistemas de equações lineares homogêneos (escalonamento) e apresenta quatro problemas resolvidos pelo método algébrico do escalonamento.

Por se tratar de um texto didático de maior acessibilidade ao aluno, o livro de Steinbruch (1987) é uma adaptação, portanto não apresenta atividades propostas e conseqüentemente também não apresenta atividades que incentivam a investigação.

² Livro adotado pela instituição de ensino em que foi realizada a pesquisa.

- Kolman (1987)

Kolman inicia o conteúdo de sistemas lineares, logo em seguida matrizes e determinantes. Define equações lineares, sistema de equações lineares, solução através do método de eliminação. Apresenta o método da adição que nomeia como método de eliminação e quando aborda matrizes, determina a solução de sistema linear pelo método da forma reduzida escalonada por linhas e de eliminação de Gauss-Jordan, define sistemas lineares homogêneos, método da matriz inversa e quando trata do conteúdo determinante aborda a solução pela Regra de Cramer. Além dos exercícios propostos, apresenta a teoria com atividades do tipo 'mostre que' e incentiva o aluno a pensar além do proposto, buscando soluções mais complexas e interessantes.

- Anton e Busby (2006)

Os autores abordam primeiramente sistemas lineares, em seguida matrizes e após determinantes. Em relação a Sistemas lineares faz a introdução conceituando equações lineares, equação linear homogênea, equação não linear, sistemas lineares e sua solução, diferenciam sistemas lineares com duas ou três incógnitas, suas representações geométricas lembrando que no plano a equação linear define o encontro de retas com três possibilidades possíveis sendo: coincidentes, paralelas ou encontrando em um único ponto e no espaço o encontro de planos e suas possíveis posições. Disponibilizam um exemplo que relaciona vetor com combinações lineares. Anton e Busby (2006) abordam os seguintes tipos de resolução de sistema linear na representação algébrica: resolução pelo método de redução por linhas (escalonamento, como combinações lineares de vetores-coluna, através das equações paramétricas, eliminação Gaussiana e de Gauss-Jordan) diferenciam as duas formas de resolução de sistema linear a Gaussiana com redução das variáveis definindo zeros abaixo dos pivôs e Gauss-Jordan redução das variáveis definindo zeros acima e abaixo dos pivôs. Definem sistema linear homogêneo. Mostram as aplicações de sistema linear (posicionamento global, análise de redes, circuitos elétricos, equilibrando equações químicas, interpolação polinomial) quando abordam matrizes resolvem sistema linear por inversão de matriz, resolvem múltiplos sistemas lineares com uma matriz de coeficientes comuns e abordam consistência de sistemas lineares falando também sobre a geometria de sistemas lineares (Relação entre $ax = b$ e $ax = 0$ trasladando o conjunto-solução, consistência de um sistema linear do ponto de vista vetorial, hiperplanos e

interpretação geométrica de espaços-vetoriais). Interessante comentar que Anton e Busby (2006) definem que se o sistema linear é homogêneo então o espaço-solução definem a própria origem ou uma reta que passa pela origem, ou um plano que passa pela origem. Quando abordam o conteúdo sobre determinante, obtêm a solução do sistema linear pela regra de Cramer.

Em relação aos três textos didáticos do ensino superior concluímos que o único que apresenta a sequência matriz, determinante e finalmente sistema linear é o PLT de Steinbruch (1987). Os outros dois livros analisados abordam sistema linear no início, em seguida matriz e por último determinante. Em relação ao incentivo da investigação, o único livro que não dispõe atividades deste nível é o PLT.

3.3.2 Os tipos de registros de representação empregados pelos autores (texto expositivo e exercícios)

Foram considerados para análise os tipos de registros de representação utilizados pelos autores: linguagem natural (situações-problema), numérica, algébrica, geométrica e matricial (Matriz inversa e Regra de Cramer).

Quanto ao texto didático do ensino fundamental de Imenes e Lellis (2006) e observando o embasamento teórico abordado e os exercícios resolvidos e propostos, constatou-se existir somente o registro algébrico (métodos da adição e substituição), não abordando a representação algébrica da comparação. Apresenta atividades na parte conversando sobre o texto em que o aluno escreve através da linguagem natural sobre o sistema linear em questão.

Considerando os quatro textos didáticos do ensino médio:

- Dante (2010)

No embasamento teórico o autor expõe o método algébrico e o geométrico de forma a mostrar aos alunos as diversas representações matemáticas construídas, mas apresenta de forma pronta e acabada e não estipula atividades pertinentes a relação dos dois métodos. Não incentiva os alunos a investigarem situações em que através da representação algébrica determine à geométrica e vice-versa.

Segue abaixo a amostra de como Dante (2010) retrata os sistemas lineares considerados 2×2 (2 equações e 2 incógnitas) através de suas representações algébricas e geométricas, considerando as três posições possíveis das duas retas, sendo: retas concorrentes em um único ponto (sistema possível e determinado),

retas paralelas (sistema impossível) e retas concorrentes (sistema possível indeterminado) (FIGURA 3).

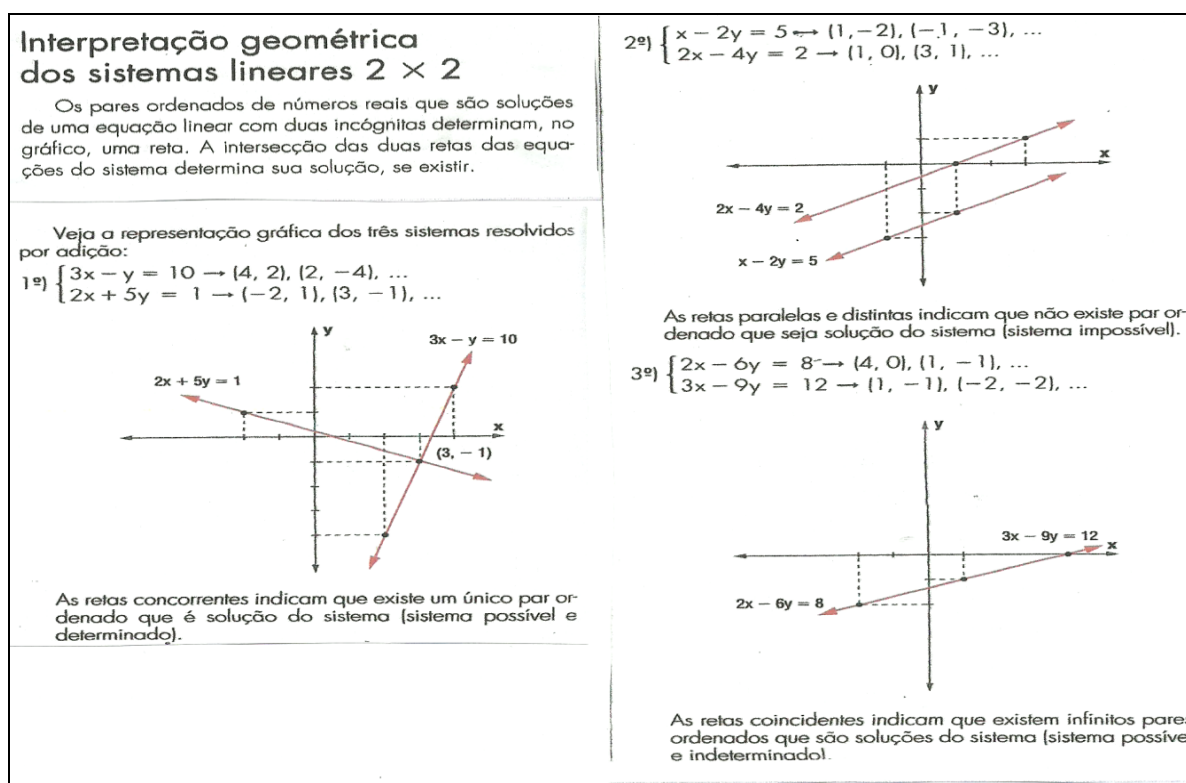



Figura 3 – Atividades que retratam as possíveis posições das retas de um sistema linear 2×2
 Fonte: Dante, 2010, p. 268.

Em relação a sistemas lineares 3×3 , segue abaixo (FIGURA 4) apenas uma amostra das 8 possibilidades consideradas pelo livro da posição dos três planos constituídos na resolução do sistema linear, sendo este exemplo constituído por equações lineares múltiplas, definindo um único plano e, portanto, sistema possível indeterminado.

Possibilidades para as posições relativas dos três planos no espaço

Existem oito possibilidades para as posições relativas dos três planos, π_1 , π_2 e π_3 , no espaço.

1ª possibilidade: os três planos coincidem
 Neste caso, todos os pontos $P(x, y, z)$ de π_1 são soluções do sistema. Há, portanto, infinitas soluções para o sistema.



O sistema é possível e indeterminado (SPI).
 Pode-se provar que isso ocorre quando L_1 , L_2 e L_3 são múltiplos uns dos outros.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \rightarrow L_1 = (1, 1, -1, 1) \\ 2x + 2y - 2z = 2 \rightarrow L_2 = (2, 2, -2, 2) \\ 4x + 4y - 4z = 4 \rightarrow L_3 = (4, 4, -4, 4) \end{cases}$$

Nesse caso, temos $L_2 = 2L_1$, $L_3 = 4L_1$ e $L_3 = 2L_2$.
 Da primeira equação, $x + y - z = 1$, tiramos que $z = x + y - 1$. Assim, as soluções do sistema são todos os

Figura 4 – Atividade que retrata uma possível posição dos planos de um sistema linear 3 x 3
 Fonte: Dante, 2010, p. 271, ensino médio.

O Quadro 1 demonstra os tipos de representações utilizadas pelo texto didático de Dante (2010) em relação à quantidade de atividades propostas:

Quadro 1 – Quantidade de atividades propostas por Dante (2010) em relação ao tipo de representação

Linguagem natural (interpretação em situações-problemas)	Numérica	Representação geométrica
8 questões [aplicação n°s 34 a 38 p.279, programação linear 39 a 41].	7 questões [equações lineares n°s1 (diferenciar equações lineares das não-lineares), 2, 4 e 6(3 variáveis), 3, 5(3 variáveis) – páginas 266 e 267 1 questão n° 7 – página 267 (solução do sistema)]	Não apresenta
Representação algébrica	Matricial (matriz/sistema linear), (determinante/sistema linear).	
26 questões [2x2 n° 8 – página 269 método da adição, n° 9, páginas 269 e 270 classificação, 10 até 15 página 270 e 271 discussão 1 questão]. [3x3 n° 16 página 274 classificação e resolução, 17, 18, 19 página 275 equivalência, 20 até 23 página 276 escalonamento, 24, até 28 páginas 277 e 278 discussão 29 a 33 sistemas homogêneos págs. 278 e 279].	Não apresenta	

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Analisando o Quadro 1 constatou-se que o texto didático não aborda nas atividades propostas questões que relacionam a representação algébrica com a representação geométrica e não trabalha sistema linear relacionando com matriz (matriz inversa) e determinante (Regra de Cramer). Apresenta uma quantidade de atividades numéricas consideráveis e atividades de aplicação em que o aluno deve montar o sistema linear para resolver e a representação mais utilizada na resolução de um sistema linear foi à representação algébrica.

- lezziet al. (2010)

Este texto didático não apresenta no embasamento teórico e nem nas atividades propostas atividades que relacionam a representação algébrica com a geométrica. O Quadro 2 apresenta os tipos de representações utilizadas pelo livro didático em relação à quantidade de atividades propostas.

Quadro 2 – Quantidade de atividades propostas por lezziet al. (2010) em relação ao tipo de representação

Linguagem natural (interpretação em situações- problemas)	Numérica	Matricial (matriz/sistema linear), (determinante/sistema linear).
11 questões [nº 8, nºs 27 a 29 nºs 35 a 37 e 54, 55, 59, 60 (aplicação Regra de Cramer)].	13 questões [nºs 1, 2, 4(2 variáveis), 3, 5 e 7(3 variáveis), 6(4 variáveis) nºs 9, 10, 11, 12, 13, 18, (solução do sistema)].	13 questões [nºs 14 à 17(matriz/sistema linear – página 317, 318 49 a 53 e 56, 57, 58 e 61 pág. 327 Regra de Cramer].
Representação geométrica	Representação algébrica	
Não apresenta	43 questões [nºs 19 até 26, 30 até 34 – páginas 319, 320, 323, 324, 38 e 39 – página 325, 40 a 48 (sistemas homogêneos) escalonamento e resolução 62 até 80 – página 330 e 331 discussão].	

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

De acordo com o Quadro 2 pode-se constatar que, das atividades propostas, os autores apresentam questões de aplicação em que o aluno determina o sistema linear definido, uma quantidade considerável de atividades numéricas. Não apresentam a conversão entre as representações algébrica e geométrica e nem a solução de um sistema linear pelo método da matriz inversa, somente resolvem pelo método da Regra de Cramer. Apresentam uma maior quantidade de atividades que resolvem pela representação algébrica.

- lezzi e Hazzan (1993)

Trabalha apenas a representação algébrica, não incentivando com atividades investigativas como, por exemplo, converter a representação algébrica em geométrica e geométrica em algébrica. O Quadro 3 apresenta os tipos de representações utilizadas pelo livro didático em relação à quantidade de atividades propostas por lezzi e Hazzan.

Quadro 3 – Quantidade de atividades propostas por lezzi e Hazzan (1993) em relação ao tipo de representação

Linguagem natural (interpretação em situações-problemas)	Numérica	Representação geométrica
Não apresenta	6 questões [344 (diferenciar equações lineares das não-lineares), 345 e 347 (3 variáveis), 346(4 variáveis), página 132, n ^{os} 350 e 351 – página 133, solução do sistema].	Não apresenta
Representação algébrica	Matricial (matriz/sistema linear), (determinante/sistema linear)	
66 questões [n ^{os} 363 até 371 – páginas 143, 144, 152 e 153 escalonamento n ^{os} 372 até 409 – páginas 153 até 161, discussão. n ^{os} 410 até 428 – páginas 163, 164, 165 e 166, sistemas homogêneos].	35 questões [n ^{os} 348, 349, 352 – pág. 132 e 133 matriz/sistema linear n ^{os} 353 até 362 – pág. 137, 138 e 139 Teorema de Cramer, n ^{os} 429 a 450 matriz escalonada]	

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

O texto de lezzi e Hazzan (1993) não apresenta atividades de aplicação, não apresenta também atividades que convertem a representação algébrica para a geométrica. A maioria das atividades propostas apresentadas é de representação algébrica.

- Smole e Diniz (2010)

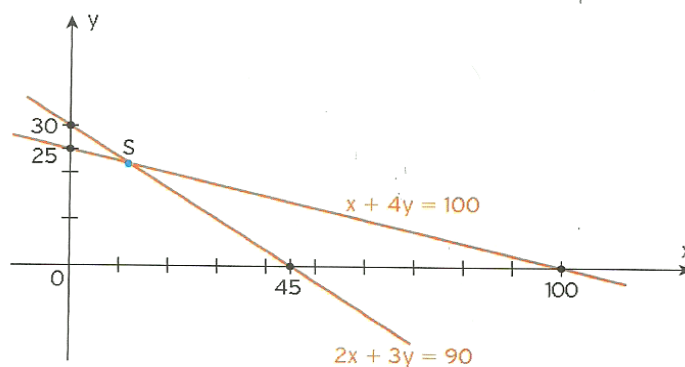
O livro apresenta no embasamento teórico a conversão entre a representação algébrica e a representação geométrica. O livro apresenta as três possibilidades referentes à representação das retas obtidas das equações lineares que são: concorrentes em um único ponto, paralelas e coincidentes.

Apresenta-se a seguir somente a solução do sistema linear pelas retas concorrentes em um único ponto, ou seja, sistema possível determinado (FIGURA 5).

● Solução pela representação gráfica

Outra forma de resolvermos um sistema é por meio de uma representação gráfica. Nesse caso, resolver o sistema significa encontrar os pontos comuns às duas retas que representam as equações do sistema.

Como $x + 4y = 100$ e $2x + 3y = 90$ são funções do 1º grau, o gráfico de cada equação é uma reta. Veja.



A partir dos gráficos, podemos achar valores aproximados de x e de y que são coordenadas do ponto S e solução do sistema. Assim, temos $x \cong 10$ e $y \cong 20$. De fato, já vimos que a solução é $x = 12$ e $y = 22$.

324 | PARTE 4 | ÁLGEBRA

Figura 5 – Atividade que retrata a posição das retas concorrentes em um único ponto de um sistema linear 2 x 2

Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010, p. 324.

Em relação aos sistemas lineares 3 x 3, na parte ‘para saber mais’, o livro retrata 6 das 8 posições possíveis em relação a três planos, conforme a Figura 6.

PARA SABER MAIS

Sistemas lineares 3×3 e Geometria

Nos itens anteriores, relacionamos sistemas lineares 2×2 e 3×2 a retas representadas no plano cartesiano. Vimos que as soluções dos sistemas correspondem às posições entre essas retas.

- ▶ retas concorrentes \longrightarrow sistema possível e determinado com solução única
- ▶ retas paralelas \longrightarrow sistema impossível e sem solução
- ▶ retas coincidentes \longrightarrow sistema possível e indeterminado com infinitas soluções

Um sistema linear 3×3 pode ser associado a três planos no espaço, cada um deles correspondendo a uma das equações.

E quais são as possíveis posições de três planos no espaço?

Os três planos podem se encontrar em um único ponto. Nesse caso, o sistema linear é possível e determinado e tem solução única.

Os três planos podem ainda ser paralelos entre si.

Pode também ocorrer de dois deles serem paralelos e o terceiro não.

Os três planos podem também possuir uma reta comum a eles ou ser coincidentes. Nessa situação, o sistema linear é possível e indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções.

Por fim, os planos podem se encontrar, mas apenas dois a dois, não havendo ponto comum que pertença aos três.

Nesses três últimos casos, o sistema linear é impossível, isto é, sem solução.

Figura 6 – Atividade que retrata as posições dos planos em relação a sistemas lineares 3×3
 Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010, p.334.

Não apresenta a possibilidade de dois planos coincidentes e o terceiro paralelo aos outros dois planos (sistema impossível), dois planos coincidentes e o terceiro intersectando segundo uma reta (sistema possível indeterminado).

O Quadro 4 mostra os tipos de representações utilizadas pelo texto didático em relação à quantidade de atividades propostas.

Quadro 4 – Quantidade de atividades propostas por Smole e Diniz (2010) em relação ao tipo de representação

Linguagem natural (interpretação em situações- problemas)	Numérica	Representação geométrica
13 questões [nºs 1 e 4 (aplicação), página 322, 13 a 16 página 327, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30 página 333].	6 questões [nº 5 (3 variáveis), 6 (3 variáveis) – página 322, 17 a 20 página 327].	7 questões [2 e 3 (equação linear gráfica) página 322, 7, 8, 10, 11 página 326, 27 página 333]
Representação algébrica		Matricial (matriz/sistema linear), (determinante/sistema linear)
13 questões [32 a 36 página 364, 9 página 326, 12 página 327, 21, página 332, 24 página 333, 22 a 25 (homogêneo) página 377.	12 questões [10 a 16 (Regra de Cramer) página 374, 17 a 21 (determinante e análise de sistemas) página 376].	

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

O texto didático de Smole e Diniz (2010) apresenta em relação a atividades propostas sobre representação algébrica um número suficiente deste tipo de representação e, conseqüentemente, apresenta um considerável número de atividades utilizando a representação geométrica e matricial, enquanto que os outros três textos didáticos analisados disponibilizam uma quantidade exagerada de atividades que utilizam a representação algébrica e quando apresentam a representação geométrica fazem de forma reduzida em relação à quantidade de atividades.

Em relação à solução do sistema linear pelo método da matriz inversa, Smole e Diniz apenas determinam a fórmula de solucionar o sistema linear nos exercícios resolvidos da página 361 ER11 letra a, em que determina $X = A^{-1}B$, no entanto não apresentam atividades com aplicação desta fórmula.

Levando em consideração a conversão entre as representações algébrica e geométrica somente dois livros dos analisados mostram esta situação (SMOLE; DINIZ, 2010; DANTE, 2010).

Em relação aos três livros do ensino superior pode-se comentar o seguinte:

- O livro adotado pela instituição de ensino em que foi realizada a pesquisa é o PLT (Programa do Livro Texto) de Steinbruch e Winterle (1987):

Apesar de o título do livro ser definido como Álgebra Linear e Geometria Analítica em nenhum momento da explicação teórica referente a sistemas lineares, matrizes e determinantes os autores apresentam relação entre as diferentes representações algébrica e geométrica necessárias para a compreensão do

conteúdo, portanto o texto didático apresenta somente a representação algébrica desconsiderando a relação existente com a representação geométrica.

Em nenhum momento da exposição do embasamento teórico os autores tratam da conversão entre as representações algébrica e geométrica. Os métodos algébricos de resolução apresentados no embasamento teórico são o do escalonamento e o método da matriz inversa, não apresentam o método da Regra de Cramer. Quanto ao PLT Álgebra Linear e Geometria Analítica, o texto didático não apresenta atividades propostas em relação ao conteúdo de sistemas lineares, por este motivo não foi inserido o quadro referente à quantidade de exercícios propostos em relação ao livro em questão.

- Kolman (1987)

Na apresentação do conteúdo sistema linear apresenta apenas a representação geométrica para o sistema linear 2×2 , define esta representação geométrica de sistemas lineares 2×2 através de um exemplo de aplicação mostrando as três possibilidades das posições das retas no plano, sendo: concorrentes (solução um único ponto), paralelas (sem solução) e coincidentes (infinitas soluções). Não apresenta a representação geométrica para sistemas lineares 3×3 , as possíveis posições dos planos. É interessante informar que o texto didático apresenta uma quantidade significativa de exercícios de aplicação.

Apresenta-se o Quadro 5 com os tipos de representações utilizadas pelo livro didático em relação à quantidade de atividades propostas.

Quadro 5 – Quantidade de atividades propostas de Kolman (1987) em relação ao tipo de representação

Linguagem natural (interpretação em situações- problemas)	Numérica	Representação geométrica
6 questões [15 até 18 (aplicação) página 7, 21 e 22 página 42].	Não apresenta	Não apresenta
Representação algébrica	Matricial (matriz/sistema linear), (determinante/sistema linear)	
27 questões [1 até 14 (eliminação) página 7 8 a 14 páginas 41 e 42, 11 e 12 página 54, 1 e 2 página 57, 18 e 19 (sistemas homogêneos) página 80].	38 questões [12 até 17 (matriz) e 18 até 21 (aplicação teórica matriz) página 18 1 ao 3 (matriz escalonamento) 4 até 7 (equivalentes) 8 até 20 (soluções) 21 e 22 (aplicação) páginas 40, 41 e 42, 11 e 12 (matriz inversa) página 54 e 20 até 23 (Regra de Cramer) página 80].	

Fonte: Elaborado pela autora, 2012

Constatou-se pela análise que apesar de mostrar no embasamento teórico a representação geométrica de sistemas lineares 2×2 , o livro não apresenta nas atividades propostas questões que abordam este tipo de resolução de sistema linear na representação geométrica. E também dos métodos de resolução abordados, apesar de expor o método da matriz inversa no embasamento teórico, não solicita atividades que solicitam este tipo de solução.

- Anton e Busby (2006)

Interessante salientar que, nas situações expostas no embasamento teórico, Anton e Busby relacionaram a representação algébrica com a geométrica, mostrando as possíveis posições das retas representadas nos sistemas lineares 2×2 e as possíveis posições dos planos representados nos sistemas lineares 3×3 , conforme a Figura 7 extraída do livro:

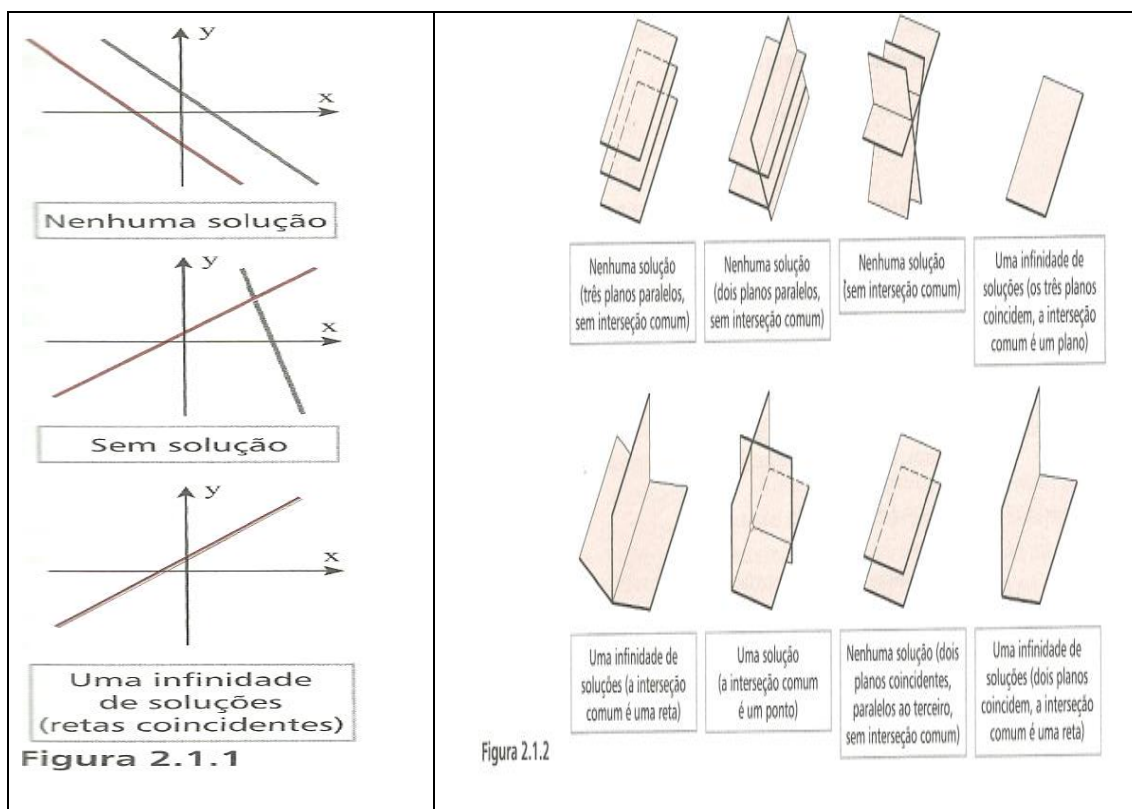


Figura 7 – Atividade que retrata a posição das retas e dos planos em relação a sistemas lineares

Fonte: ANTON; BUSBY, 2006, p. 59 e 61.

Anton e Busby (2006) apresentam três exemplos que resolve somente pelo método algébrico, fazendo um comentário sobre a solução encontrada, mas deixa a cargo dos leitores a representação geométrica, o traçado das retas definidas pelo sistema linear e a visualização da solução encontrada. Demonstram um sistema 3×3 somente em sua solução algébrica.

Apresentam mais um exemplo do sistema linear 3x3, mostra toda a representação algébrica necessária ao mesmo tempo em sistema linear e matriz aumentada até encontrar a solução comum o ponto definido por três coordenadas (x, y, z) e comenta no final da resolução sobre a representação geométrica e que o encontro dos três planos definidos pelas equações lineares do sistema linear intersecta em um único ponto (x, y, z) em \mathbb{R}^3 .

Apresenta-se o Quadro 6 com os tipos de representações mostradas pelo livro didático em relação à quantidade de atividades propostas.

Quadro 6 – Quantidade de atividades propostas por Anton e Busby (2006) em relação ao tipo de representação

Linguagem natural (interpretação em situações- problemas)	Numérica	Representação geométrica
20 questões [27 a 30 página 66, 1 a 16 páginas 94 e 95].	16 questões [1 a 6, 9 a 16, 31 e 32 vetor e combinação páginas 65, 66 e 67].	2 questões [7 e 8 (representação gráfica) – página 65]
Representação algébrica		Matricial (matriz/sistema linear), (determinante/sistema linear).
34 questões [21 a 54 páginas 79, 80 e 81].		30 questões [17 a 26 página 66 e 1 a 20 páginas 78 e 79]

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A respeito da conversão entre as representações algébrica e geométrica apenas o livro Álgebra Linear Contemporânea, de Anton e Busby, trata do embasamento teórico desta situação. Os outros dois livros analisados não abordam a representação geométrica.

Assim, as iniciativas de relacionar o método algébrico e o geométrico os textos didáticos não necessariamente o fazem, e quando o executam, os livros desenvolvem de forma artificial, ou seja, sem aprofundar nas diferentes representações matemáticas. Normalmente o método mais utilizado nos textos didáticos é o algébrico.

3.4 O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) no estudo de sistemas lineares

Em relação aos registros de representação semiótica tornou-se necessário para melhor visualização das representações algébrica e geométrica trabalhar com atividades que utilizam as TICs (software GeoGebra, VCN e Winplot). Seguem-se algumas considerações a respeito desta importante ferramenta no ensino e aprendizagem da matemática.

Demo (2008, 2009) entende como ambientes de aprendizagem os que se constroem em potencialidades de autonomia, considerando que o educando tenha a capacidade de lidar com informação e conhecimento, saber pesquisar e elaborar, ser capaz de postura científica e análise metódica. Demo (2008) considera que as TICs são importantes ambientes de aprendizagem podendo contribuir no processo de formação do conhecimento. Para o autor, o papel do professor é desafiar, propor ao aluno buscar respostas, disponibilizando problemas mais desafiadores e motivadores. O professor é considerado um aprendiz constante sempre em busca do conhecimento para transmitir aos alunos para que aprendam também.

O computador, de acordo com Borba e Penteado (2010), não é a solução para os problemas educacionais, mas pode transformar de forma positiva a própria prática educativa. Cada vez mais a tecnologia informatizada interfere no mercado de trabalho, e o estudante deve poder usufruir no momento atual da alfabetização tecnológica. O computador deve estar inserido em atividades essenciais como aprender, ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais, etc. Por meio das mídias, como os softwares gráficos e algébricos, os alunos experimentam pela aula prática desenvolver a conversão entre os registros algébrico e geométrico adquirindo a oportunidade de compreender melhor o objeto sistema linear e devido a desenvolver juntamente as duas representações o aluno pode adquirir condição de distinguir o objeto de suas representações. Os autores entendem necessário que o professor se atualize constantemente, conhecendo bem as máquinas da sala de informática a serem utilizadas durante a aula, verificando a quantidade disponível de máquinas disponíveis para os alunos e a instalação dos softwares a serem utilizados. Apesar do receio dos professores em trabalhar com as TICs, elas podem contribuir e muito para melhorar suas aulas e através dessas inseguranças encontradas durante a

experiência do uso das TICs é que o pesquisador pode melhorar as aulas e conseqüentemente aprimorar o desenvolvimento das atividades.

Para D'Ambrosio (1998, 1999, 2003) a etnomatemática é alternativa metodológica que trata das técnicas de ensinar, entender, explicar e lidar com o ambiente natural, social e imaginário. Nesta perspectiva o professor é um orientador preparando o aluno para pesquisar, buscando solucionar as situações das atividades de forma participativa e ativa. Para o autor, a geração do conhecimento matemático não pode ser desvinculada da tecnologia, ou seja, existe uma associação íntima entre conhecimento x tecnologia. A sala de aula deve ser um ambiente que proporciona transformar possibilidades no processo de adquirir conhecimentos desenvolvendo a capacidade de resolver problemas, este conhecimento pode ser obtido de várias maneiras e o professor condutor destas informações que incentivam este conhecimento necessitando, portanto cada vez mais da tecnologia. Deve haver uma vinculação entre a construção teórica da matemática e os softwares tecnológicos de forma a contribuir para o processo ensino-aprendizagem. É fato de que cada vez mais se necessita desta tecnologia que já faz parte da vida do aluno fora da sala de aula. Assim, trazê-la para dentro da sala de aula no sentido de relacionar conteúdos matemáticos com estas tecnologias tornam as aulas mais interessantes e mais participativas. A realidade humana e o pensamento matemático, acrescidos de pensamentos e experiências, interferem positivamente no processo criativo. Através da bagagem que o aluno carrega com o que ele aprimora conhecimentos matemáticos ocorre a possibilidade da etnomatemática, que conduz o professor a buscar novas estratégias de ensino para incentivar a criatividade de forma a aplicar na própria realidade do aluno. Para a etnomatemática todo conhecimento matemático é válido quando está relacionado com a realidade do aluno.

Para Demo (2008, 2009), as TICs podem contribuir de forma positiva facilitando a compreensão matemática, necessitando ao educador não somente conhecimentos específicos de matemática, mas conhecer os softwares disponíveis em que pode trabalhar de forma a ganhar tempo nos cálculos contribuindo assim para uma maior disponibilidade de análise e interpretação matemática em que o aluno escreve e raciocina sobre o que é observado durante a aprendizagem, tornando as aulas mais atrativas e dinâmicas. Contribuindo assim na exploração e elaboração de conceitos de objetos matemáticos como SL e experimentando novas

formas de ensino-aprendizagem. O educador não deve ter receio de perder o controle em relação às mudanças e deve aceitar as tecnologias, pois jamais elas vão substituir o professor, pois é o agente principal que transforma a tecnologia em aprendizagem. Ao discorrer sobre as TICs e educação, Demo (2008, 2009) destaca ainda que os educadores podem aprimorar os modos de estudar, pesquisar e elaborar construindo oportunidades de crescimento intelectual. São inúmeras as contribuições das TICs, dentre elas a oportunidade de novas alfabetizações, modos mais situados de aprendizagem, motivação e entusiasmo incluindo as interações, em contraposição ao ensino tradicional, por vezes monótono, desanimador e formatador. A educação hoje exige cada vez mais interagir os conteúdos matemáticos com os processos práticos e tecnológicos. Ambientes que integram tecnologias podem favorecer a construção da autonomia do aluno. A interação de softwares computacionais relacionando a Álgebra e a Geometria poderá facilitar a aprendizagem de sistemas lineares incentivando o aluno a investigar e estabelecer relações entre dois tipos distintos de registros. As tecnologias podem trazer oportunidades ampliadas de aprendizagem, menos centradas no professor dando maior autonomia ao aluno que passa a ser colaborador ativo produzindo conhecimento.

Borba e Penteado (2010, p.48) descrevem a importância da informática como

[...] uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea.

Utilizando as TICs o professor pode se deparar com situações inesperadas, portanto é necessário que a aula seja bem preparada e que o professor conheça bem os softwares a serem utilizados. Qualquer dúvida inesperada surgida em que o professor não consiga solucionar de imediato deve primeiramente investigar para obter maior segurança na busca da solução procurada. Estas dúvidas podem surgir em relação à falta de conhecimento em relação ao software e na preparação do conteúdo.

D'Ambrosio (1998, 1999, 2003) afirma que apesar de alguns matemáticos se interessarem por somente régua e compasso na resolução de problemas de geometria, é através da incorporação da tecnologia disponível que se dará o desenvolvimento da matemática. Afirma que a sociedade repleta de tecnologia

requer da matemática que o aluno lide com a evolução de forma a adequar a matemática à tecnologia, auxiliando na aprendizagem do aluno. As mudanças tecnológicas exigem do professor mudanças no sentido de adquirir novas competências, em buscar saberes e habilidades, aplicando o saber e a habilidade adquiridos com o objetivo de facilitar a aprendizagem, buscando alternativas no sentido de obter o conhecimento dos alunos possibilitando o processo ensino-aprendizagem. Para D'Ambrosio (1998, 1999, 2003) conhecimento e comportamento são resultantes de estímulos dos indivíduos e organizados intelectualmente sobre o que se sabe e o que se faz, organizados no encontro com outros indivíduos, são transmitidos e difundidos. O ensino atual de matemática, o tradicional, ativa o desinteresse dos alunos, pois ocorre de forma desinteressante e obsoleta e que pouco ajuda no dia-a-dia. As situações reais devem estar inseridas dentro do ensino de matemática de acordo com D'Ambrosio (1998, 1999, 2003).

A escolha dos softwares foi feita devido principalmente a serem free de fácil acesso não apresentaram dificuldades de instalação no laboratório de informática. Inclusive foram verificados outros softwares como Matlab, Mapple e outros, mas devido ao interesse da pesquisa em tratar do conteúdo sistemas lineares, verifica-se que os softwares Geogebra (visualização das representações algébrica e geométrica para SL de 2 equações e 2 incógnitas), Winplot (representação geométrica para SL de 3 equações e 3 incógnitas) e VCN (representação algébrica para SL de 2 equações e 2 incógnitas e também 3 equações e 3 incógnitas) e VCN

4 METODOLOGIA

Este capítulo tem por finalidade expor a forma como esta pesquisa foi conduzida em relação aos procedimentos metodológicos. Apresentam-se o contexto da pesquisa, os sujeitos e o desenvolvimento da pesquisa com procedimentos metodológicos, estudo piloto, estudo principal e questionário de pesquisa.

4.1 O contexto da pesquisa

Considera-se importante nesta etapa destacar a escola e os alunos, buscando mostrar de forma clara a situação em que a pesquisa foi feita, além de evidências em consideração aos registros de representação semiótica utilizados no processo ensino-aprendizagem de sistemas lineares (SL). Observações foram feitas em relação à experiência direta desenvolvida na escola e observando o principal interessado neste processo, o aluno.

4.1.1 A escola

A pesquisa foi realizada em uma faculdade particular de Belo Horizonte que oferece duas modalidades de graduação, presencial e à distância. São ofertados cursos nas áreas de exatas, humanas, saúde e tecnologias de trabalho como: Administração, Ciências Contábeis, Química, Sistema de Informação e Comunicação Social – Relações Públicas.

Os candidatos que ingressam na Faculdade são selecionados pelo Vestibular que para ingresso no ensino superior nos termos do art. 44, inciso II da Lei 9394/96 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB), da Portaria MEC 391/2002, e da Portaria Normativa MEC 40/2007, ambas do Ministério da Educação (MEC). É constituído de um Concurso Principal e de um Processo Seletivo Continuado com a realização de provas Objetiva e de Redação, conforme o número de vagas disponíveis. O candidato pode optar pela análise do seu histórico escolar do ensino médio em substituição à Prova Objetiva, valendo, neste caso, para sua classificação, o maior número de pontos obtidos entre a média do histórico e a Prova Objetiva, se for o caso. O candidato também pode, igualmente, optar pela entrega do

comprovante legal das notas do ENEM (Exame Nacional de Ensino Médio) em substituição à Prova Objetiva e/ou a Prova de Redação, valendo, neste caso, para sua classificação, o maior número de pontos obtidos entre o ENEM e os deste Processo Seletivo.

4.1.2 Os sujeitos de pesquisa

Os participantes na realização da pesquisa foram 64 alunos do curso de Sistema de Informação, 7º período, do horário noturno da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear, e de duas turmas do 6º período da disciplina Matemática Aplicada II (turno manhã e noite), sendo o número de alunos do turno da manhã com número reduzido, facilitando para que cada aluno ou dupla de aluno pudesse utilizar um microcomputador (total = 89, mas nem todos sofreram análise). Os laboratórios contam com 30 microcomputadores em salas amplas e com ar condicionado.

Os sujeitos escolhidos para a pesquisa foram selecionados devido a três critérios: (1) acessibilidade da pesquisadora que leciona o conteúdo que aborda SL para essas turmas, inclusive interesse em trabalhar ao mesmo tempo o estudo da álgebra e da geometria de forma a contribuir para uma melhor qualidade no processo ensino-aprendizagem, (2) por serem estudantes na etapa final do curso e já terem tido contato no ensino fundamental e médio do conteúdo SL e finalmente (3) por ter interesse em verificar se o conteúdo SL através desta proposta pode facilitar a aprendizagem dos alunos.

As turmas eram bastante heterogêneas, com alunos diferenciados em relação aos conhecimentos prévios de Matemática, sendo a maioria procedente de escolas públicas, da rede estadual e municipal.

Apresentou-se interesse em desenvolver atividades em que os alunos participassem ativamente do processo ensino-aprendizagem, deduzindo fórmulas, verificando soluções encontradas anteriormente e aprimorando conhecimentos matemáticos e computacionais, ou seja, tendo como principal objetivo verificar se o uso da tecnologia computacional interfere no processo ensino/aprendizagem.

Todos os alunos das três turmas consideradas nesta pesquisa que participaram do estudo concederam o consentimento para a realização da pesquisa em relação à utilização dos dados coletados no desenvolvimento com a condição de assegurar o sigilo dos participantes, ou seja, o anonimato. As duplas e os

participantes da pesquisa foram denominados como D1, D2, D3 [...] e ainda A1, A2, [...] significando D = dupla e A = aluno, garantindo, assim o anonimato dos participantes, sendo que a preferência da pesquisa se situou na execução das atividades em dupla, mas com opção de fazê-las individualmente.

4.2 Desenvolvimento da pesquisa

Buscou-se responder:

- O uso de diferentes registros de representação semiótica em matemática pode facilitar a aprendizagem de sistemas lineares?
- O uso das TICs favorecendo a interligação da álgebra e da geometria pode facilitar a aprendizagem de sistemas lineares?

Foi desenvolvida uma pesquisa diagnóstica na metodologia empírica qualitativa, procurando verificar no estudo de sistemas lineares se o uso de diferentes registros e o uso das TICs, contribuindo no processo do tratamento e da conversão entre registros algébricos e geométricos, poderia facilitar o processo ensino-aprendizagem com o interesse não somente nos resultados obtidos, mas no processo de desenvolvimento das atividades.

As análises foram norteadas segundo os registros de representação semiótica de Raymond Duval, aprofundando o conhecimento sobre o assunto e principalmente como as transformações entre os registros de representação interfeririam no estudo do objeto sistema linear.

No sentido de ampliar as possibilidades de elaboração de uma sequência de atividades para o estudo dos sistemas lineares, com uso de TICs, foram desenvolvidas as seguintes etapas:

- Levantamento bibliográfico das dissertações e teses que abordam o tema geometria analítica, álgebra linear e SL;
- Análise da abordagem do conteúdo em textos didáticos do ensino fundamental, médio e superior, verificando a abordagem do objeto sistema linear, considerando: os conteúdos abordados e a abordagem em termos de encadeamento de assuntos e da intenção dos autores em incentivarem a investigação e o tipo de registros de representação empregados pelos autores, tanto no texto expositivo quanto nos exercícios;

- Estudo piloto, durante o 1º semestre de 2011, elaborando e testando atividades envolvendo o conteúdo de sistemas lineares e o uso dos softwares GeoGebra, Winplot e VCN;
- Estudo principal, aplicando em 2012 uma sequência didática reelaborada a partir da análise dos resultados do estudo piloto, objetivando contribuir com uma abordagem das representações algébrica e geométrica com o uso dos softwares GeoGebra, Winplot e VCN;

No processo ensino e aprendizagem de sistema linear foram considerados os seguintes instrumentos de coleta de dados: pesquisa documental e bibliográfica relacionadas ao tema de estudo, análise das atividades desenvolvidas e encaminhadas pelos alunos para um e-mail específico, questionário entregue constituído por uma série ordenada de perguntas direcionadas às atividades desenvolvidas, gravações das aulas de laboratório.

Os dados coletados foram analisados de forma descritiva sendo que os resultados foram considerados a partir do foco de construção das atividades, buscando identificar aspectos que diferenciam a atividade didática desenvolvida da considerada aula tradicional, o estudo do objeto sistema linear foi abordado de forma a desenvolver uma série de atividades utilizando o tratamento e a conversão entre os registros algébricos e geométricos, preocupando com o desenvolvimento das atividades e não com o resultado obtido, verificando como que as transformações de conversão e tratamento interferem no processo ensino-aprendizagem do objeto sistema linear.

4.2.1 Estudo piloto

O Estudo Piloto foi realizado durante o 1º semestre de 2011 em apenas uma turma de 64 alunos do 7º período do curso de sistema de informação do conteúdo de Geometria Analítica e Álgebra Linear, em um total de quatro aulas por semana durante dois dias, sendo, portanto, duas aulas por dia.

As atividades foram realizadas em dupla e individualmente, tendo como principal objetivo o de verificar a receptividade dos alunos em relação às atividades propostas, com a inclusão de atividades desenvolvidas com o software GeoGebra e, portanto, a necessidade do uso das TICs.

Foram cinco tarefas aplicadas em sala de aula, sendo consideradas como Atividade 1: Resgatando idéias sobre sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas e mais duas atividades a serem resolvidas em casa consideradas complementares. As atividades do estudo piloto foram colocadas no Apêndice 1.

As atividades foram realizadas em três encontros, sendo o primeiro o desenvolvimento das 3 primeiras tarefas da atividade 1, o segundo encontro as 2 tarefas que faltavam para concluir a atividade 1 e distribuimos a atividade complementar, e o terceiro encontro foi a sistematização, em que os alunos colocaram suas posições sobre o tempo utilizado e as dificuldades encontradas.

Foram recolhidas as atividades da seguinte forma: os alunos, ao término das atividades, no mesmo dia encaminharam-nas para um e-mail específico e foram salvas em pastas criadas (total 37 pastas) com os nomes de cada dupla.

Utilizando o software GeoGebra, nas atividades os alunos utilizaram as duas janelas, a algébrica e a geométrica, facilitando assim o estudo do conteúdo.

Das 37 pastas analisadas em relação à tarefa 1 da atividade 1 (a dupla ordenada de números reais (2,2) é solução da equação linear $2x+3y=10$.) apresentando como resultado que o ponto (2,2) é solução da equação linear e definindo outros pontos que também são e não são solução da equação linear, o Gráfico 1 contém os resultados desta questão:

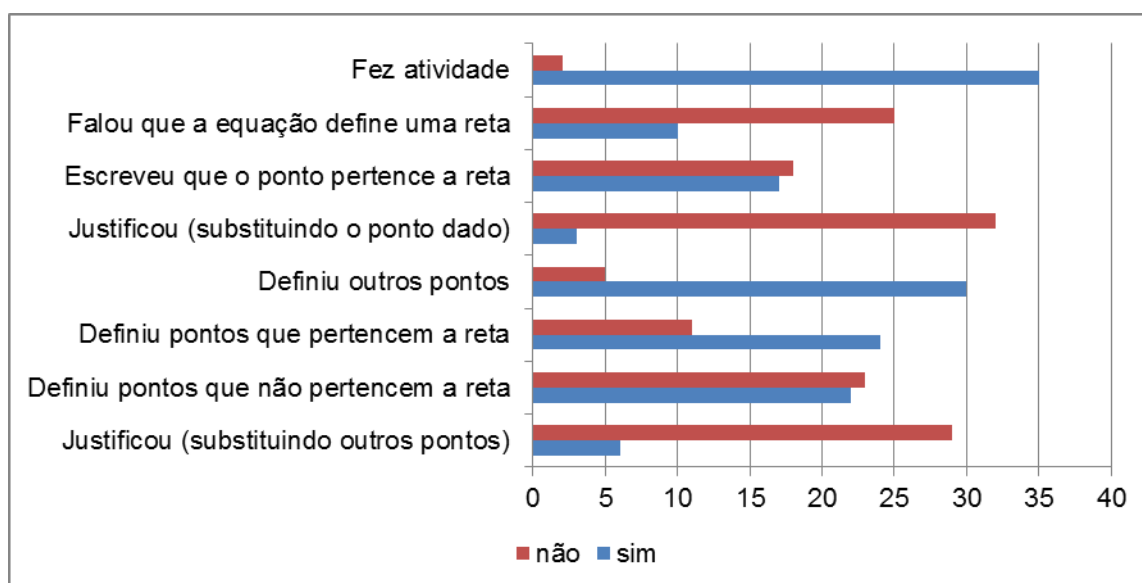


Gráfico 1 – Resultado da tarefa 1 da Atividade 1 do Estudo Piloto

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Pode-se observar que duas duplas não fizeram a tarefa. Pelo Gráfico 1, 35 alunos fizeram a tarefa sendo que a maioria não definiu que a equação linear era uma reta. A mesma quantidade de alunos (50%) concluiu ou não que o ponto dado pertencia à reta, mas a maioria dos alunos não justificou, substituindo x e y no ponto dado.

A maior parte dos alunos mostrou outros pontos que pertenciam ou não à reta, mas também a maioria não justificou que aqueles pontos encontrados (substituindo suas coordenadas) pertenciam ou não a reta definida pela equação linear.

Em relação à tarefa 2 letra (a) da atividade 1 sendo: o sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ apresentando como solução o ponto $x = 4$ e $y = 3$ sendo classificado como sistema possível e determinado. No Gráfico 2 foram mostrados as observações feitas em relação a execução da tarefa:

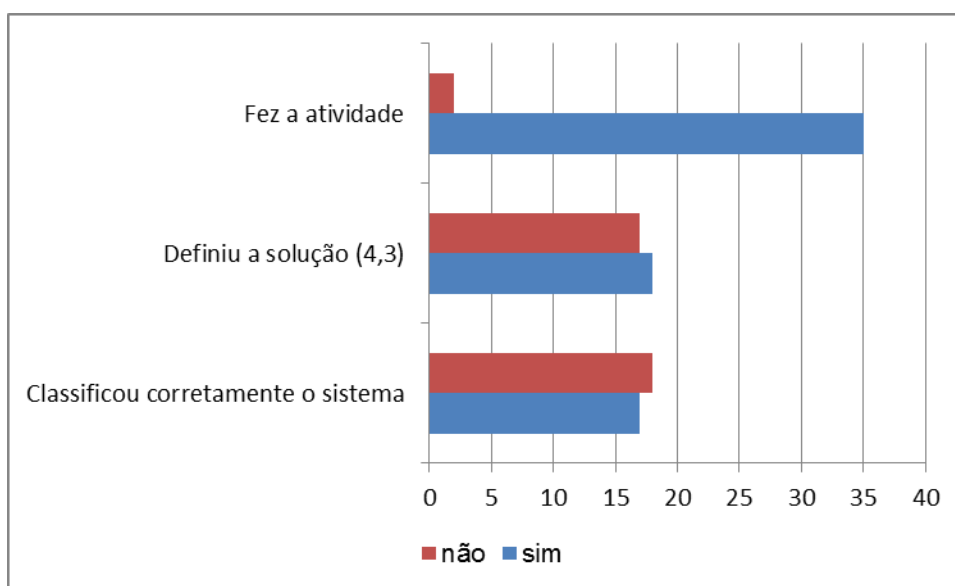


Gráfico 2 – Resultado da tarefa 2 letra (a) da atividade 1 do Estudo Piloto

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Apenas duas duplas do total de 37 alunos não fizeram a tarefa e interessante considerar que metade da turma definiu a solução (4,3) do sistema linear e também 50% classificaram corretamente o sistema linear.

Três duplas confundiram sistema com equação e 3 duplas consideraram a classificação do sistema linear como sistema determinado e não como sistema possível determinado.

Em relação ao sistema linear da tarefa 2 tarefa (b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$, cujo

objetivo era que o aluno verificasse que as equações lineares definem duas retas coincidentes, portanto o sistema apresenta várias soluções e é classificado como sistema possível indeterminado. O Gráfico 3 mostra a situação da tarefa em questão.

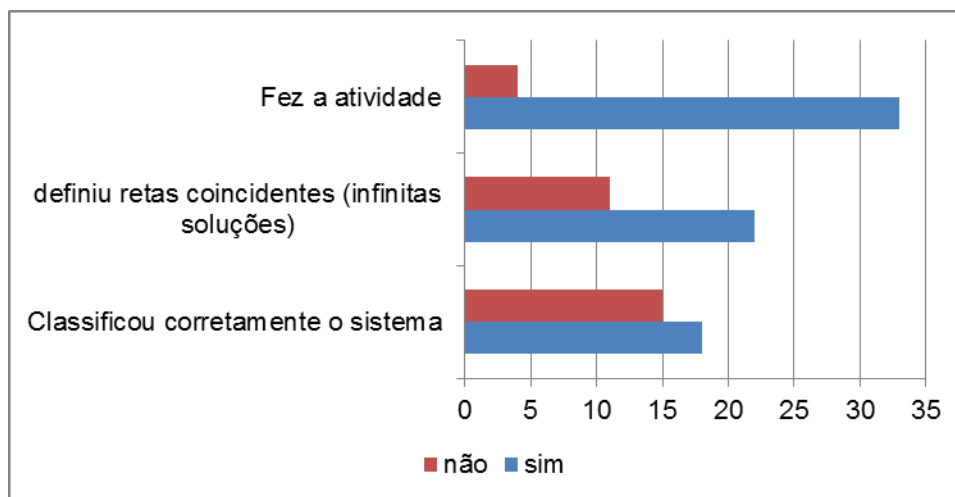


Gráfico 3 – Resultado da tarefa 2 letra (b) da atividade 1 do Estudo Piloto

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Analisando o Gráfico 3, conclui-se que a maior parte da turma definiu as retas como coincidentes ou que apresentam infinitas soluções. Em relação à classificação, aproximadamente metade da turma considerou corretamente que o sistema é possível indeterminado.

Duas duplas confundiram equação linear com sistema linear e uma dupla não colocou a palavra possível na classificação do sistema linear.

Na letra c da tarefa 2, cujo sistema é definido por: $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$ e cuja solução

é definida por duas retas paralelas, o sistema é classificado como impossível (GRÁFICO 4).

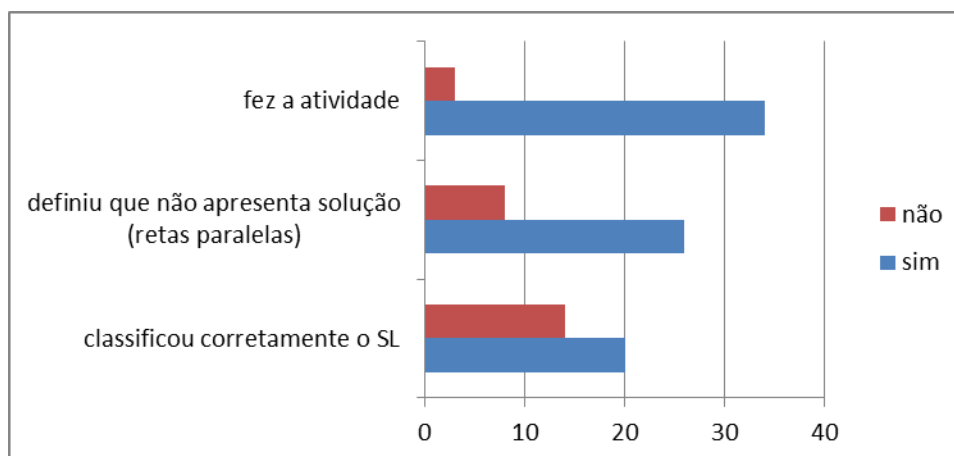


Gráfico 4 – Resultado da tarefa 2 letra (c) da atividade 1 do Estudo Piloto

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Pelo Gráfico 4 observa-se que apenas 3 duplas não fizeram esta atividade e dos demais 34, a maioria definiu que o SL não apresentava solução e também classificava o sistema corretamente, apesar de que a quantidade de duplas que não classificaram o sistema linear corretamente é bastante considerável, quase a metade.

Em relação à atividade 1 tarefa 3, mostra-se no Gráfico 5 a interpretação da atividade graficamente.

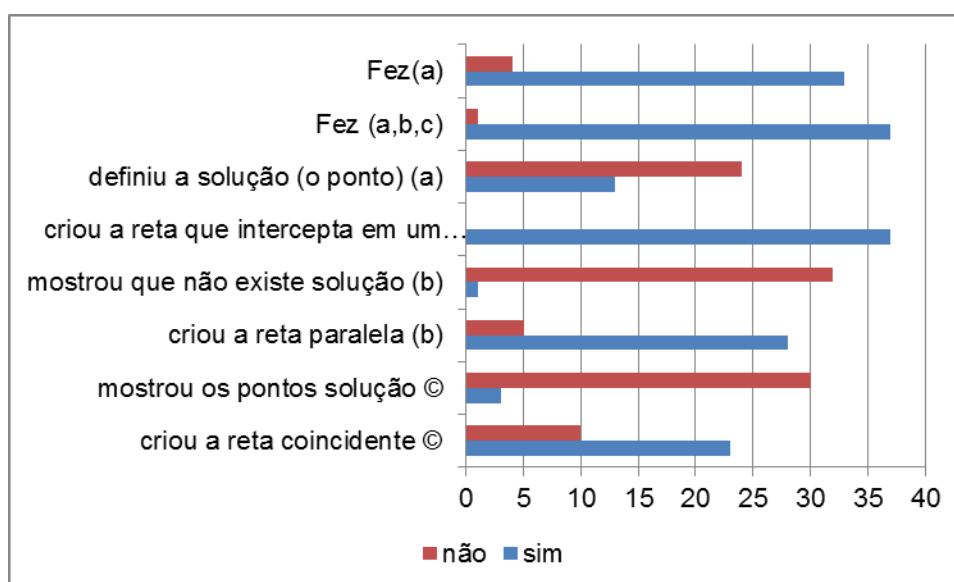


Gráfico 5 – Resultado da tarefa 3 da atividade 1 do Estudo Piloto

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Foi interessante observar que mesmo os alunos trabalhando com as duas janelas abertas (algébrica e geométrica), não foram capazes de necessariamente de executar a tarefa solicitada. Em relação à tarefa 3 da atividade 1 em que os alunos deviam criar as retas solicitadas em relação à reta dada $y = 2x + 4$, construir uma

reta na letra (a) que corte a reta dada em um ponto, na letra (b) uma reta paralela a reta dada e na letra (c) uma reta coincidente a reta dada. Apesar de a tarefa especificar que as retas construídas baseiam-se na reta dada $y = 2x + 4$, a dupla D1 realizou a construção da reta (c) paralela a reta (b) e não paralela a reta (a). E outras duplas também fizeram a mesma coisa, interpretando equivocadamente a tarefa 3.

A Figura 8 ilustra a forma como a dupla D1 realizou a construção das retas.

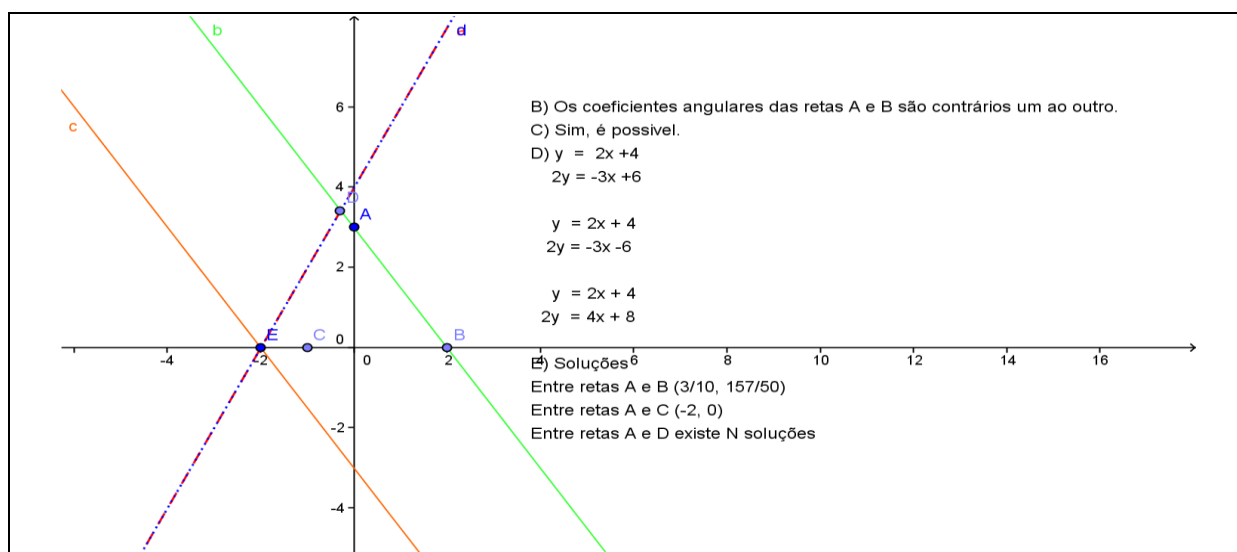


Figura 8 – Forma pela qual a dupla D1 realizou a construção das retas no Estudo Piloto
 Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

De início, os alunos apresentaram dificuldades em entender o que as atividades estavam propondo e o passo a passo dos itens das atividades, além de insegurança no modo como deveriam escrever sobre os resultados obtidos. Perguntas foram surgindo: (i) como inserir a caixa de texto para escrever o que estavam observando durante as atividades? e (ii) como inserir na tela do software a equação linear?

Apesar das dificuldades apresentadas, a atividade foi aceita de forma positiva pelos alunos, que colocaram depois das tarefas realizadas algumas observações que foram consideradas para melhorar a atividade principal como, por exemplo, a necessidade do aumento do tempo disponível para as atividades e a inclusão da atividade resgate das aprendizagens anteriores sobre sistemas lineares, revendo as classificações dos sistemas lineares.

Com a atividade piloto verificou-se a necessidade de incluir uma atividade como resgate dos estudos anteriores sobre sistemas lineares:

- Nomeou-se a atividade principal de atividade 1.

- Manteve-se a atividade 1 da atividade piloto nomeando-a como atividade 2.
- Foram acrescentadas atividades abordando matrizes nomeando atividade 3 na solução de sistemas lineares, inclusive na tarefa 1, utilizando outro software, que desenvolve cálculos algébricos.
- Escolheu-se o VCN após estudos de alguns softwares disponíveis no mercado, conciliando, assim, as representações geométrica (GeoGebra) e algébrica (VCN).
- Acrescentada também a tarefa 4, que aborda a obtenção da solução pelo método de inversão da matriz dos coeficientes (matriz inversa) e
- Acrescentada a tarefa 5 pelo método da Regra de Cramer.
- Melhoradas as atividades complementares (atividade 4) com as tarefas 3 (3.1) e (3.2), em que o aluno deve inicialmente entender o problema para montar o sistema linear.
- Finalmente, foram ampliadas as atividades para sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas ou mais atividades: 5 (T1, T2, T3, T4), 6 (T1, T2, T3) e 7 complementares (T1, T2, T3, T4 e T5).

Verificou-se que o tempo em que foi feita à coleta de dados da atividade piloto foi insuficiente para obter os resultados esperados e, assim, considerou-se a necessidade de rever o tempo disponível para a aplicação das atividades, inclusive devido a um número maior de atividades de sistemas lineares 2×2 , incluindo também atividades envolvendo SL 3×3 na atividade principal.

4.2.2 Estudo principal

O estudo principal foi desenvolvido em três turmas, sendo duas do 6º período com a disciplina Matemática Aplicada II, uma do turno da manhã com 26 alunos, e outra do noturno com 63 alunos, sendo 3 aulas administradas em um único dia para cada turma e outra turma do 7º período da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear no noturno com 71 alunos, sendo 4 aulas por semana, dois encontros de 2 aulas por dia. Apesar de serem períodos diferentes o conteúdo das disciplinas era o mesmo a administrar, foram abordados primeiramente matriz, determinante e sistema linear e a seguir vetores.

O cronograma da aplicação das atividades encontra-se no Quadro 7:

Quadro 7 – Cronograma de aplicação das atividades em 2012

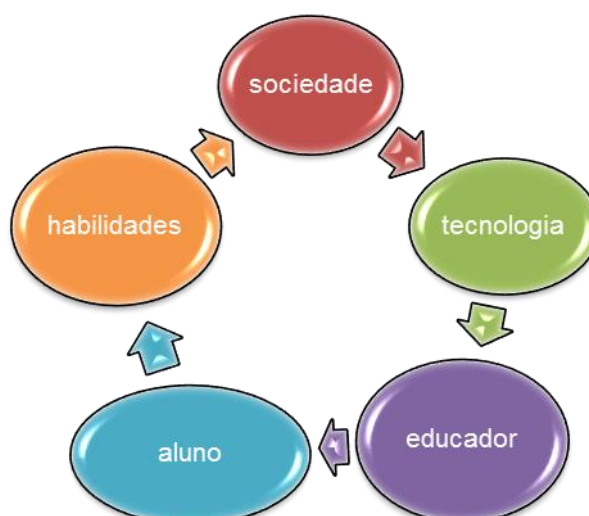
Semana	Atividade	Objetivo geral	Número de tarefas	Uso de TICs
29/8 a 2/9	1	Resgatar idéias sobre SL de 2 equações e 2 incógnitas (Métodos da substituição, da adição e da comparação)	1	Não
5/9 a 9/9 Turma	2	Utilizar o software GeoGebra para investigar SL de 2 equações e 2 incógnitas	3	Sim(GeoGebra)
12/9 a 16/9	3	Solucionar SL 2x2 através de uma abordagem matricial	5	Sim(VCN e GeoGebra)
	4	Aprofundar nos estudos de SL 2x2 (atividade complementar)	3	Sim(VCN e GeoGebra)
19/9 a 23/9	5	Estudar SL 3x3	4	Sim(VCN e Winplot)
26/9 a 30/9	6	Solucionar SL 3x3 através de uma abordagem matricial	3	Sim(VCN e Winplot)
	7	Aprofundar nos estudos de SL 3x3 (atividade complementar)		Sim(VCN e Winplot)

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A pesquisa apresentou como objetivo principal investigar sobre as atividades propostas desenvolvidas, se podem facilitar o processo ensino-aprendizagem de SL.

Defende-se neste estudo que as TICs podem contribuir no processo formativo como instrumento para a construção do conhecimento interagindo teoria e prática.

Defende-se, também, que o conhecimento e a tecnologia devem interagir de forma a preparar o aluno a criar autonomia para resolver situações-problema para alcançar a aprendizagem significativa. Ilustra-se o processo do conhecimento na visão da autora pelo diagrama da Figura 9.

**Figura 9 – Ciclo do processo formativo educacional**

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

O ciclo ocorre começando pela sociedade que demanda, devido à necessidade de crescimento, o desenvolvimento e a utilização das tecnologias. Conseqüentemente o educador, para se manter inserido nesse processo de avanço tecnológico, deverá aprimorar e utilizar destas tecnologias. O educador tem o papel de dar condições aos alunos de desenvolver em habilidades com oportunidade de aprender, para que essas habilidades sejam necessárias para sua integração na sociedade tecnologizada. Pelo ensino de sistemas lineares utilizando os softwares matemáticos GeoGebra, Winplot e VCN, pretendeu-se viabilizar que os alunos estabelecessem a relação da álgebra com a geometria, objetivando maior compreensão.

Com a contribuição das TICs, ferramentas poderosas utilizadas no ensino matemático, podem ocorrer maior integração entre a teoria de SL e a prática educativa, influenciando positivamente no ensino-aprendizagem deste objeto matemático sistema linear de forma a não confundir este objeto SL com suas representações algébrica e geométrica.

A Figura 10 apresenta o que se pretendeu neste estudo em relação às relações estabelecidas com o objetivo de facilitar o entendimento de sistemas lineares.

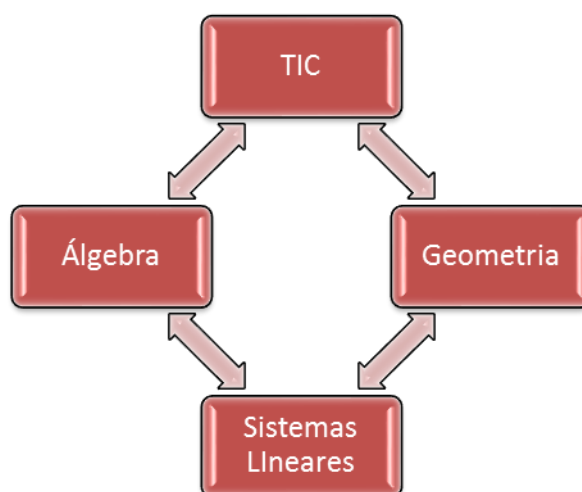


Figura 10 – Ciclo da relação da geometria e da álgebra através das TICs
Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A Figura 10 retrata a dinâmica abordada no desenvolvimento da pesquisa. Os alunos, pela utilização das TICs como recurso no ensino do objeto sistema linear, foram solicitados a relacionar a resolução algébrica e a geométrica e a assimilar com

significado o conteúdo referente a sistemas lineares, validando durante os cálculos algébricos a consistência das construções geométricas e das construções geométricas a execução dos cálculos algébricos.

As TICs, portanto, podem ser consideradas mídias de interação entre a álgebra e a geometria e o professor o mediador do processo ensino e aprendizagem. O aluno é o maior beneficiado com as TICs, pois através da visualização dos softwares matemáticos poderá não mais confundir o objeto sistema linear com suas representações algébrica ou gráfica.

Foram apresentadas as sete atividades sobre sistemas lineares com seus respectivos objetivos, descrevendo as intenções, as ideias e as perspectivas de cada atividade.

A atividade 1 teve como intenção resgatar o que o aluno aprendeu anteriormente sobre sistemas lineares, lembrando os conceitos e os métodos existentes na resolução de sistemas lineares sendo: substituição, adição e comparação e escrevendo detalhadamente sobre o que foi executado durante os cálculos algébricos (QUADRO 8):

Quadro 8 – Atividade 1 – Tarefa 1

Atividade 1: Resgatando idéias sobre sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas

Você já sabe que um sistema linear de duas equações e duas incógnitas é um conjunto de duas equações lineares da forma:

$$(S1) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cada uma das equações do sistema é uma equação linear. As incógnitas são x e y e os valores a_1 e b_1 (a_2 e b_2) são números reais e são chamados coeficientes. O número real c_1 (c_2) é o termo independente.

Uma dupla ordenada de números reais (α, β) é solução de uma equação linear se satisfaz a equação, ou seja, se substituirmos os valores $x = \alpha$, $y = \beta$ na equação obtemos uma identidade.

T1) Lembrando que vocês já sabem como resolver sistemas lineares por três métodos, vamos agora recordar o **método da substituição**, sendo dado o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y = -3 & (1) \\ 2x + y = 8 & (2) \end{cases}$$

Solução:

Pela equação linear (2), temos:

$$2x + y = 8, \text{ logo,}$$

$$y = 8 - 2x \quad (3)$$

utilizando a equação linear (1), temos que:

$$x - 3y = -3$$

substituindo $y = 8 - 2x$ nesta equação temos:

$$x - 3(8 - 2x) = -3, \text{ desenvolvendo:}$$

$$x - 24 + 6x = -3$$

$$7x = -3 + 24$$

$$7x = 21$$

$$x = 21/7$$

$$x = 3$$

Voltando na equação linear (3):

$$y = 8 - 2x$$

Para $x = 3$

$$y = 8 - 2.3$$

$$y = 8 - 6$$

$$y = 2$$

Portanto $x = 3$ e $y = 2$

Podemos verificar que estes valores de x e y satisfazem cada uma das equações lineares do sistema linear dado.

Desenvolver este mesmo sistema pelos outros métodos que você já conhece, escrevendo passo a passo o procedimento utilizado:

1.1) Pelo **método da adição**; 1.2) Pelo **método da comparação**.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A atividade 2 foi elaborada com a finalidade de investigar sobre sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas com o recurso do GeoGebra, estabelecer uma conexão entre dois tipos de representação algébrica e geométrica e finalmente sistematizar a teoria estudada (QUADRO 9).

Quadro 9 – Atividade 2 - Delineamento

Atividade 2: Utilizando o software GeoGebra para investigar sistemas lineares com 2 equações e 2 incógnitas

O software matemático GeoGebra reúne geometria, álgebra e cálculo. De Geometria dinâmica permitindo realizar construções que podem modificar dinamicamente. Podendo também inserir equações e coordenadas diretamente. Tem a capacidade de trabalhar com variáveis. Nas duas perspectivas sendo a geométrica e a álgebra verifica-se a correspondência entre as duas janelas. Obs: Todas as atividades devem ser salvas.

Salve as atividades como APJL_A2T1 colocando as iniciais da dupla, no exemplo, AP são as iniciais de Ana Paula e JL as iniciais de Jorge Luis e A2 (atividade 2) da T1 (tarefa 1).

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Pelo GeoGebra, a tarefa 1 da atividade 2 visou representar a equação linear dada, que apresenta duas variáveis x e y . Tendo como definição uma reta e com um ponto dado, desejou-se verificar (1) se ele é solução da equação linear dada, visualizando que o ponto pertence à reta, (2) definir outros pontos que pertencem e não pertencem à reta dada e, finalmente, (3) sistematizar o que foi observado. Com essa atividade, o aluno pode ser capaz de compreender que um sistema linear é composto por equações lineares e que a solução encontrada do sistema linear pode ser conferida substituindo a solução nas equações do sistema linear, sendo assim solução de cada uma das equações do sistema.

O Quadro 10 apresenta a tarefa 1 da atividade 2.

Quadro 10 – Atividade 2 – Tarefa 1

T1) A dupla ordenada de números reais (2,2) é solução da equação linear $2x+3y=10$. Para isso abra uma janela no **GeoGebra**, digite a equação e localize o ponto (2,2).

1.1) O que você observou?

1.2) Dê exemplos de outras soluções da equação. A partir dos seus exemplos qual a conclusão que você chega?

Atenção: Insira um texto usando a caixa de texto e registre por escrito suas respostas, explicando como fez para chegar aos resultados.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Pretendeu-se com a tarefa 2 da atividade 2 relacionar as equações lineares (retas) do sistema linear com a representação geométrica e obter as soluções, inclusive verificando que a solução encontrada pela representação geométrica e a representação algébrica apresentam a mesma solução e concluir a classificação dos sistemas lineares dados: letras (a) concluir que as equações lineares que definem as retas se encontram em um único ponto, definir as coordenadas do ponto, no caso $x=4$ e $y=3$, obtendo a solução e a classificação: possível e determinado, (b) as retas observadas quando digitadas na janela algébrica são coincidentes e colorindo as retas de cores diferenciadas verifica-se suas sobreposições, admitindo várias soluções, quanto a letra, possível indeterminado e (c) as retas definidas são paralelas, ou seja, quando o aluno coloca a equação na forma $y = hx + d$ verifica-se que os coeficientes angulares (h) definidos das duas equações lineares são iguais não tendo solução, portanto não apresenta solução, impossível. Diferenciar as representações geométricas observadas durante a construção de cada tipo de sistema linear, e finalmente escrever sobre o que foi observado durante o desenvolvimento da atividade (QUADRO 11).

Quadro 11 – Atividade 2 – Tarefa 2

T2) As tarefas indicadas a seguir deverão ser realizadas para cada um dos sistemas lineares dados:

$$(a) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

2.1) Abra uma janela no **GeoGebra** e digite as equações do primeiro sistema letra a.

2.2) Salve o arquivo na forma do exemplo APJL_A2T2a em que, por exemplo, AP são as iniciais de Ana Paula e JL as iniciais de Jorge Luis e A2 a atividade 2 sendo a tarefa 2 letra a.

2.3) Use cores distintas para representar cada equação. Para isso selecione a equação e com o botão direito do mouse selecione propriedades e defina uma cor.

2.4) Na janela de geometria você obteve duas retas para cada sistema linear. Analise as posições das retas e registre suas conclusões. Se necessário coloque as equações na forma $y = hx + d$. Para isso selecione a equação e com o botão direito do mouse selecione a forma desejada.

2.5) De acordo com suas observações o sistema (a) apresenta quantas soluções? Justifique usando recursos algébricos e geométricos.

2.6) Como é classificado um sistema de duas equações e duas incógnitas que apresenta esse número de soluções?

2.7) Resolva o que foi proposto nas tarefas T2.5 e T2.6 para os sistemas (b) e (c).

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A tarefa 3 da atividade 2 teve como finalidade relacionar a equação algébrica apresentada $y = 2x + 4$ com outras equações algébricas criadas pelo aluno obtendo a característica do que cada atividade solicita, por exemplo, criar outra reta que intercepta a reta dada em um único ponto (sistema possível determinado), em vários pontos (sistema possível indeterminado) e em nenhum ponto (sistema impossível), verificar assim a atividade verifica se o aluno realmente entendeu as diferenças existentes entre os três tipos de classificação de sistemas lineares (sistema possível determinado, sistema possível indeterminado e sistema impossível) visualizando as representações: algébrica e geométrica obtidas através de cada sistema linear representado (QUADRO 12).

Quadro 12 – Atividade 2 – Tarefa 3

T3) Seja a reta de equação $y = 2x + 4$:

3.1) Construa uma 2ª reta que intercepte a reta dada em um só ponto.

3.2) Construa uma 3ª reta que seja paralela à reta dada. O que você observa sobre os coeficientes angulares destas duas retas?

3.3) É possível construir uma reta que seja coincidente com a reta dada?

3.4) Monte sistemas lineares combinando duas a duas as equações das retas dadas e obtidas em (3.1), (3.2) e (3.3).

3.5) Use o **GeoGebra** para investigar os sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas obtidos quanto ao número de soluções.

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Por meio da atividade 3 buscou-se investigar sobre sistemas lineares com o recurso do VCN, estabelecer uma conexão entre as equações algébricas (representação algébrica) de sistemas lineares e matriz inversa (método de inversão da matriz dos coeficientes) e também através dos determinantes (método da Regra de Cramer), comparar a solução algébrica obtida através do VCN com a solução geométrica do GeoGebra (representação geométrica) e finalmente sistematizar a teoria estudada (QUADRO 13).

Quadro 13 – Atividade 3 – Delineamento da abordagem matricial

Atividade 3: Uma abordagem matricial na solução de sistemas lineares 2x2

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A intenção da tarefa 1 da atividade 3 foi verificar como o software VCN desenvolve (método de Gauss/escalonamento) até definir a solução, definir a

solução algébrica no VCN dos sistemas definidos nas letras (a), (b) e (c), e representar no software GeoGebra relacionando a solução algébrica VCN com a representação geométrica no GeoGebra (QUADRO 14).

Quadro 14 – Atividade 3 – Tarefa 1

Um sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas pode ser escrito na forma matricial $AX = B$, onde $A_{2 \times 2}$ é a matriz dos coeficientes, X é a matriz coluna, no caso a matriz incógnita, e C a matriz dos termos independentes.

Assim

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

T1) Para verificar se um sistema é possível podendo ser determinado ou indeterminado, ou impossível podemos utilizar um **método conhecido como escalonamento**.

Que consiste em efetuar algumas operações como:

- Trocar de lugar duas equações do sistema;
- Multiplicar ou dividir os dois membros de uma equação do sistema por um mesmo número diferente de zero;
- Adicionar uma equação a outra, multiplicada por um número diferente de zero.

Essas operações são feitas de forma a obter um sistema de equações lineares equivalente ao primeiro em que na primeira equação aparecem as duas variáveis e na outra aparece uma única variável em que podemos calcular, substituindo na primeira encontramos o resultado da outra variável, este processo consta de reduzir o número de incógnitas.

Dados os sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -x - y = -100 \\ x + y = 90 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -x + y = -100 \\ x + y = 100 \end{cases}$$

O VCN é um software matemático de cálculo numérico que oferece opções nas resoluções de matrizes e sistemas lineares através de vários métodos inclusive pelo método de escalonamento de Gauss.

1.1) Utilizando o **software VCN** selecione sistemas lineares, sistemas lineares métodos diretos (Gauss), marque execução passo a passo e analise o que o programa faz para resolver cada sistema linear anterior e classifique cada sistema dado.

1.2) Após executar a solução algébrica no VCN, representar geometricamente no **GeoGebra**, abrir uma janela de texto e escrever o que você entendeu na solução algébrica obtida no VCN.

Atenção: salvar cada atividade desenvolvida no VCN e também no GeoGebra.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A tarefa 2 da atividade 3 procura relacionar produto de matriz (representação algébrica) com equações lineares (representação algébrica) definindo os sistemas lineares e aprender a trabalhar com o seletor (variáveis) de forma que, através da condição estipulada definida, obter no software GeoGebra o valor da variável solicitada (representação geométrica). Na atividade (2.1) definir (a) (parâmetro) de forma que o sistema apresente retas paralelas, (2.2) definir (b) (parâmetro) de forma que o sistema apresente retas coincidentes e (2.3) definir o (parâmetro) (c) de forma que a solução do sistema seja um único ponto (QUADRO 15).

Quadro 15 – Atividade 3 – Tarefa 2

T2) Estabeleça as equações lineares para cada um dos sistemas dados na forma matricial e a seguir faça o que se pede utilizando o **GeoGebra**:

2.1) $\begin{bmatrix} 3 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de **a** para que a solução do sistema seja representada por duas retas paralelas.

Dica: você pode introduzir um parâmetro $a = 1$, por exemplo, e depois variar o valor de a investigando o que se pede.

2.2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix}$, determine o valor de **b** para que a solução do sistema seja representada por duas retas coincidentes.

2.3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, determine o valor de **c** para que a solução do sistema seja representada por duas retas concorrentes, que se interceptam em apenas um único ponto.

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Em relação à tarefa 3 da atividade 3 considerou-se que uma das ações que se deve fazer durante a abordagem de um conteúdo específico no nosso caso SL é buscar lembrar conceitos aprendidos anteriormente como no nosso caso produto de matrizes aprendido, que consiste em substituir na equação dada $Au = 3u$ a matriz A e o vetor u de forma a desenvolver o que a atividade solicita, produto de matrizes Au e também o produto de um número por uma matriz $3u$ (representação algébrica) e finalmente trabalhar com variáveis no GeoGebra (representação geométrica) (QUADRO 16).

Quadro 16 – Atividade 3 – Tarefa 3

T3) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

3.1) Usando o **software GeoGebra** resolva o sistema linear $Au = 3u$ onde $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Obs: Estabeleça primeiramente as equações do sistema linear.

3.2) De que forma podem ser expressos todos os vetores $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que satisfazem o sistema do número (3.1)?

3.3) Digite $a = 1$ criando um seletor. Represente na forma de ponto, o vetor genérico encontrado na letra (b), usando a no lugar da variável x ou y .

3.4) Faça variar a movendo o seletor. A resposta que você obteve na letra b está correta? Justifique.

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A tarefa 4 da atividade 3 (QUADRO 17) consistiu em desenvolver algebricamente através da dica dada e encontrar como se define a matriz X , obtendo: $X = A^{-1}B$, portanto para encontrar a matriz X basta multiplicar a matriz

inversa (calculada no GeoGebra – representação algébrica) pela matriz dada B (produto desenvolvido no VCN – representação algébrica), lembrando que se a matriz não apresentar inversa o sistema é impossível. E representar através do GeoGebra a solução encontrada (representação geométrica). Escrever sobre o que foi observado durante a atividade.

Quadro 17 – Atividade 3 – Tarefa 4

T4) Você sabe que um sistema pode ser representado por matrizes por:
 $AX = B(1)$
 Se A é uma matriz inversível para resolver (1) o que é possível fazer?
 Dica: Experimente multiplicar à esquerda o 1º membro e o 2º membro da equação pela matriz inversa de A.
 Agora você vai usar o **software GeoGebra** para verificar se é possível resolver os seguintes sistemas pelo **método de inversão da matriz dos coeficientes**:

4.1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

4.2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A tarefa 5 da atividade 3 (QUADRO 18) procurou utilizar o GeoGebra para determinar os valores dos determinantes, no caso, das matrizes A, A_x e A_y , dividir o determinante de A_x pelo determinante de A encontrando o valor correspondente de x e dividir o determinante de A_y pelo determinante de A encontrando o valor referente à variável y (representação algébrica) e representar no GeoGebra o sistema linear (representação geométrica). Escrever no GeoGebra aquilo que observou durante o desenvolvimento da atividade.

Quadro 18 – Atividade 3 – Tarefa 5

T5) Se A é inversível, o sistema $AX = B$ pode ser resolvido pela matriz inversa e obtendo $X = A^{-1}B$
 Nesse caso, como determinante de $A \neq 0$ existe um outro método, conhecido como **Regra de Cramer**.

Dado o sistema abaixo, conforme definição anterior:

$$(S1) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Se o sistema apresenta o determinante de A diferente de zero admite solução, logo temos uma única solução.
 O método da Regra de Cramer define os valores de x e y através do quociente de determinantes.

Sendo A = matriz incompleta
 A_x a matriz que se obtém substituindo em A os coeficientes de x pelos termos independentes.
 A_y a matriz que se obtém substituindo em A os coeficientes de y pelos termos independentes.
 Então admite a seguinte solução pela regra de Cramer:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} \text{ e } y = \frac{\det A_y}{\det A}, \text{ lembrando que } \det A \neq 0$$

Utilizando o **GeoGebra**, resolva o sistema abaixo através da Regra de Cramer:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A atividade 4 foi desenvolvida no sentido de aprofundar nas questões sobre sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas, através de questões relacionadas a prática e também através de questões com dificuldades maiores por exemplo com fração, decimais e operações algébricas e como desafio um problema de 3 equações e 3 incógnitas (2.4) (QUADRO 19).

Quadro 19 – Atividade 4 – Atividades complementares

Atividade 4: Atividades complementares: (a serem resolvidas em casa)

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A tarefa 1 da atividade 4 envolveu aprofundar entre os diversos modos algébricos de resolver sistemas lineares, escalonamento (Gauss) com o software VCN, matriz inversa com o GeoGebra e Regra de Cramer com o GeoGebra de sistemas lineares com 2 equações lineares e 2 incógnitas (QUADRO 20).

Quadro 20 – Atividade 4 – Tarefa 1

T1) Resolver a tarefa 2 da atividade 3 por escalonamento sem o uso dos softwares.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A tarefa 2 da atividade 4 (QUADRO 21) apresentou como objetivo desenvolver uma maior quantidade de atividades de sistemas lineares 2x2 em que o aluno deve fazer o algebrismo necessário para que o sistema linear apresente as duas variáveis das equações dadas organizadas na forma $ax + by = c$.

Como desafio, a atividade (2.4) é um sistema com 3 equações e 3 incógnitas.

Quadro 21 – Atividade 4 – Tarefa 2

T2)

2.1) Para cada sistema indique os métodos de resolução que você conhece.

2.2) Resolva cada um dos sistemas por um método, sem usar o GeoGebra.

2.3) Verifique as soluções obtidas usando o GeoGebra.

$$a) \begin{cases} 5(x - 2y + 1) = x - 8y + 7 \\ \frac{2x - y}{3} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + y = x + 4 \\ 2x + y = x + 2y + 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 0,5x - 2,5y + 3 = 2 \\ x - 5y = -2 \end{cases}$$

2.4) Desafio: Como você resolveria este sistema?

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$$

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A importância de relacionar a linguagem natural com a linguagem matemática foi considerada na tarefa 3 da atividade 4 (QUADRO 22), ou seja, relacionar os problemas propostos (3.1) e (3.2) com cada sistema linear a definir, entender o enunciado do problema e encontrar os valores das variáveis x e y .

Quadro 22 – Atividade 4 – Tarefa 3

T3) Leia com atenção cada problema. Cada um deles pode ser modelado por um sistema de equações lineares. Estabeleça o sistema modelo e resolva.

3.1) Um caminhão-baú pode levar, no máximo, 58 caixas do tipo A ou B, de mesmo tamanho. Elas têm, respectivamente, 56 kg e 72 kg. A carga máxima para esse caminhão é de 3.840 kg em cada viagem. Quantas caixas de cada tipo são transportadas por esse caminhão, estando ele com a capacidade máxima ocupada?

3.2) No estacionamento de um shopping há 80 veículos, entre carros e motos. Sabe-se também que o número de rodas é igual a 260. Determine o número de carros e motos.

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A atividade 5 foi desenvolvida no sentido de investigar sobre sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas com o recurso do Winplot, estabelecer uma conexão entre os dois tipos de representação algébrica (VCN) e geométrica (Winplot) e finalmente sistematizar a teoria estudada (QUADRO 23).

Quadro 23 – Atividade 5 – Novas ideias SL 3x3

Atividade 5: Novas ideias sobre sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

O aluno deveria inserir na tarefa 1 da atividade 5 através do software Winplot a equação algébrica e o software desenvolveria a solução geométrica, o aluno deveria verificar se o ponto (2,2,1) era uma solução da equação linear $2x+3y-z=9$ definida por um plano, mostrando a dependência do ponto e o plano e que este ponto seria a solução da equação dada e que ele não seria a única solução da equação linear, mostrando que existem outros pontos que são e não são soluções da equação linear dada e finalmente sistematizar inserindo uma janela de texto no Winplot o que foi observado (QUADRO 24).

Quadro 24 – Atividade 5 – Tarefa 1

Você já sabe que um sistema linear de três equações e três incógnitas é um conjunto de três equações lineares da forma:

$$(S2) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Cada uma das equações do sistema é uma equação linear. As incógnitas são x , y e z e os valores $(a_1, b_1$ e $c_1)$, $(a_2, b_2$ e $c_2)$ e $(a_3, b_3$ e $c_3)$ são números reais e são chamados coeficientes. O número real (d_1) , (d_2) e (d_3) é o termo independente.

Uma tripla ordenada de números reais (α, β, γ) é solução de uma equação linear se satisfaz a equação, ou seja, se substituirmos os valores $x = \alpha$, $y = \beta$ e $z = \gamma$ na equação obtemos uma identidade.

O **Winplot** é um software geométrico que representa as duas perspectivas 2 e 3 dimensões, de fácil manuseio e de fácil instalação. Quanto ao **VCN** você já trabalhou com este software anteriormente nas atividades de sistemas lineares 2×2 .

Vamos agora utilizar os softwares **VCN e Winplot** para investigar a solução de sistemas lineares com 3 equações e 3 incógnitas.

Obs: Todas as atividades executadas no **VCN e Winplot** devem ser salvas.

Salve as atividades como APJL_A5T1 colocando as iniciais da dupla, no exemplo, AP são as iniciais de Ana Paula e JL as iniciais de Jorge Luis e A5 atividade 5, sendo a tarefa 1.

T1) A tripla ordenada de números reais (2,2,1) é solução da equação linear $2x+3y-z = 9$.

Para isso abra uma janela no **Winplot**, digite a equação explícita e localize o ponto (2,2,1).

1.1) O que você observou?

1.2) Dê exemplos de outras soluções da equação. A partir dos seus exemplos qual a conclusão que você chega?

Você pode inserir um texto e escrever suas respostas, explicando como fez para chegar a esse resultado, basta clicar em mouse texto e com o botão direito do mouse clicar na tela e aparecerá o editar texto.

Importante: Não se esqueça de salvar.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Por meio das equações algébricas dadas na tarefa 2 da atividade 5, o aluno deveria desenvolver com a representação geométrica obtendo os planos definidos e encontrar a solução e a classificação dos sistemas lineares dados. Diferenciar as representações geométricas observadas durante a construção de cada tipo de sistema linear. No caso da letra (a) o aluno deveria verificar que o primeiro plano corta os outros 2 planos que são coincidentes através de uma reta portanto o

sistema linear é definido sendo possível indeterminado, apresentando várias soluções, quanto a letra (b) o sistema apresenta duas retas paralelas e uma terceira cortando estas duas retas paralelas, portanto o sistema linear é impossível, quanto a letra (c) os 3 planos interceptam através de uma reta, portanto o sistema linear é possível indeterminado, na letra (d) os planos interceptam de 2 em 2 através de uma reta, portanto o sistema é impossível e finalmente na letra (e) os 3 planos interceptam em um único ponto então definindo o sistema linear como possível determinado apresentando como solução o ponto (-2, 3, 0). O aluno deveria fazer uma conexão entre as duas representações desenvolvidas sendo a do Winplot (representação geométrica) e a do VCN (representação algébrica) e finalmente sistematizar a solução encontrada (QUADRO 25).

Quadro 25 – Atividade 5 – Tarefa 2

T2) As tarefas indicadas a seguir deverão ser realizadas para cada um dos sistemas lineares dados:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 5x + 2y + z = 2 \\ 9x + 3y + 5z = 5 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 7y - z = 13 \end{cases}$$

2.1) Abra uma janela no **VCN**, e em sistemas lineares, entre em sistemas lineares – método direto e digite uma nova matriz chamada A cujo tamanho seja 3x3 com as coordenadas de x, y e z.

2.2) Na mesma tela crie uma nova matriz chamada de B cujo tamanho seja 3x1 com os termos independentes.

2.3) Marque a opção passo a passo e solicite para que o **software VCN** resolva o sistema através do ícone calcule, repita até obter a solução do sistema e anote o que você observou.

2.4) Abra uma janela 3-dim no **Winplot**, e crie um novo arquivo Salve o arquivo na forma do exemplo APJL_A5T1a em que, por exemplo, AP são as iniciais de Ana Paula e JL as iniciais de Jorge Luis e A5 a atividade 5 sendo a tarefa 1 letra a.

2.5) Digite as equações explícitas (isolando z) aparecerá o 1º plano obtido da 1ª equação, clique em cima da equação e insere a equação na tela, clique em dupl e duplique a equação, logo depois clique em editar e muda a equação de acordo com a 2ª equação (repita este procedimento para a 3ª equação). Você vai visualizar os três planos do sistema linear calculado anteriormente no **Winplot**.

2.6) Use as setas (para cima), (para baixo) e (para os lados) para girar e visualizar melhor os 3 planos e também as teclas (pgup) e (pgdn).

2.7) Observe o que apareceu nas janelas de geometria (**Winplot**) e algébrica (**VCN**). Registre suas observações inserindo uma janela de texto no **Winplot**, basta clicar com o botão direito do mouse e aparece na tela editar texto.

2.8) De acordo com suas observações os sistemas apresentam quantas soluções? Justifique.

2.9) Como é classificado um sistema de três equações e três incógnitas que apresenta esse número de soluções? Determine também as posições dos planos criados no **Winplot**.

Importante: Não se esqueça de inserir uma janela de texto no Winplot para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Em relação à equação algébrica do plano apresentada $2x + y - z = 1$ com outras equações algébricas na tarefa 3 da atividade 5 apresenta como objetivo obter a característica do que cada atividade solicita, por exemplo, criar outro plano que

intercepta o plano dado através de uma reta, visualizando as representações algébrica (VCN) e geométrica (Winplot) obtidas através de cada sistema linear representado (QUADRO 26).

Quadro 26 – Atividade 5 – Tarefa 3

T3) Seja o plano $2x + y - z = 1$.

3.1) Construa um 2º plano que intercepte o plano dado em uma reta.

3.2) Construa um 3º plano que seja paralelo ao 1º plano.

3.3) É possível construir um plano que seja coincidente com o plano dado? O que você observa a respeito dos coeficientes de x , y , z e do termo independente em relação ao plano dado?

3.4) Monte sistemas lineares combinando duas equações do plano dado e dos planos obtidos em (3.1), (3.2) e (3.3).

3.5) Use o **VCN e o Winplot** para investigar esses sistemas quanto ao número de soluções.

Importante: Não se esqueça de inserir uma janela de texto no Winplot para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

De acordo com as equações algébricas apresentadas da tarefa 4 da atividade 5 os alunos deveriam criar outras equações algébricas obtendo a característica do que cada atividade está solicitando, verificar assim se o aluno realmente entendeu as diferenças existentes entre os três tipos de classificação de sistemas lineares (sistema possível determinado, sistema possível indeterminado e sistema impossível). Visualizando as representações algébrica (VCN) e geométrica (Winplot) obtidas através de cada sistema linear representado (QUADRO 27).

Quadro 27 – Atividade 5 – Tarefa 4

T4) Completar com equações lineares de forma a obter sistemas lineares que satisfazem a condição especificada:

4.1) O sistema é representado por três planos paralelos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \\ \end{cases}$$

4.2) O sistema é representado através de dois planos coincidentes e um plano paralelo aos outros dois dados.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$

4.3) O sistema representa três planos coincidentes.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \\ \end{cases}$$

Importante: Não se esqueça de inserir uma janela de texto no Winplot para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A atividade 6 apresentou como objetivo investigar sobre sistemas lineares de 3 equações e 3 variáveis com o recurso do VCN, estabelecer uma conexão entre as equações algébricas (representação algébrica) de sistemas lineares e representação matricial (representação algébrica), comparar a solução algébrica obtida através do VCN com a solução geométrica do Winplot (representação geométrica) e finalmente sistematizar a teoria estudada (QUADRO 28).

Quadro 28 – Atividade 6 – Abordagem matricial na solução SL 3x3

Atividade 6: Uma abordagem matricial na solução de sistemas lineares 3x3:

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Conhecer melhor o VCN foi o objetivo da tarefa 1 da atividade 6, inclusive verificando passo a passo o que o programa desenvolve (método do escalonamento) para encontrar a solução do sistema de 3 equações e 3 incógnitas (QUADRO 29).

Quadro 29 – Atividade 6 – Tarefa 1

Um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas pode ser escrito na forma matricial $AX = B$, onde $A_{3 \times 3}$ é a matriz dos coeficientes, X é a matriz coluna, no caso a matriz incógnita, e B a matriz dos termos independentes.

Assim

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

T1) Para verificar se um sistema é possível determinado ou indeterminado, ou até mesmo impossível podemos utilizar um **método conhecido como escalonamento**.

Que consiste em efetuar algumas operações como:

- Trocar de lugar duas equações do sistema;
- Multiplicar ou dividir os dois membros de uma equação do sistema por um mesmo número diferente de zero;
- Adicionar uma equação a outra, multiplicada por um número diferente de zero.

Estas operações são feitas de forma a obter um sistema de equações lineares equivalente ao primeiro em que na primeira equação aparecem três variáveis e na segunda equação duas variáveis e finalmente na terceira equação uma única variável em que podemos calcular, substituindo na segunda equação encontramos o resultado de outra variável e substituindo as duas variáveis encontradas anteriormente, encontramos a última variável que faltava.

Dados os sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - 4y + 10z = 6 \\ 3x - 6y + 15z = 11 \end{cases}$$

1.1) Utilizando o **software VCN** selecione sistemas lineares, sistemas lineares métodos diretos (Gauss), marque execução passo a passo e analise o que o programa faz para resolver cada sistema linear anterior e classifique cada sistema dado.

1.2) Após executar a solução algébrica no **VCN**, representar no **Winplot**, abrir uma janela de texto e escrever o que você entendeu na solução algébrica.

Atenção: salvar cada atividade desenvolvida no VCN e também no Winplot.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Encontrar a solução dos sistemas lineares dados, através do método da matriz inversa, já desenvolvido anteriormente nos sistemas lineares 2x2, foi a finalidade da tarefa 2 da atividade 6 (QUADRO 30).

Quadro 30 – Atividade 6 – Tarefa 2

T2) Você sabe que um sistema pode ser representado por matrizes por:

$$AX = B(1)$$

Se A é uma matriz inversível para resolver (1) o que é possível fazer?

Dica: Experimente multiplicar à esquerda o 1º membro e o 2º membro da equação pela matriz inversa de A.

Agora você vai Usar o **software GeoGebra** para verificar se é possível resolver os seguintes sistemas pelo **método de inversão da matriz dos coeficientes**:

$$2.1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2.2) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Através do método da Regra de Cramer estudado anteriormente nas atividades de sistemas lineares 2x2, a tarefa 3 da atividade 6 apresenta como objetivo principal desenvolver e encontrar a solução do sistema dado (QUADRO 31).

Quadro 31 – Atividade 6 – Tarefa 3

T3) Se A é inversível, o sistema $AX = B$ pode ser resolvido pela matriz inversa e obtendo

$$X = A^{-1}B$$

Nesse caso, como o determinante de A é diferente de zero existe um outro método, conhecido como **Regra de Cramer**.

Dado o sistema abaixo, conforme definição anterior:

$$(S2) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Se o sistema apresenta o determinante de A diferente de zero então admite solução, sendo uma única solução.

Agora lembre você e determine a solução para x, y e z (basta voltar na solução definida na atividade 3 tarefa 5, você já teve orientação como obter os valores das variáveis).

Estabeleça as equações lineares definidas para o sistema dado na forma matricial e a seguir faça o que se pede:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Resolva o sistema linear usando o **GeoGebra** executando o sistema linear pela Regra de Cramer.

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A atividade 7 foi desenvolvida no sentido de aprofundar nas questões sobre sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas, através de questões relacionadas a

prática e também através de questões com dificuldades maiores por exemplo com decimais e operações algébricas e como desafio dois problemas de (T3) 4 equações e 4 incógnitas e o (T4) 3 equações e 4 variáveis (QUADRO 32).

Quadro 32 – Atividade 7 – Atividades complementares

Atividade 7: Atividades complementares: (a serem resolvidas em casa)

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A tarefa 1 da atividade 7 (a ser feita fora da sala de aula, em casa, por exemplo) apresentou como objetivo comparar os diversos métodos de resolução do sistema linear de forma que o aluno verificasse em cada sistema linear a melhor forma de resolução (QUADRO 33).

Quadro 33 – Atividade 7 – Tarefa 1

T1) Compare os resultados da atividade 6 das tarefas: T1(escalonamento) T2(matriz inversa) e da T3 (Regra de Cramer) e redigir sobre o grau de dificuldade encontrada que você observou na resolução dos três métodos estudados anteriormente.

Sugestão: tente fazer a T3 pelo método do escalonamento e pela matriz inversa.

Atenção: Não se esqueça de inserir uma janela de texto para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

As tarefas 2, 3 e 4 da atividade 7 foram criadas no sentido de desenvolver maior quantidade de atividades de sistemas lineares 3x3 em que o aluno deveria fazer o algebrismo necessário para que o sistema linear apresentasse as três variáveis das equações dadas organizadas na forma $ax + by + cz = d$. Como desafio, foram inseridas as atividades (T3) com 4 equações e 4 incógnitas e (T4) com 3 equações e 4 incógnitas (QUADRO 34).

Quadro 34 – Atividade 7 – Tarefas 2, 3 e 4

T2) 2.1) Para cada sistema indique os métodos de resolução que você conhece.

2.2) Resolva cada um dos sistemas por um método, sem usar o VCN.

2.3) Verifique as soluções obtidas usando o Winplot.

$$a) \begin{cases} 2x + y + z = x + 1 \\ x + y - 4z = 3 - 2z \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 0,5x + 0,5y + z = -0,5 \\ x - 2y + 3z = 2z - 5 \\ 1,5x + 0,5y + 0,5z = 1,5 \end{cases}$$

Desafio: Como você resolveria estes sistemas?

$$T3) \begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + y - z - w = 0 \\ 2x + 2z + w = -1 \end{cases}$$

$$T4) \begin{cases} x + y + 2z + 3w = 13 \\ x - 2y + z + w = 8 \\ 3x + y + z - w = 1 \end{cases}$$

Importante: Não se esqueça de inserir uma janela de texto no Winplot para registrar suas observações e de salvar as atividades.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

A tarefa 5 da atividade 7 foi desenvolvida para o aluno relacionar os problemas propostos (5.1) e (5.2) com cada sistema linear a definir, entender o enunciado do problema e encontrar os valores das variáveis x , y e z . Na atividade (5.2) responder as questões a e b solicitadas (QUADRO 35).

Quadro 35 – Atividade 7 – Tarefa 5

T5) Leia com atenção os problemas.

5.1) Este pode ser moldado por um sistema de equações lineares. Estabeleça o sistema e modelo e resolva:

Um fabricante de móveis manufatura cadeiras, mesinhas e mesas. Cada cadeira exige 10 minutos de lixagem, 6 minutos de pintura e 12 minutos de envernizamento. Cada mesinha exige 12 minutos de lixagem, 8 minutos de pintura e 12 minutos de envernizamento. Cada mesa exige 15 minutos de lixagem, 12 minutos de pintura e 18 minutos de envernizamento. A máquina de lixagem está disponível 16 horas por semana, a de pintura 11 horas por semana e a de envernizamento 18 horas por semana. Quantas peças (por semana) de cada tipo de mobília devem ser fabricadas de maneira que as três máquinas sejam plenamente utilizadas?

5.2) Faça o produto das matrizes e responda o que pede:

Uma firma de fotografia tem lojas em cada uma das seguintes cidades: Nova Iorque, Denver e Los Angeles. Um certo tipo de máquina fotográfica existe em três modelos: automático, semi-automático e não-automático. Além disto, cada máquina tem uma unidade de flash que lhe é adaptada, e a máquina é geralmente vendida juntamente com a unidade de flash correspondente. Os preços de venda das máquinas e das unidades de flash são dados (em dólares) pela matriz:

$$A = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Auto-} & \text{semi-} \\ \text{Máticas} & \text{automá-} \\ & \text{ticas} & \text{manuais} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Unidade de flash} \\ \text{Câmera} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 200 & 150 & 120 \\ 50 & 40 & 25 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A quantidade de conjuntos (máquinas e unidades de flash) disponíveis em cada loja é dada pela matriz:

$$B = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Nova} & & \text{Los} \\ \text{Iorque} & \text{Denver} & \text{Angeles} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Semi-automáticas} \\ \text{Automáticas} \\ \text{Manuais} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 220 & 180 & 100 \\ 300 & 250 & 120 \\ 120 & 320 & 250 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

a) Qual o valor total das máquinas existentes na loja de Nova Iorque?

b) Qual o valor total das unidades de flash existentes na loja de Los Angeles?

Importante: Quando utilizar o VCN, registrar todo o procedimento em uma folha a parte e entregar.

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

O capítulo 5, a seguir, discute e analisa os resultados da pesquisa.

5 DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo iniciou-se a análise por estudos acadêmicos anteriores (que tratam de SL e analisam-se textos didáticos, os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e o uso das TICs). Em seguida foram analisados conteúdos e tipos de registros constantes de livros adotados pelas escolas.

Os dados do estudo prático sobre sistemas de equações lineares (SL) foram coletados considerando três turmas do curso de Sistema de Informação. No entanto, para efeito da análise, foi considerada apenas a turma T3 (7º período da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear) constituída por 66 alunos, pois foi a turma que, além de apresentar um maior número de estudantes, teve um maior tempo disponível para as atividades. Houve dois encontros de duas aulas, enquanto que nas outras duas turmas apenas um encontro de 3 aulas por semana. A média de alunos participantes foi de 63.

De modo geral os alunos trabalharam em duplas. Apenas a primeira atividade e o Questionário de Avaliação foram desenvolvidos individualmente. Na análise das atividades feitas em dupla, foram consideradas da T3 as duplas que se mantiveram constantes ao longo do trabalho efetuando um maior número de atividades, 23 duplas. Os resultados da atividade 1, feitos individualmente, foram relativos a 41 alunos constituídos das duplas das atividades de 2 a 7. De 66 alunos das duplas em relação a atividade 1, 25 alunos não entregaram a atividade.

Conforme apresentado no capítulo 4, as atividades consistiram em resgatar ideias sobre SL de 2 equações e 2 incógnitas, conteúdo estudado anteriormente, procedendo a estudos sobre SL de 3 equações e 3 incógnitas utilizando diferentes abordagens e representações matemáticas, lançando mão em alguns momentos de recursos computacionais.

Nas seções seguintes procedeu-se à análise de cada uma das atividades, objetivando responder as questões de pesquisa:

- O uso de diferentes registros de representação semiótica em matemática pode facilitar a aprendizagem de sistemas lineares?
- O uso das TICs favorecendo a interligação da álgebra e da geometria pode facilitar a aprendizagem de sistemas lineares?

Procurou-se, assim, identificar o papel desempenhado pelo uso de diferentes registros de representação semiótica e de recursos computacionais para a compreensão do conteúdo SL.

5.1 Entendimentos de Raymond Duval na prática

O organograma da Figura 11 ilustra os dois tipos de transformações no estudo de caso de Sistemas Lineares (SL).

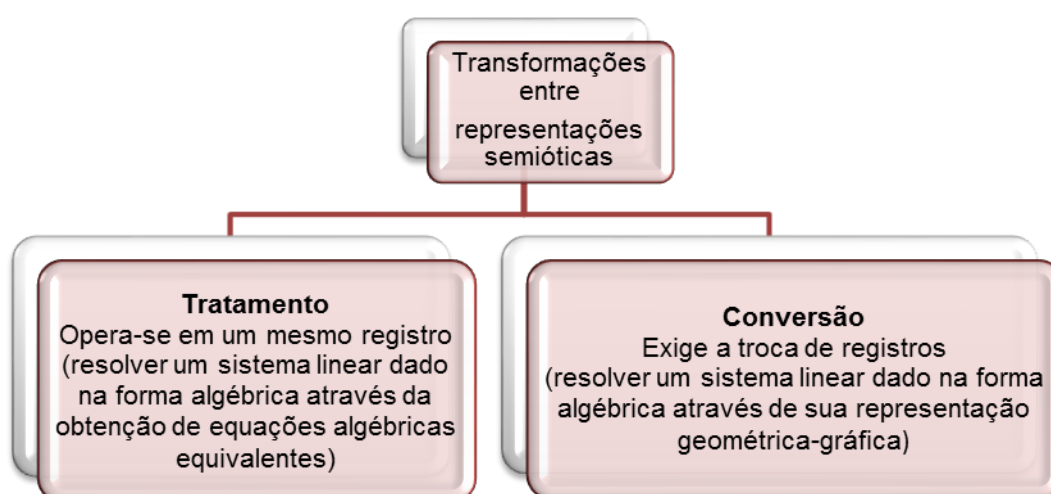


Figura 11 - Organograma mostrando os tipos de transformações entre representações semióticas no estudo de Sistemas Lineares (SL)

Fonte: Adaptado de Duval, 2003.

Conforme a Figura 11 e de acordo com Duval (2003), considerou-se a transformações de tratamento e conversão na resolução de um sistema linear, de forma que o **tratamento** é desenvolvido normalmente através de sua representação algébrica utilizando os métodos da substituição, adição e comparação para sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas e para os sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas o método do escalonamento. Em relação às transformações de tratamento e conversão mais dois métodos foram considerados sendo: o método da matriz inversa e da Regra de Cramer.

Ilustrou-se a seguir as transformações de **tratamento** na resolução de um sistema linear dado através de sua representação algébrica.

As operações algébricas realizadas para a obtenção do resultado de um sistema linear são operações dentro de um mesmo sistema de representação,

consistindo na substituição de equações lineares mais complexas por equações lineares equivalentes, porém mais simples.

Em relação aos **sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas** os métodos considerados são de adição, substituição e comparação e para **sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas** ou mais equações o método mais utilizado é o método de escalonamento. A solução é encontrada através do tratamento algébrico desenvolvido com as equações lineares, consistindo na substituição das equações lineares mais complexas, com duas ou mais incógnitas, por equações lineares mais simples, com um menor número de incógnitas.

O **método do escalonamento** consiste em operar entre si duas ou mais equações lineares de um sistema linear de forma a obter outro sistema linear equivalente, para isto devendo multiplicar ou dividir uma equação linear do sistema por uma constante (k) sendo (k) diferente de zero, ou somando uma equação linear com outra equação linear deste sistema e substituindo por uma das equações lineares do sistema linear.

A Figura 12 apresenta um exemplo da transformação tratamento pelo método do escalonamento.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Inicialmente é interessante trocar a (1ª) equação pela (2ª) equação para que o primeiro coeficiente de x seja um (facilidade em operar):

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & (1^a) \\ 3x - y + z = 2 & (2^a) \\ 2x + y + 2z = 2 & (2^a) \end{cases}$$

Para anular x na segunda equação multiplicamos a primeira equação por (-3), somamos com a segunda equação e a segunda equação original é substituída pela nova equação encontrada:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & (-3) \\ 3x - y + z = 2 & \leftarrow (1^a) \\ 2x + y + 2z = 2 & (2^a) \end{cases}$$

(-3).(1ª) : $-3.(x - 2y - z = 0) \rightarrow -3x + 6y + 3z = 0$ z = 0

$$\begin{array}{r} (-3).(1^a) + (2^a): \quad \begin{cases} -3x + 6y + 3z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases} + \\ \hline 0x + 5y + 4z = 2 \end{array}$$

Novo sistema encontrado:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & (1^a) \\ 5y + 4z = 2 & (2^a) \\ 2x + y + 2z = 2 & (3^a) \end{cases}$$

Para anular x na terceira equação multiplicamos a primeira equação por (-2), somamos com a terceira equação e a terceira equação original é substituída pela nova equação encontrada:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & (-2) & (1^a) \\ 5y + 4z = 2 & & (2^a) \\ 2x + y + 2z = 2 & & (3^a) \end{cases}$$

$$(-3).(1^a) : -2.(x - 2y - z = 0) \rightarrow -2x + 4y + 2z = 0$$

$$(-3).(1^a) + (3^a): \begin{cases} -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases} +$$

$$0x + 5y + 4z = 2$$

Novo sistema encontrado:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & (1^a) \\ 5y + 4z = 2 & (2^a) \\ 5y + 4z = 2 & (3^a) \end{cases}$$

Para anular y na terceira equação multiplicamos a segunda equação por (-1), somamos com a terceira equação e a terceira equação original é substituída pela nova equação encontrada:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & & (1^a) \\ 5y + 4z = 2 & & (2^a) \\ 5y + 4z = 2 & (-1) & (3^a) \end{cases}$$

$$(-1).(2^a) : -1.(5y + 4z = 2) \rightarrow -5y - 4z = -2$$

$$(-1).(2^a) + (3^a): \begin{cases} -5y - 4z = -2 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

$$\text{Obtemos: } \begin{cases} x - 2y - z = 0 & (1^a) \\ 5y + 4z = 2 & (2^a) \\ 0 = 0 & (3^a) \end{cases}$$

Apesar de a 3ª equação ser verdadeira, não traz informações sobre os valores das variáveis a serem calculadas, portanto poderá ser excluída do SL.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases} \quad (1^a)$$

Este sistema é considerado sistema possível indeterminado pois apresenta após o método do escalonamento o número de equações lineares igual a 2 menor que o número de incógnitas igual a 3.

Considerando a variável livre sendo z, portanto $z = \alpha$, obtemos x e y em função de $z = \alpha$:

Na 2ª equação: $5y + 4z = 2$ fazendo $z = \alpha$, obtemos a variável y:

$$5y + 4\alpha = 2 \rightarrow 5y = 2 - 4\alpha \rightarrow y = \frac{2 - 4\alpha}{5}$$

Na 1ª equação: $x - 2y - z = 0$ fazendo $z = \alpha$ e $y = \frac{2-4\alpha}{5}$, obtemos a variável x :

$$x - 2\left(\frac{2-4\alpha}{5}\right) - \alpha = 0 \rightarrow x - \frac{4}{5} + \frac{8\alpha}{5} - \alpha = 0 \rightarrow \frac{5x-4+8\alpha-5\alpha}{5} = 0 \rightarrow 5x = 4 - 8\alpha + 5\alpha \rightarrow x = \frac{4-3\alpha}{5}$$

Assim, encontramos a solução do SL: $\left(\frac{4-3\alpha}{5}, \frac{2-4\alpha}{5}, \alpha\right)$

Figura 12 – Transformação de tratamento: método do escalonamento na resolução de um sistema linear

Fonte: Elaborada pela autora, 2012.

Este método algébrico utilizado na resolução de um sistema linear visto anteriormente, conforme Duval (2003, 2009, 2011), é considerado como transformação classificada como tratamento, ou seja, desenvolvemos as operações algébricas no sentido de encontrarmos outras representações algébricas mais simples. Não houve mudança de um registro algébrico para outro.

Ilustra-se a seguir as transformações de **conversão** na solução de um sistema linear operando através de suas representações algébrica e geométrica (FIGURA 13).

Determine a solução e a classificação do SL e represente as retas do SL mostrando a solução encontrada.

Representação algébrica (método da substituição): $\begin{cases} x + y = 2 & (s) \\ x - y = 0 & (r) \end{cases}$

Definindo as retas: **Reta (s): $x + y = 2$**
 Para $x = 0$ definindo y : $0 + y = 2$ logo, $y = 2$.

Para $y = 0$ definindo x : $x + 0 = 2$ logo, $x = 2$

Reta (r): $x - y = 0$

Para $x = 0$ definindo y : $0 - y = 0$ logo, $y = 0$

Para $x = 2$ definindo y : $2 - y = 0$ logo, $y = 2$.

Definindo o ponto de encontro das retas através do método da substituição:

Na segunda equação linear: $x - y = 0$

$x = y$

Substituindo $x = y$ na primeira equação linear: $x + y = 2$

$y + y = 2$ $2y = 2$ $y = 1$

E como $x = y$ substituindo $y = 1$ logo $x = 1$

Sistema possível determinado

Solução: $\{1, 1\}$

Representação gráfica:

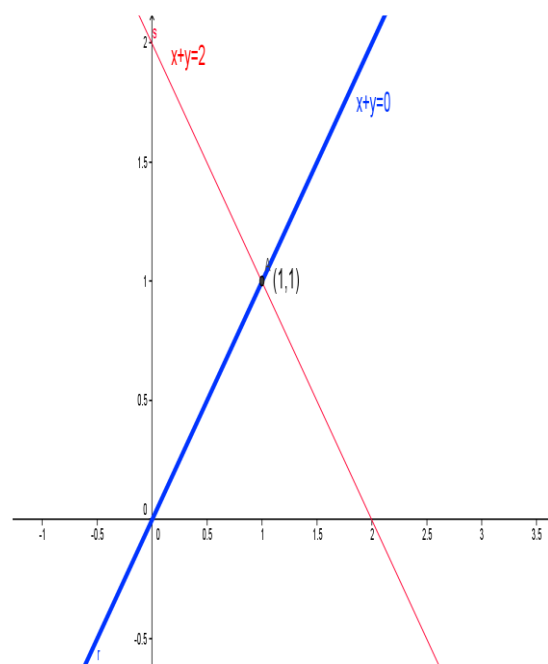


Figura 13 – Transformação de conversão: representação algébrica para a representação geométrica na resolução de um SL

Fonte: Elaborada pela autora, 2012.

No exemplo da Figura 13 percebe-se o uso das duas transformações consideradas de tratamento e conversão. Verificada a importância de trabalhar os dois tipos de transformação de acordo com Duval (2003, 2009, 2011), neste exemplo de SL, quando executados os cálculos algébricos trabalhou-se a transformação de tratamento no sentido de obter as coordenadas de x e y , definindo assim o ponto de encontro das retas. Conseqüentemente executou-se a transformação de conversão quando, após o tratamento, foram representadas graficamente as retas do SL e foi verificado o ponto de encontro das retas.

Segundo Duval (2003, 2009, 2011) as conversões do registro algébrico para o geométrico e do geométrico para o algébrico apresentam níveis diferentes de dificuldades para os alunos:

[...] A conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivas tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha. Em outras palavras, pra que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único (DUVAL, 2011, p. 118)

De acordo com a Figura 13, que retrata a conversão da representação algébrica para a representação geométrica, foi feito o inverso da representação geométrica para a algébrica, retratando que o grau de dificuldade requisitado nos dois tipos de conversões é diferente.

A Figura 14 apresenta um exemplo da transformação de conversão entre as representações geométrica e algébrica.

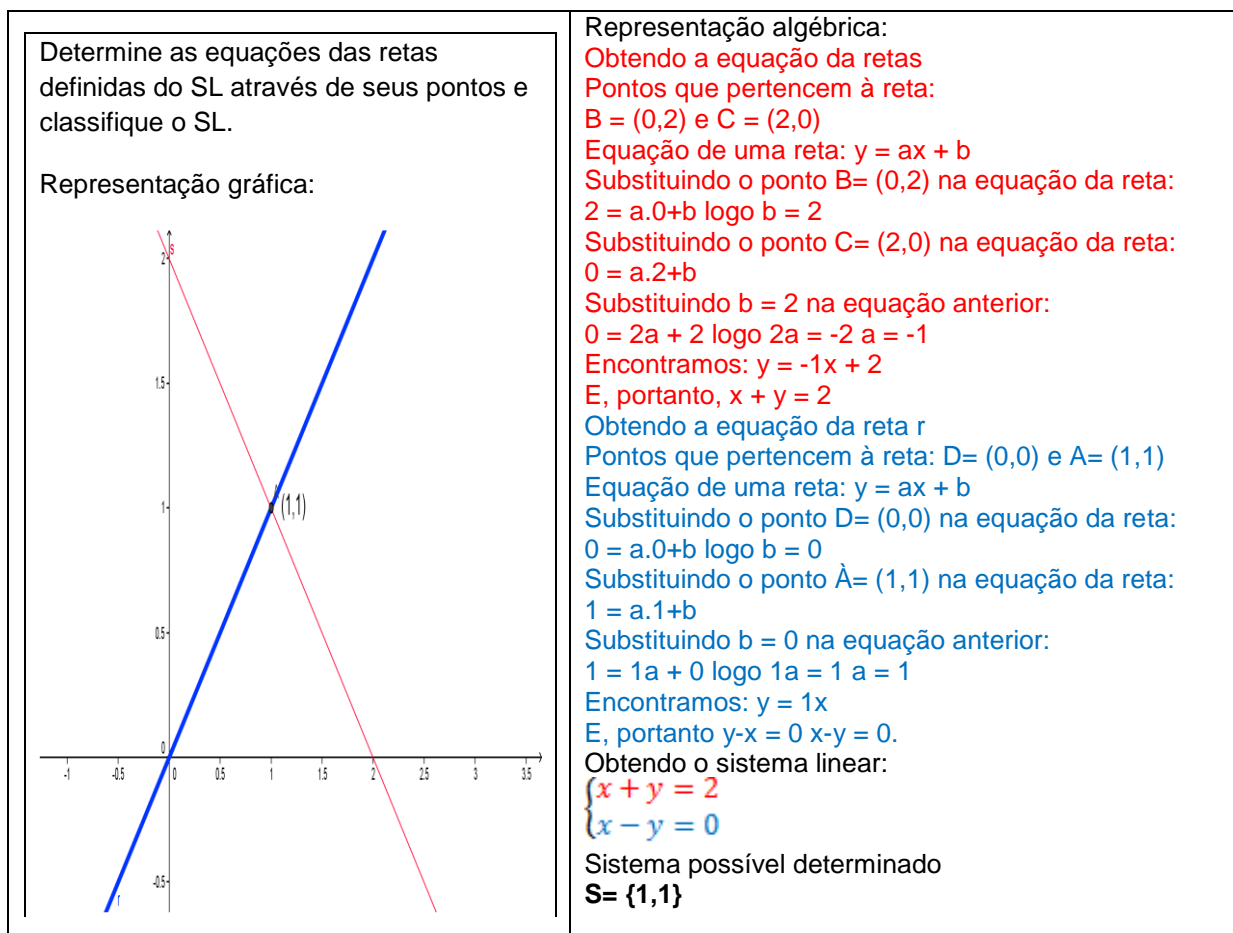


Figura 14 – Transformação de conversão: representação geométrica para a representação algébrica na resolução de um sistema linear

Fonte: Elaborada pela autora, 2012.

No exemplo da Figura 14 percebe-se o uso das duas transformações consideradas de conversão e tratamento. Neste exemplo de SL executou-se a conversão da representação gráfica para a representação algébrica executando os cálculos algébricos. Trabalhou-se a transformação de tratamento no sentido de obter as equações lineares, definindo, assim, as retas do SL e podendo verificar o ponto de encontro das retas. A resolução da tarefa proposta da Figura 14 é considerada difícil pelos alunos. Isso é explicado em parte pelo fato que os textos didáticos de modo geral não apresentam exercícios desta natureza.

Nos exemplos x e y, percebe-se o uso das duas transformações conversão e tratamento, podendo verificar que o grau e resolução de tratamento algébrico exigido são diferenciados, podendo assim considerar que o aluno poderá apresentar dificuldades na resolução de cada um dos exemplos x e y.

Além do método clássico ‘escalonamento’ mostrado anteriormente na solução de SL de 3 equações e 3 incógnitas, que é resolvido somente através da

transformação de tratamento algébrico, retrataremos agora outro método de SL 3x3 considerado o método da matriz inversa cuja solução além de retratar o tratamento algébrico de produto de matrizes necessita também da transformação de conversão entre a representação algébrica de equações lineares em matricial. Este método consiste em multiplicar a matriz inversa da matriz dos coeficientes lineares pela matriz dos resultados obtendo assim a solução do sistema linear. Considera-se este método mais trabalhoso que o método do escalonamento, pois antes de executar o produto de matrizes é necessário calcular a matriz inversa da matriz dos coeficientes lineares. Este método é utilizado somente quando o número de equações for igual ao número de variáveis. Importante considerar também que existe uma restrição de encontrar a solução do SL por este método, que ocorre quando não existe a matriz inversa da matriz dos coeficientes lineares.

A Figura 15 apresenta um exemplo das transformações 'conversão e tratamento' pelo método da matriz inversa.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

$AX = B$

Logo, A (matriz dos coeficientes lineares) = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

X (matriz dos coeficientes) = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

B (matriz dos resultados) = $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

Obtendo a matriz inversa de A:
 $A \cdot A^{-1} = I$

I (matriz identidade) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Portanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Voltando ao sistema $AX = B$
 Multiplicando o primeiro e o segundo membro pela matriz inversa:
 $AXA^{-1} = BA^{-1}$

Podemos escrever da seguinte forma sem alterar a equação:
 $AA^{-1}X=A^{-1}B$, como $AA^{-1} = I$, logo:
 $X=A^{-1}B$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solução: (1, 2, 3)

Figura 15 – Transformações tratamento e conversão: método da matriz inversa na resolução de um sistema linear

Fonte: Elaborado pela autora, 2012.

Um terceiro método usado na solução de SL de 3 equações e 3 incógnitas, além do escalonamento que utiliza o tratamento algébrico e o método da matriz inversa que utiliza tratamento e conversão, é o **método da Regra de Cramer**, também considerado na sua resolução como transformação de **conversão e tratamento** em que a solução é encontrada através do cálculo dos determinantes das matrizes trocando as referidas colunas pelos termos da coluna dos termos independentes da matriz pelo quociente do determinante da matriz incompleta. Neste método ocorre restrição quando o determinante da matriz incompleta ou também chamada de matriz dos coeficientes lineares do SL for igual a zero, não podemos desenvolver por este método, através da Regra de Cramer resolvemos apenas para sistemas lineares com uma única solução, ou seja, sistema linear possível determinado. Da mesma forma que a resolução de SL pelo método da matriz inversa este método pode ser utilizado somente quando o número de equações lineares for igual ao número de variáveis do SL.

Expressões indeterminadas cujo numerador e denominador tendem a zero, não leva a conclusão que o sistema linear é possível indeterminado. Até porque, conforme ficou esclarecido anteriormente, apenas pode-se utilizar o método Regra de Cramer quando o determinante da matriz do sistema linear for diferente de zero.

A Figura 16 apresenta um exemplo da transformação tratamento e conversão pelo método da Regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Em primeiro momento calculamos o valor do determinante da matriz do coeficiente do sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (portanto o sistema linear apresenta uma \u00fanica solu\u00e7\u00e3o podendo ser}$$

calculada atrav\u00e9s da Regra de Cramer)

Trocando a primeira coluna dos coeficientes da matriz do sistema linear pela coluna dos resultados e calculando o valor do determinante:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Trocando a segunda coluna dos coeficientes da matriz do sistema linear pela coluna dos resultados e calculando o valor do determinante:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Trocando a terceira coluna dos coeficientes da matriz do sistema linear pela coluna dos resultados e calculando o valor do determinante:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 3$$

Logo, definimos os valores das vari\u00e1veis x, y, e z:

$$x = D_1/D = 1/1 = 1$$

$$y = D_2/D = 2/1 = 2$$

$$z = D_3/D = 3/1 = 3$$

Solu\u00e7\u00e3o: (1, 2, 3)

Figura 16 – Transforma\u00e7\u00e3o tratamento e convers\u00e3o: m\u00e9todo da Regra de Cramer na resolu\u00e7\u00e3o de um sistema linear

Fonte: Elaborada pela autora, 2012.

Tanto o tratamento quanto a convers\u00e3o s\u00e3o duas transforma\u00e7\u00f5es importantes para obter o conhecimento referente ao objeto sistema linear. E \u00e9 atrav\u00e9s das duas transforma\u00e7\u00f5es de tratamento e convers\u00e3o que o aluno n\u00e3o ir\u00e1 confundir o objeto sistema linear com suas representa\u00e7\u00f5es alg\u00e9brica e geom\u00e9trica.

A efici\u00eancia de cada registro \u00e9 verificada \u00e0 medida que o aluno assimila a necessidade de utilizar as representa\u00e7\u00f5es e deve atentar para a possibilidade de transforma\u00e7\u00e3o sendo a de tratamento e a de convers\u00e3o de acordo com um registro ser mais interessante e eficiente que o outro. O educador, segundo Duval (2003, 2009, 2011), deve procurar a melhor representa\u00e7\u00e3o para utilizar com o objetivo de o

aluno compreender o conteúdo, mas utilizando somente uma representação pode ocorrer confusão entre o objeto estudado e sua representação.

Para alguns alunos a conversão dos registros de representação semiótica pode se tornar mais difícil devido ao ensino de duas representações semióticas, ao invés de apenas uma, no entanto para outros pode proporcionar uma real compreensão do conteúdo sistema linear não confundindo assim a representação com o objeto.

A partir do item 5.5 abaixo exposto, analisam-se efetivamente as sete atividades propostas no estudo, que podem ser consideradas excessivas, mas a alma de professora esteve e continuamente está presente nas atividades que possam aperfeiçoar o ensino e a aprendizagem da Matemática, buscando identificar as dificuldades e apresentar as soluções matemáticas, especialmente as que se referem aos sistemas lineares por meio de múltiplas linguagens de tecnologias.

Como um projeto experimental e empírico, entende-se que outros aperfeiçoamentos serão necessários.

5.2 Análise da atividade 1

A atividade 1 foi desenvolvida individualmente revendo os três métodos de resolução de um SL: adição, substituição e comparação. A atividade era composta por apenas uma tarefa que propunha a solução do SL $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$. Inicialmente a solução do SL por meio do método da substituição foi apresentada. A tarefa consistia em resolver o mesmo SL usando os métodos da adição e da comparação, incentivando o registro escrito sobre a resolução de cada método desenvolvido de forma a usar as linguagens algébrica e natural.

Participaram da primeira atividade 41 alunos da turma 3, mas foram considerados apenas os estudantes que se mantiveram em dupla constante até a atividade 7. Estes alunos desenvolveram corretamente a tarefa pelo método da adição e apenas um aluno determinou somente uma das variáveis, no caso y. Dezoito (18) alunos determinaram primeiramente a variável y e após x e 13 alunos determinaram x e depois y.

Visualmente parece ser mais fácil enxergar e multiplicar a primeira equação linear por -2 e eliminar a variável x encontrando y e depois x.

Na Figura 17 ilustra-se primeiramente o exemplo de um aluno que determinou a variável y e depois x e na sequência o exemplo de outro estudante que determinou a variável x e depois y .

Adição

$$\begin{array}{l} 1- \quad x - 3y = -3 \quad (-2) \\ \quad 2x + y = 8 = 0 \quad (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2x + 6y = 6 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array} \quad / \quad \begin{array}{l} 6y = 6 \\ y = 8 \end{array} \quad / \quad \begin{array}{l} 7y = 14 \\ y = \frac{14}{7} \end{array} \quad \boxed{y = 2}$$

$$x - 3 \cdot 2 = -3$$

$$x - 6 = -3$$

$$x = -3 + 6$$

$$\boxed{x = 3}$$

3.1) Adição

$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \cdot (3) \quad \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 2 \cdot 3 + y = 8 \\ y = 8 - 6 \\ \boxed{y = 2} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 6x + 2y = 24 \end{cases}$$

$$7x = 21$$

$$\boxed{x = 3}$$

Figura 17 – Método da adição – T3A6 e T3A63

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Considerando os registros escritos sobre o método utilizado algumas colocações dos alunos foram apresentadas, como por exemplo, o aluno 15 comentou sobre escolher a primeira equação linear para multiplicar por uma constante ficando mais fácil definir primeiramente a variável y (FIGURA 18).

1.1) Resolver o sistema pelo método da adição.

Procurando o valor de Y

1º passo: escolhi a primeira equação porque ficará mais fácil para descobrir Y.

2º passo: multipliquei a equação por -2:

$$(x - 3y = -3) \cdot (-2)$$

$$\boxed{-2x + 6y = 6}$$

3º passo: somei a 1ª equação que obtive no 2º passo com a 2ª equação:

$\left. \begin{array}{l} -2x + 6y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{array} \right\}$	$\boxed{0 + 7y = 14}$	$2x + y = 8$
		$2x + 3 = 8$
		$2x = 5$
		$x = \frac{5}{2}$
	$7y = 14$	$x = \frac{5}{2}$
	$y = \frac{14}{7}$	$\boxed{x = 3}$
	$\boxed{y = 2}$	

Figura 18 – Método da adição – T3A15
 Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Dificuldades vivenciadas na atividade 1

Destacou-se o registro do aluno A12, que comentou sobre eliminar uma das variáveis e logo depois afirmou que as equações deveriam ser multiplicadas pelo número que acompanha y. Observou-se dois equívocos nesta colocação, sendo que o correto seria multiplicarmos apenas uma equação linear e não as equações do SL. Após falar sobre eliminar uma das variáveis, o aluno afirmou que deveria ser eliminada a variável y, mas isto não ocorreria necessariamente (FIGURA 19).

$\begin{cases} x - 3y = -3 \cdot 1 \\ 2x + y = 8 - 3 \end{cases}$	<p>Obs.: Elimina uma das incógnitas. Para resolver, devemos multiplicar as equações pelo número que acompanhará a variável y.</p>
$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 6x + 3y = 24 \end{cases}$	
$\begin{aligned} 7x &= 21 \\ x &= \frac{21}{7} = \boxed{3} \end{aligned}$	<p>Obs.: Realizamos a soma da equação e encontramos o resultado.</p>
$\begin{aligned} 3 - 3y &= -3 \\ 3y &= 6 \\ y &= \frac{6}{3} = \boxed{2} \end{aligned}$	<p>Obs.: Devemos substituir o valor y encontrado para o valor x.</p>

Figura 19 – Método da adição – T3A12

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

No caso apresentado na Figura 20 o aluno 3 apenas comentou sobre somar as duas equações e não a necessidade de multiplicar uma das equações e a seguir somar as equações lineares para eliminar uma das variáveis.

1.1) Método de adição

$$\begin{cases} x - 3y = -3 & (1) \\ 2x + y = 8 & (2) \end{cases}$$

Faz a soma da equação 1. com a 2

$$\begin{cases} x - 3y = -3 & (-2) & (1) \\ 2x + y = 8 & & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 6y = 6 & (1) \\ 2x + y = 8 & (2) \end{cases}$$

$$2x + y = 8$$

$$2x + 2 = 8$$

$$2x = 8 - 2$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = 3 \text{ e } y = 2$$

Figura 20 – Método da adição – T3A3

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Alguns cuidados com a linguagem formal da matemática não foram consideradas no exemplo da Figura 21 a seguir, em que o aluno 6 escreve sobre multiplicar em cima e em baixo e não em multiplicar uma das equações lineares por um valor constante em que, somando as equações, eliminando uma das variáveis.

1.1) ADIÇÃO

$$\begin{cases} x - 3y = -3 & (-2) \\ 2x + y = 8 & (1) \end{cases}$$

Multipliquei em cima e em baixo por (-2) e (1) respectivamente possibilitando eliminar o X.

$$\begin{cases} -2x + 6y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$7y = 14$$

$$y = 2$$

Figura 21 – Método da adição – T3A6

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Dos alunos analisados em relação ao método da comparação, apenas dois alunos isolaram a variável y e determinaram inicialmente a variável x e depois

determinaram y , entendendo-se que o fato se deve provavelmente por x ser mais fácil isolar que y na primeira equação. A Figura 22 mostra essa situação em relação a duas tarefas feitas em que um aluno determinou primeiro x e em seguida y .

6.2) $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ -3y &= -3 - x \\ y &= \frac{-3 - x}{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 - x &= 8 - 2x \\ -3 & & -3 \\ -3 - x &= -21 + 6x \\ 2x &= 21 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ y &= 8 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ 2 \cdot 3 + y &= 8 \\ 6 + y &= 8 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Figura 22 – Método da comparação – T3A48 e t3A49

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Interessante a maneira como o aluno 11 da resposta apresentada na Figura 23 separou a variável x . Na realidade isolou $2x$ nas duas equações lineares, igualou $2x$ e determinou o valor da variável y , comentando sobre os cálculos executados, mesmo observando que multiplicou a 1ª equação por 2 para separar $2x$ e igualar as equações.

1.2 MÉTODO DA COMPARAÇÃO

$$\begin{cases} x - 3y = -3 & \cdot 2 \\ 2x + y = 8 & \cdot 1 \end{cases}$$

Obs.: Multiplicar as equações pelo número que acompanha a variável y para que seja possível igualar as variáveis.

$$\begin{cases} 2x - 6y = -6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$2x = -6 + 6y$$

$$2x = 8 - y$$

$$-6 + 6y = 8 - y$$

$$+6y + y = 8 + 6$$

$$7y = 14$$

$$y = 14/7 = \boxed{2}$$

Obs.: Nesta etapa seguinte realizamos a separação da variável x .

Obs.: As equações iguais

Obs: Resultado.

$$x - 3y = -3$$

$$x - 3(\boxed{2}) = -3$$

$$x = 6 - 3 = 3$$

Obs.: Substituímos o y pelo valor encontrado no caso o número 2.

Figura 23 – Método da comparação – T3A11

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Na tarefa em que o aluno deveria ter resolvido pelo método da *comparação*, a Figura 24 mostra a situação em que o aluno não percebeu ter desenvolvido pelo método da *substituição*, inclusive quando comenta sobre achar o valor de x . Quando colocou esta variável em evidência, obteve outra equação linear com as variáveis x e y . Afirmou ter determinado x , mas não o fez.

1.2) ComparaçãO

$$\begin{cases} X-3Y = -3 \\ 2X+Y = 8 \end{cases}$$

$$X = 3Y - 3$$

$$2 \cdot (3Y - 3) + Y = 8$$

$$6Y - 6 + Y = 8$$

$$7Y = 14$$

$$Y = 2$$

Coloquei o X em evidência na primeira equação e achei o valor dele, possibilitando substituí-lo na segunda.

Figura 24 – Método da comparação – T3A6

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A Figura 25 mostra que o método algébrico executado na tarefa e os registros escritos muitas vezes não correspondem, de forma que os alunos, apesar de resolverem corretamente, não conseguiram escrever sobre os cálculos executados.

1.7. Método da Comparação

$$X-3Y = -3 \times 2$$

$$2X+Y = 8 \times 1$$

Coloquei as 2 equações no mesmo valor e igualei a variável e fiz a comparação.

$$2X-6Y = -6$$

$$2X+Y = 8$$

$$2X = -6 + 6Y$$

$$2X = 8 - Y$$

$$-6 + 6Y = 8 - Y$$

$$6Y + Y = 8 + 6$$

Resolvendo a comparação, encontro o resultado do valor de Y

$$7Y = 14$$

$$Y = \frac{14}{7}$$

$$Y = 2$$

$$X-3Y = -3$$

$$X-3(2) = -3$$

$$X = 6 - 3$$

$$X = 3$$

Figura 25 – Método da comparação – T3A9

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Observou-se na análise da atividade 1 que os alunos apresentaram dificuldades em relacionar os cálculos executados no método algébrico e a escrita formulada. Complementarmente, que muitas vezes não havia coerência entre transformações de registros.

5.3 Análise da atividade 2

A atividade 2 utilizou o software GeoGebra para investigar sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas, tendo sido dividida em 3 tarefas.

A tarefa 1 consistia em verificar soluções para a equação linear $2x + 3y = 10$ que no caso define uma reta, a tarefa apresentou uma dupla ordenada (2, 2) para que o aluno verificasse se esta dupla, ou seja, o ponto era solução da equação linear, e também que o aluno definisse outros pontos que também eram solução da reta dada.

Dificuldades vivenciadas na atividade 2

Alguns alunos criaram pontos que não eram solução da equação linear dada (substituíram o ponto criado na equação linear dada) e realmente esses pontos não pertenciam à reta dada.

Na Figura 26 ilustrou-se a tarefa 1 feita pela dupla que criou 5 pontos, sendo 3 pontos pertencentes à reta (2, 2), (0.5, 3), (1.14, 2.57) e também 2 pontos não pertencentes ao plano (4, 4, 2), (4, 3, 4).

A dupla apresentou o registro escrito solucionando a equação linear por representações algébricas (substituindo os pontos criados na equação linear) e da representação geométrica (visualização dos pontos e da reta no plano).

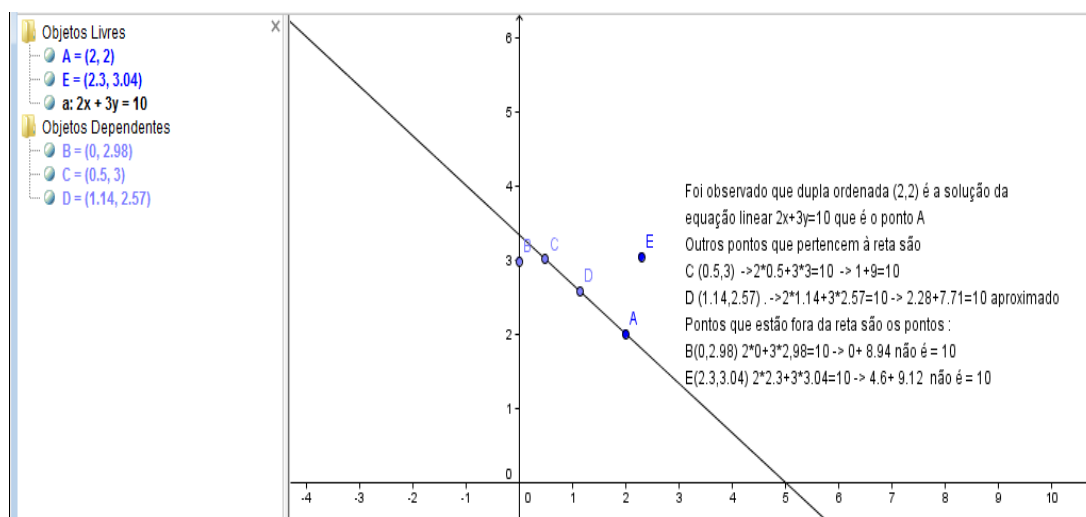


Figura 26 – Atividade 2 - Tarefa 1 T3 dupla D5

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Verificou-se também a solução apresentada pela dupla 2 da turma 3, em que a dupla, apesar de definir a reta dada, ao invés de criar outros pontos pertencentes à reta, equivocadamente definiu outra reta $2x+3y = 15$ paralela a reta dada $2x+3y = 10$. Verificou-se que os alunos muitas vezes apresentam dificuldades em interpretar o que a atividade solicita (FIGURA 27), porque eventualmente não se preocuparam com o enunciado.

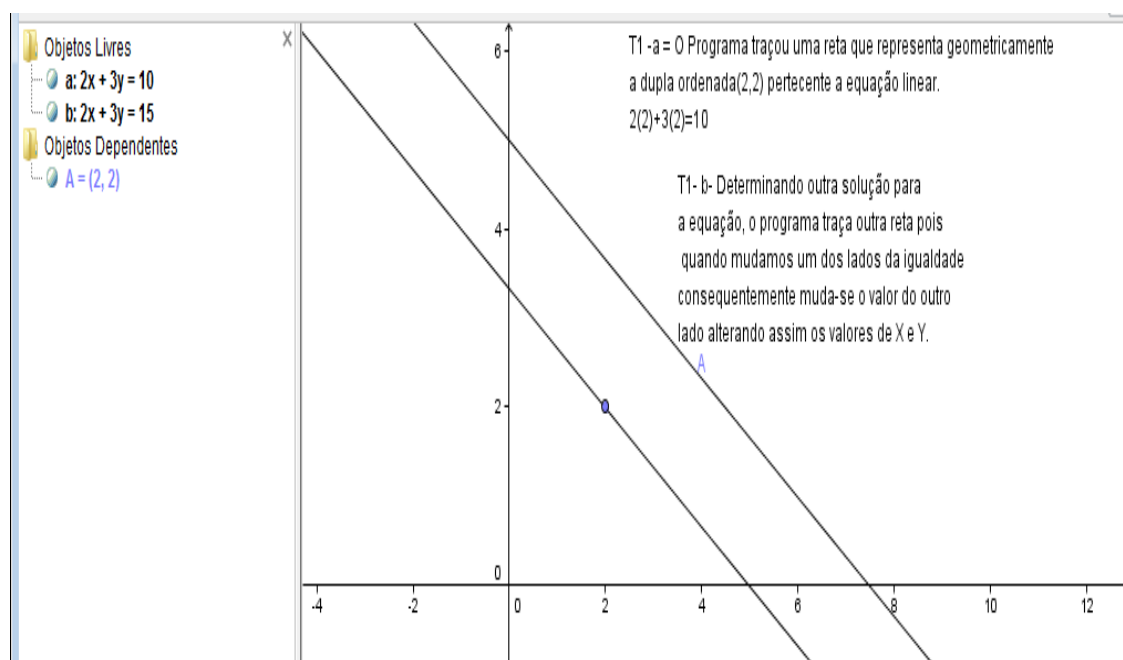


Figura 27 – Atividade 2 - tarefa 1 T3 dupla D2

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Em outras tarefas, como a da dupla 8 da turma 3, não foram definidos outros pontos pertencentes à reta, mas apenas definido o ponto de coordenadas (2,2)

pertencente à reta e criado outro ponto de coordenadas (3,3), mostrando que este ponto não pertence à reta dada.

A tarefa 2 da atividade 2 foi apresentada sendo composta por três sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

Na letra (a) o sistema linear foi classificado como sistema possível determinado, concorrente em um único ponto $s = (4,3)$, na letra (b) sistema possível indeterminado, portanto, retas coincidentes, e letra (c) sistema impossível constituído por retas paralelas. O aluno na tarefa 2 deveria resolver os sistemas lineares.

Pelas duas janelas apresentadas pelo GeoGebra (que mostra a representação algébrica com os dados digitados pelos alunos e a representação geométrica visualizada das retas definidas no sistema linear), o aluno deveria compreender as três soluções encontradas de forma a diferenciar os três tipos de classificação dos sistemas lineares.

As maiores dificuldades encontradas nesta tarefa foram dúvidas no momento de digitalizar as equações lineares no GeoGebra e na relação entre as duas representações algébrica e geométrica visualizadas no GeoGebra, como também no momento da linguagem escrita: por exemplo, alguns alunos confundiram expressão com equação.

A dupla 7 da turma 3, no momento de escrever sobre a solução do sistema linear da tarefa 2a, escreveu que o sistema é *linear determinado* e não sistema possível determinado, confundindo linear com possível, ou até mesmo esquecendo do possível, como ilustra a Figura 28.

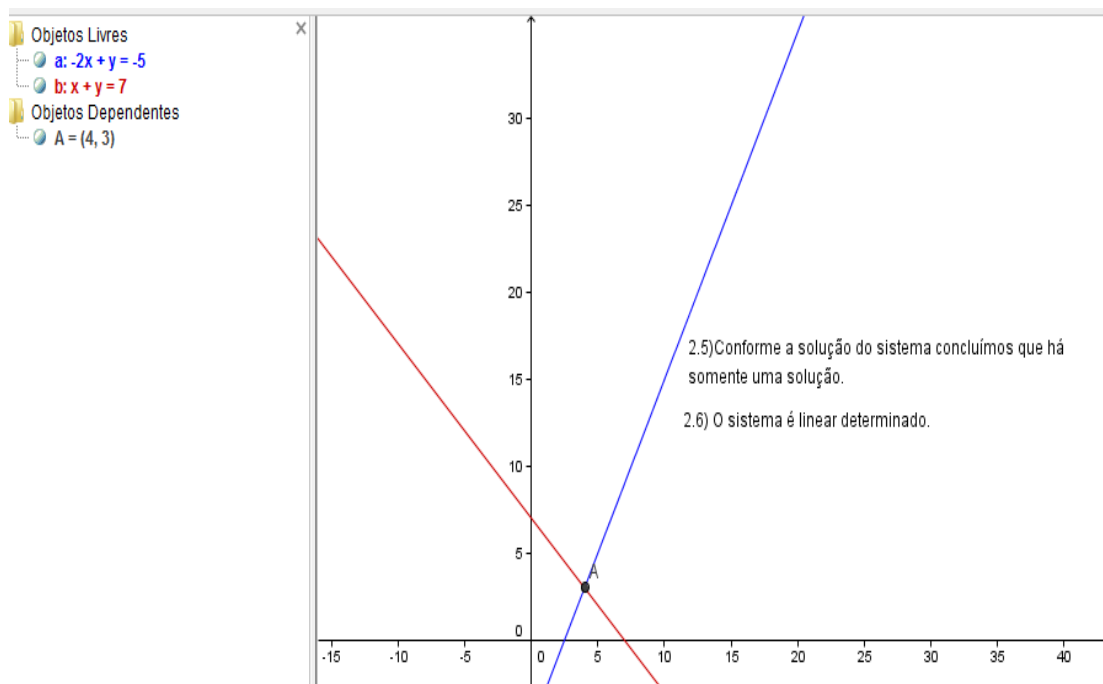


Figura 28 – Atividade 2 tarefa 2a – T3 dupla D7

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Outra dupla cometeu o equívoco no momento de escrever sobre a tarefa 2b, escrevendo que o sistema linear era possível indeterminante, sendo que o sistema linear é classificado como sistema possível indeterminado (FIGURA 29).

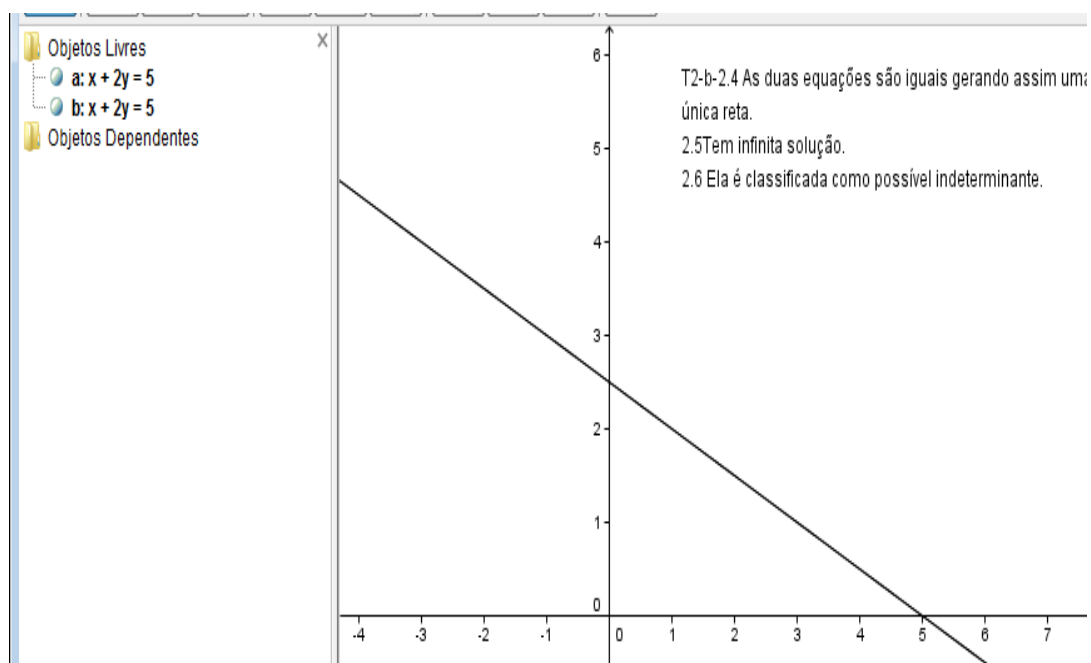


Figura 29 – Atividade 2 tarefa 2b - T3 dupla D6

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A Figura 30 mostra que além de a dupla 18 resolver pela representação geométrica mostrou no momento de expressar sobre a solução encontrada que através da representação algébrica (método da substituição) encontrou $0 = 7$, classificando o sistema como impossível.

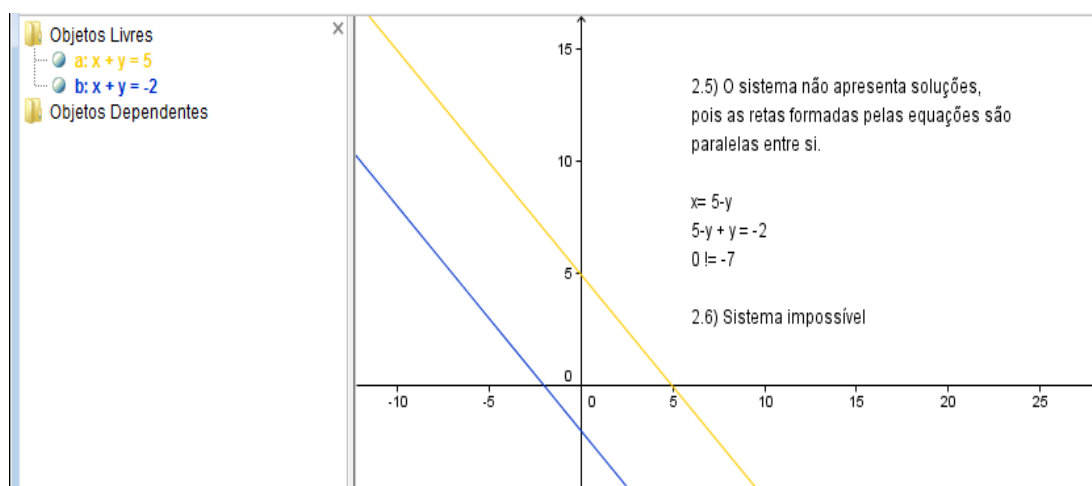


Figura 30 – Atividade 2 tarefa 2c – T3 dupla D18

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Observou-se que nessa atividade com o uso das TICs, o software contribuiu para melhor assimilação da resolução de sistema linear, de forma que agilizou os cálculos na obtenção das soluções de cada sistema linear. Através da solução geométrica, o aluno visualizou a resolução do sistema linear através das equações lineares do SL que geraram retas.

Verificou-se, também, que disponibilizando a representação geométrica e solicitando para que o aluno definisse as equações lineares do SL através da representação algébrica, o aluno encontrou maior dificuldade em fazer o procedimento, mas ocorreu maior facilidade disponibilizando a representação algébrica para que o aluno visualizasse a representação geométrica.

Na tarefa 3 o aluno deveria construir outras retas em relação à reta $y = 2x + 4$ com as características definidas em cada item, sendo essa construção em relação sempre à reta dada na tarefa.

O maior equívoco em relação à tarefa foi que alguns alunos construíram as retas dadas não em relação à reta dada, mas em relação a uma das retas construídas por eles.

Na Figura 31 a reta criada c foi criada em relação à reta b também criada pela dupla, portanto não em relação à reta dada considerada pela dupla de reta a ($y = 2x + 4$).

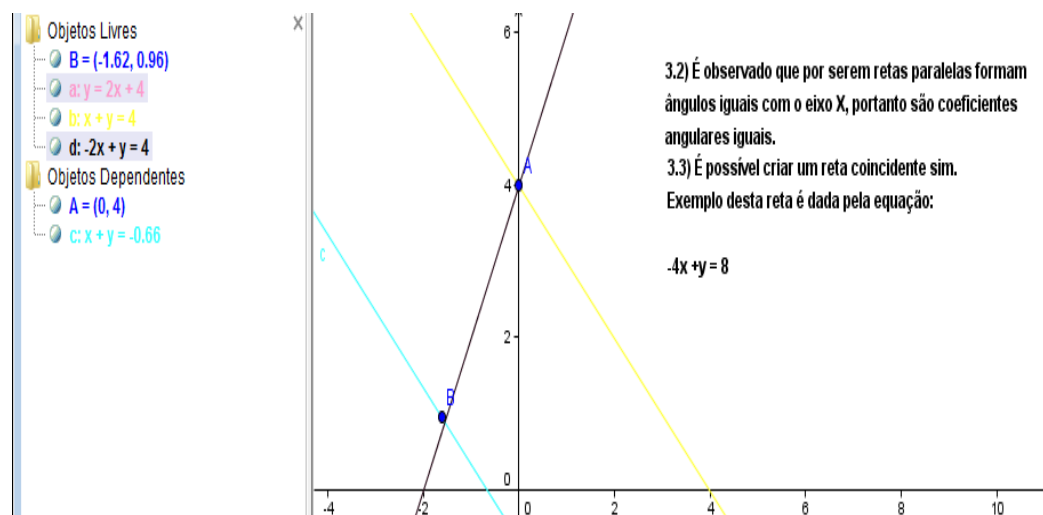


Figura 31 – Atividade 2 tarefa 3 – T3 dupla D27

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Observou-se em relação às retas criadas que os alunos apresentaram dificuldades em diferenciar os três tipos de classificação do SL (possível e determinado, impossível e possível indeterminado) em relação às características observadas. Como, por exemplo, que para um sistema linear ser classificado como possível indeterminado, ou seja, retas coincidentes, os coeficientes entre as retas deveriam ser proporcionais, tendo como exemplo $x + 2y = 5$ e $2x + 4y = 10$, a segunda equação linear seria o dobro da primeira equação linear.

5.4 Análise da atividade 3

A atividade 3 foi composta por 5 tarefas, que consistiam em resolver os sistemas lineares 2×2 através de matriz. A tarefa 1 apresentava três sistemas lineares:

$$a) \begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -x - y = -100 \\ x + y = 90 \end{cases} \quad c) \begin{cases} -x + y = -100 \\ x + y = 100 \end{cases}$$

O aluno deveria resolver os sistemas lineares pelo método algébrico do escalonamento, utilizando o programa VCN e verificando o resultado encontrado no VCN através do GeoGebra pelo método geométrico.

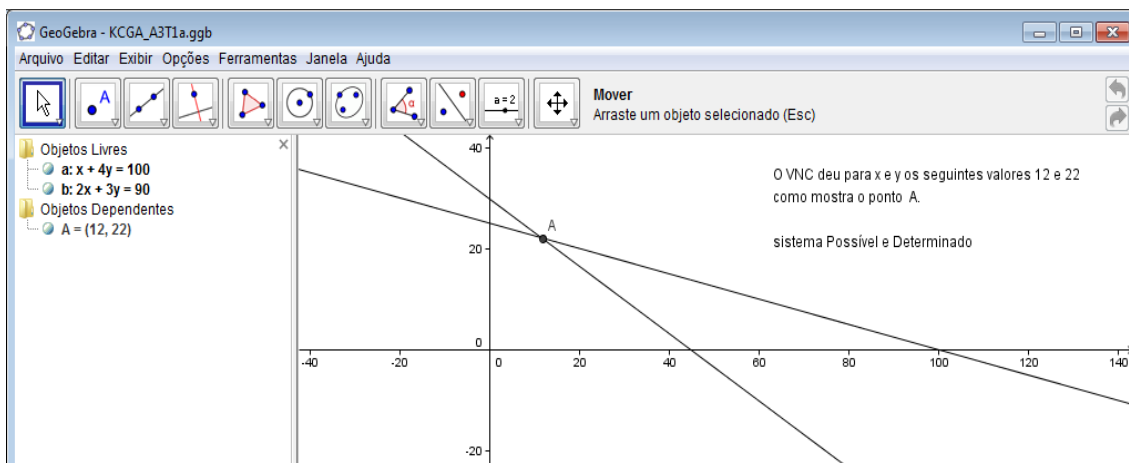


Figura 33 – Atividade 3 tarefa 1.1a – T3 dupla D22 - GeoGebra

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Ainda em relação à tarefa 1.1 letra b (FIGURA 34), a dupla 3 da turma 3 não falou no registro escrito sobre as retas serem paralelas e chamaram as retas de distintas, criaram dois pontos um em cada reta, falando equivocadamente que esses pontos eram solução do sistema. A dupla ainda afirmou que o SL era impossível, dupla interpretação do mesmo SL. Assim, se o SL foi classificado como impossível, como houve solução?

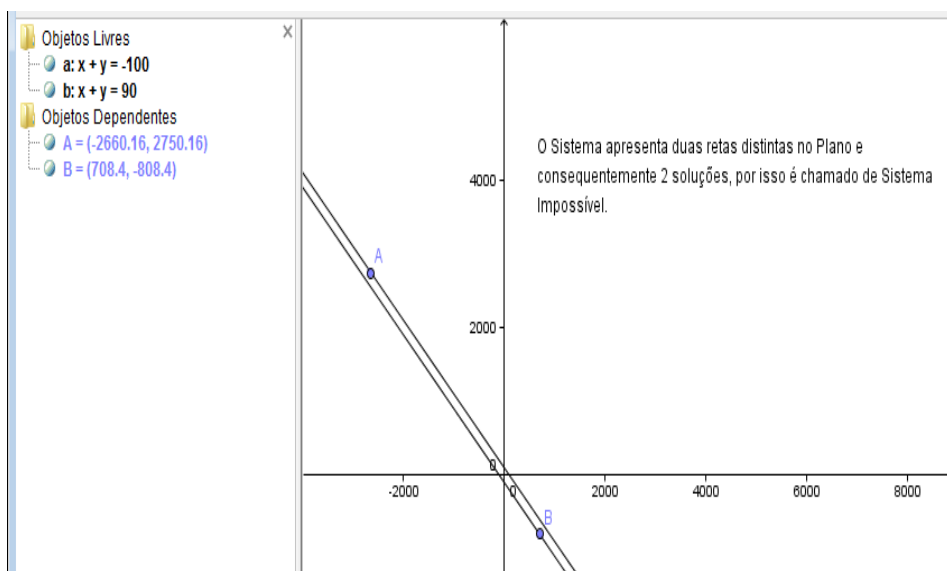


Figura 34 – Atividade 3 tarefa 1.1b – T3 dupla D3

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A tarefa 2 consistia em resolver o produto matricial dos sistemas lineares

$$2.1) \begin{bmatrix} 3 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2.2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix} \quad 2.3) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

determinando o valor das variáveis a , b e c de modo que o sistema linear 2.1 represente duas retas paralelas, quanto ao item 2.2 retas coincidentes e 2.3 retas concorrentes em um único ponto.

Em relação às tarefas, a maior dificuldade encontrada pelos alunos foi como criar os parâmetros no GeoGebra e conseqüentemente alterá-lo de forma a obter a situação apresentada em cada item. No item 2.1 o aluno deveria obter o valor referente de a (parâmetro) para que o SL apresentasse duas retas paralelas. A maioria dos alunos, apesar da dificuldade em criar o parâmetro no GeoGebra, conseguiu definir os valores das variáveis, entretanto alguns alunos tiveram dificuldades em entender o significado de parâmetro, inclusive na Figura 35, com a dupla 3 da turma 3.

De acordo com a Figura 35 pode-se observar que a dupla confundiu o parâmetro a com a variável y e, mesmo de acordo com o GeoGebra definindo $a = -3$ para que as retas fossem paralelas. Uma das maiores dificuldades dos alunos é a linguagem escrita do que é observado em relação às atividades feitas. É exatamente através desta linguagem que podemos observar se o aluno realmente compreendeu a execução da atividade.

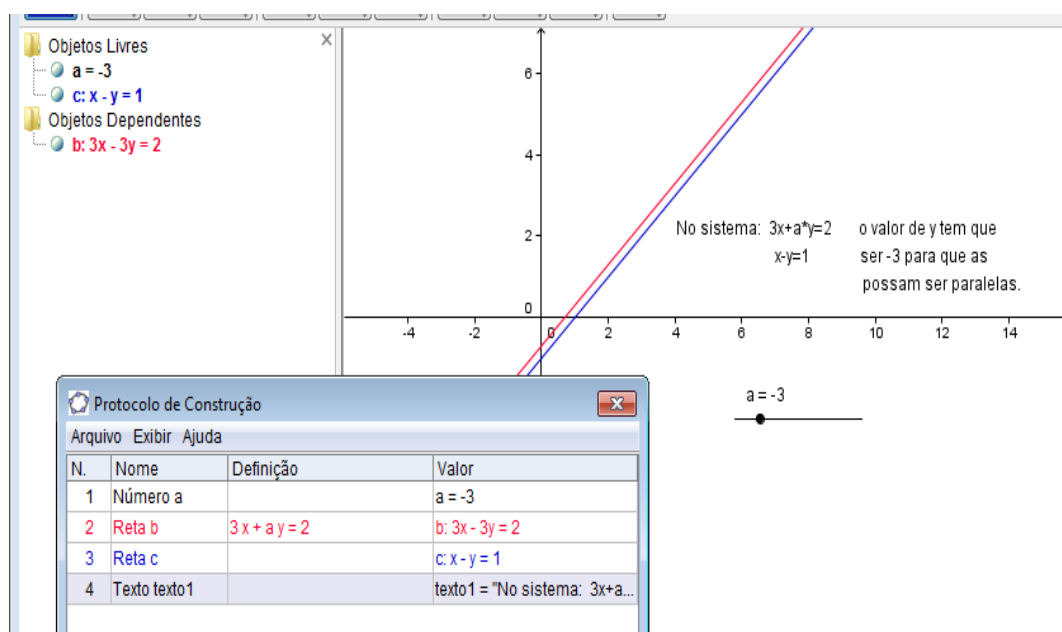


Figura 35 – Atividade 3 tarefa 2.1 – T3 dupla D3

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A tarefa 3 da atividade 3 consistia em: dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ e o vetor $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, definir o sistema linear dado pela equação $Au = 3u$ primeiramente o aluno deveria estabelecer o sistema linear e consequentemente definindo como parâmetro x ou y e não as duas variáveis ao mesmo tempo, apenas uma, verificar o que ocorre em relação ao sistema linear, observando que o sistema linear define um sistema linear possível indeterminado.

Em relação à tarefa 3 da atividade 3 a dupla deveria considerar o seletor sendo x ou y e alterando o valor do seletor, verificando o que acontece com a outra variável que se mantém constante. A dupla deveria verificar que as retas são coincidentes e o SL é considerado possível indeterminado.

A dupla da Figura 36 considerou como seletor a variável x e consequentemente encontrou como constante o valor da variável y independente do seu valor nas duas equações lineares, comprovando assim que as retas são paralelas. Para $x = -1$ $y = -2/3 = -0,67$.

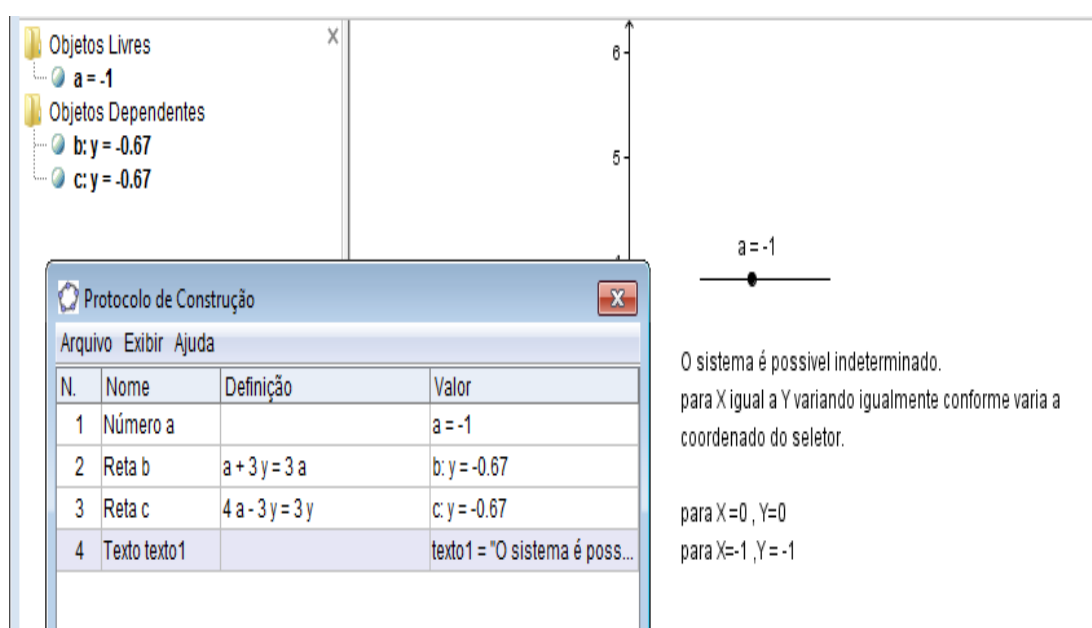


Figura 36 – Atividade 3 tarefa 3- T3 dupla D9

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Na tarefa 4, através da equação $AX = B$, o aluno deveria definir a equação $X = B.A^{-1}$ pela dica dada na tarefa:

Foi solicitado experimentar multiplicar à esquerda o 1º membro e o 2º membro da equação pela matriz inversa de A. O aluno deveria resolver o produto de B pela matriz inversa de A, definindo consequentemente o resultado dos sistemas lineares:

$$4.1) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad 4.2) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

De acordo com a dupla 2 da turma 3 em relação à tarefa 4.1, através do GeoGebra, a dupla calculou a matriz inversa da matriz A corretamente, mas no momento de calcular o produto da matriz B pela matriz inversa, encontrou $x = 0$ e $y = 2,5$ (FIGURA 37).

A resposta correta do SL seria $x = 0$ e $y = 0,5$.

Nesse exemplo verificamos que ao multiplicarmos a matriz inversa de a pela matriz b o geogebra gerou uma segunda matriz onde o valor de $x=0$ e o valor de $y=2.5$

N.	Nome	Definição	Valor
1	Lista matriz1	MatrizInversa[{{1, 2}, {3, 4}}]	matriz1 = {{-2, 1}, {1.5, -0.5}}
2	Lista matriz2		matriz2 = {{0}, {2.5}}
3	Texto texto1		texto1 = "Nesse exemplo v..."

Figura 37 – Atividade 3 tarefa 4.1 – T3 dupla D2

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Observou-se que em relação à tarefa 4.2 a dupla 2 a matriz A não definia matriz inversa e consequentemente o SL não apresentava solução, ou seja, deveria ser classificado como sistema impossível.

Interessante observar que a dupla considerada resolveu pelo método algébrico, mas não resolveu pelo método geométrico, e ainda conforme análise das outras duplas todos os alunos que fizeram esta tarefa também não fizeram pelo método geométrico, somente fizeram a tarefa pelo método algébrico matricial (FIGURA 38).

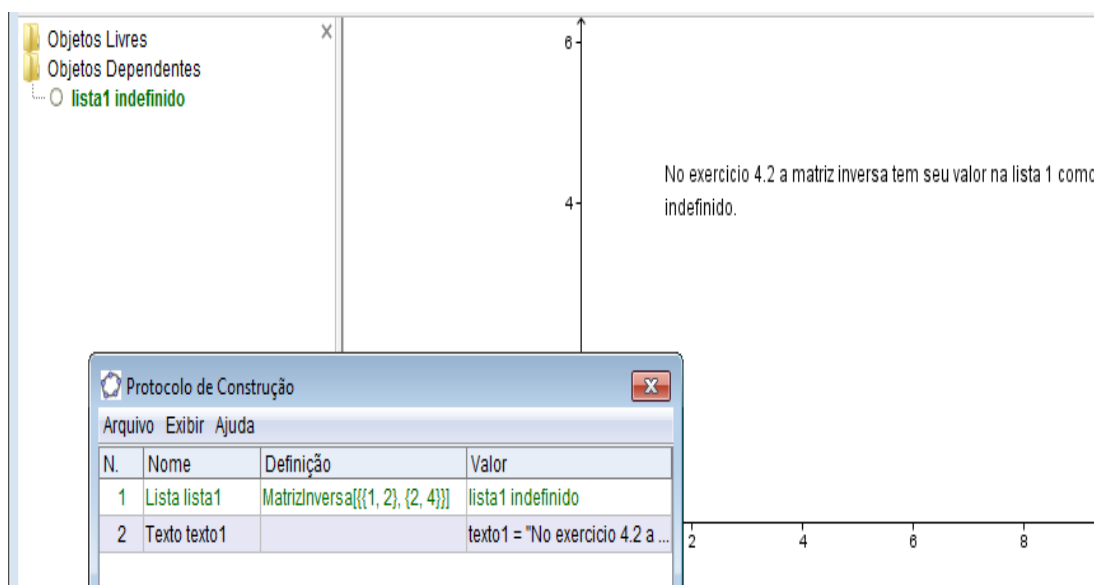


Figura 38 – Atividade 3 tarefa 4.2 – T3 dupla D2

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Na tarefa 5 os alunos deveriam resolver o sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ pela

Regra de Cramer, determinando os valores dos determinantes necessários e executando os cálculos para a obtenção da solução do sistema linear. Os alunos deveriam calcular através do GeoGebra os determinantes para determinar os valores das variáveis x e y .

Na Figura 39 ilustra-se a tarefa realizada pela dupla 10, em que através do protocolo de construção do GeoGebra constatou-se que o valor dos determinantes foram devidamente calculados e a divisão dos determinantes definindo x e y calculados corretamente.

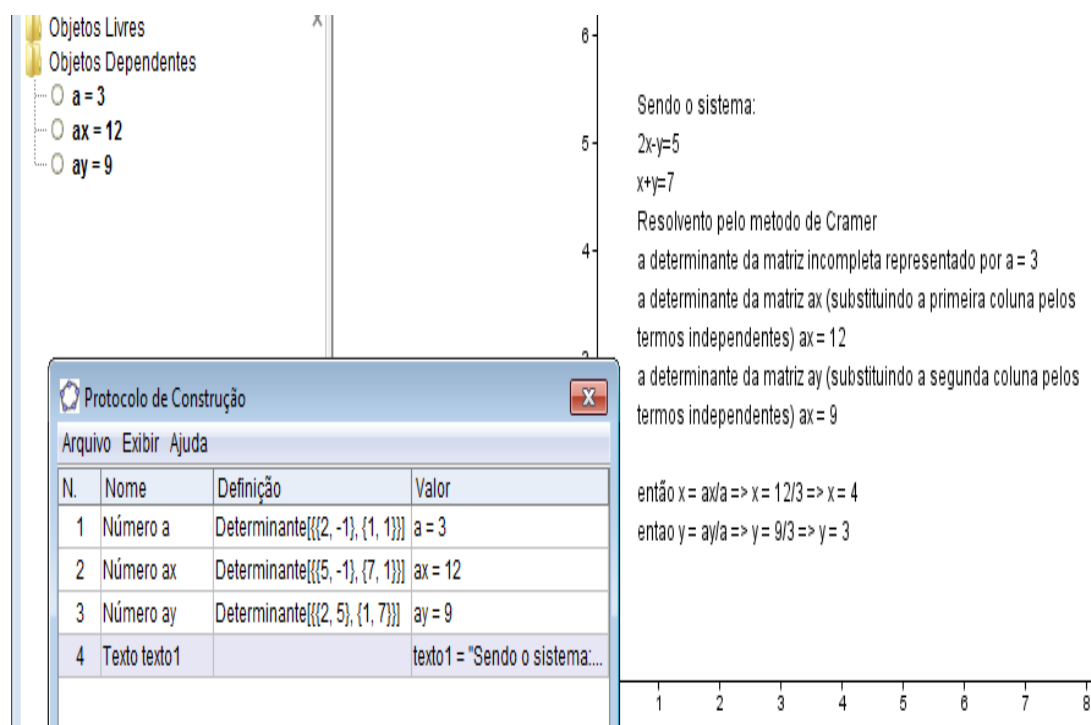


Figura 39 – Atividade 3 tarefa 5 – T3 dupla D10

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Todos os alunos que fizeram a tarefa 5 executaram apenas pelo método algébrico, não verificando a solução encontrada $s = (4, 3)$ pelo método geométrico, mesmo ele estando disponível no GeoGebra.

5.5 Análise da atividade 4

A atividade 4 era composta por 3 tarefas, sendo esta atividade complementar em relação a sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas.

A tarefa 1 consistia em que a dupla deveria realizar a tarefa 2 da atividade 3 pelo método algébrico considerado escalonamento, sem usar os softwares GeoGebra e VCN, conseqüentemente a dupla definia os valores dos parâmetros a, b e c. Poucas duplas fizeram esta atividade, pois requeria cálculos algébricos na linguagem escrita e os alunos já sabiam desenvolver os cálculos pelo uso das TICs conseqüentemente poucos fizeram.

Dificuldades vivenciadas na atividade 4

Ilustra-se que a dupla 3 da turma 3, que não fez a tarefa pelo método algébrico do escalonamento solicitado, apenas observou a relação existente entre as duas retas para serem coincidentes e determinou as variáveis das letras a e b pelo método algébrico da substituição (FIGURA 40).

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix}$

$x - y = 2$
 $2x - 2y = b$

Para que as retas sejam coincidentes uma é o dobro da outra, portanto b deve valer 4

Figura 40 – Atividade 4 tarefa 1 – T3 dupla D3

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A tarefa 2 apresentava 3 SL de 2 equações e 2 incógnitas (2x2)

a) $\begin{cases} 5(x - 2y + 1) = x - 8y + 7 \\ \frac{2x - y}{3} = \frac{1}{5} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = x + 4 \\ 2x + y = x + 2y + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,5x - 2,5y + 3 = 2 \\ x - 5y = -2 \end{cases}$ em

que a dupla deveria desenvolver de modo a encontrar os valores de x e y e a tarefa apresentava além destes 3 SL de 3 equações e 2 incógnitas um SL de 3 equações e

3 incógnitas (3x3) $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$, sendo que o software GeoGebra foi utilizado

nas atividades para desenvolver somente SL 2x2. Conseqüentemente, o aluno deveria desenvolver este SL 3x3 pelos métodos algébricos, sendo o do escalonamento através do software VCN ou da linguagem escrita.

Ilustrou-se a solução equivocada da dupla 3 da turma 3, que resolveu através da solução algébrica, não encontrando as variáveis x e y, mas $0 = -4$, resolução com equívoco (FIGURA 41).

$$\begin{aligned}
 & a) \begin{cases} 5(x - 2y + 1) = x - 8y + 7 \\ \frac{2x - y}{3} = \frac{1}{5} \end{cases} \\
 & \begin{cases} 5x + 10y + 5 = x + 8y - 7 = 0 \\ \frac{10x - 5y - 3}{15} = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} 4x - 2y - 2 = 0 \quad (\cdot 5) \\ 10x - 5y - 3 = 0 \quad (\cdot 2) \end{cases} \\
 & \begin{aligned} & 20x - 10y - 10 = 0 \\ & -20x + 10y + 6 = 0 \end{aligned} \\
 & -4 = 0
 \end{aligned}$$

Figura 41 – Atividade 4 tarefa 1 – T3 dupla D3

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A tarefa 3 apresentava 2 problemas em que o aluno através do entendimento do problema deveria modelar as equações lineares do SL para definir suas variáveis.

(3.1) Um caminhão-baú pode levar, no máximo, 58 caixas do tipo A ou B, de mesmo tamanho. Elas têm, respectivamente, 56 kg e 72 kg. A carga máxima para esse caminhão é de 3.840 kg em cada viagem. Quantas caixas de cada tipo são transportadas por esse caminhão, estando ele com a capacidade máxima ocupada?

Ilustra-se a resolução da tarefa 3.1 da dupla 4 da turma 3 em que a dupla cita a resolução pelo método algébrico da substituição. No entanto, a solução encontrada foi executada no GeoGebra (que resolve pelo método geométrico). Apesar de a linguagem escrita desenvolvida pelo método algébrico da substituição ter sido equivocada, a dupla conseguiu determinar a solução através da representação geométrica corretamente $x = 21$ e $y = 37$ (FIGURA 42).

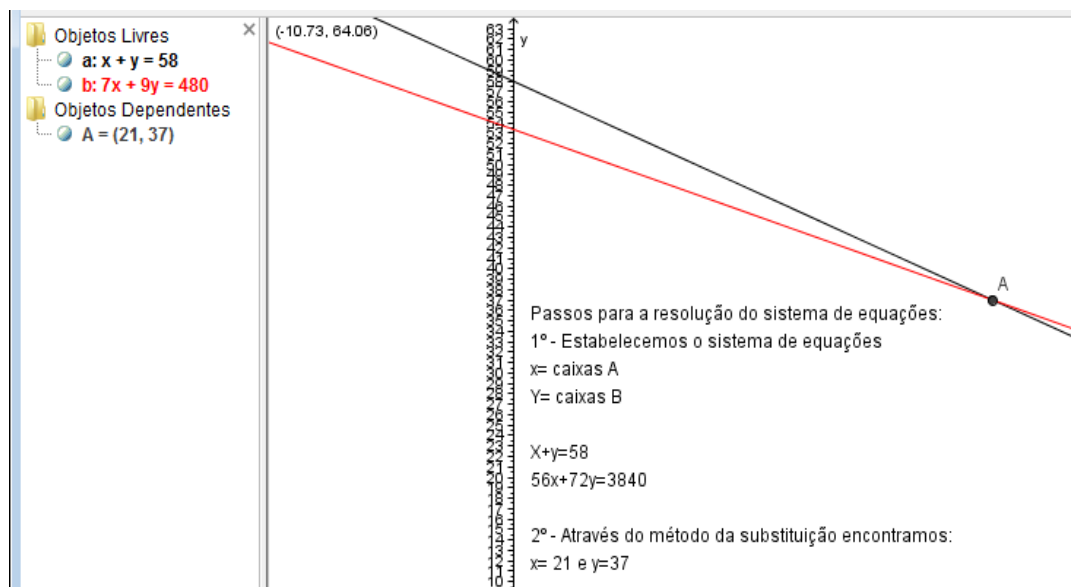


Figura 42 – Atividade 4 tarefa 3 – T3 dupla D4

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Em relação às tarefas da atividade 4 observou-se que, devido ao fato de terem sido resolvidas em casa, pois tratava-se de atividades complementares de sistemas lineares 2×2 , os alunos apresentaram dificuldades em interpretar o que a atividade solicitava e também cometeram alguns equívocos nos cálculos algébricos.

5.6 Análise da atividade 5

A atividade 5 utilizou os softwares VCN e Winplot para investigar sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas e foi dividida em 4 tarefas. Esta atividade por resolver os SL através das representações algébrica (VCN) e geométrica (Winplot) bastante contribuiu para a aprendizagem de SL, pois através dos softwares as duplas visualizaram a solução algébrica através da representação geométrica e conseqüentemente compreenderam melhor a solução algébrica de cada SL.

A tarefa 1 consistia em verificar soluções para a equação linear $2x + 3y - z = 9$ que no caso define um plano, a tarefa apresentou uma tripla ordenada (2, 2,1) para que o aluno verificasse se esta tripla, ou seja, o ponto era solução da equação linear e também que o aluno definisse outros pontos que também eram solução do plano dado.

Dificuldades vivenciadas na atividade 5

Alguns alunos criaram outros pontos que não eram solução da equação linear dada e mostraram substituindo o ponto criado na equação linear dada, que realmente não pertencia ao plano dado.

Na Figura 43 ilustrou-se que a tarefa 1 feita pela dupla em questão, que criou 3 pontos sendo 1 ponto pertencente ao plano (2,2,1) e também 2 pontos não pertencentes ao plano (4,4,2), (4,3,4). A dupla não apresentou o registro escrito solucionando a equação linear através das representações algébricas (substituindo os pontos criados na equação linear), apresentou apenas a representação geométrica do plano e dos pontos no espaço.

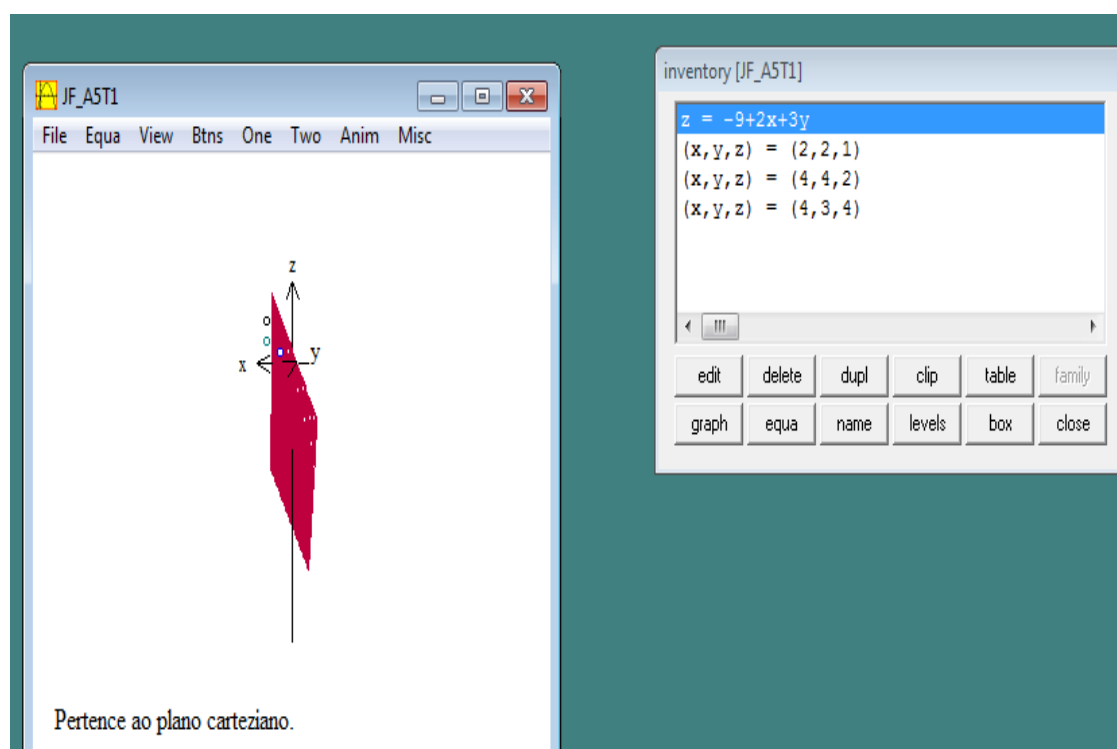


Figura 43 – Atividade 5 tarefa 1 – T3 dupla D3

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Na Figura 44 ilustrou-se que a mesma tarefa 1 feita pela dupla que criou 2 pontos sendo os dois pontos pertencentes ao plano (2,2,1), (0,0,-9) não definiu pontos que não pertencem ao plano. A dupla não apresentou o registro escrito, solucionando a equação linear pelas representações algébricas (substituindo os pontos criados na equação linear), apresentando apenas a representação geométrica do plano e dos pontos no espaço.

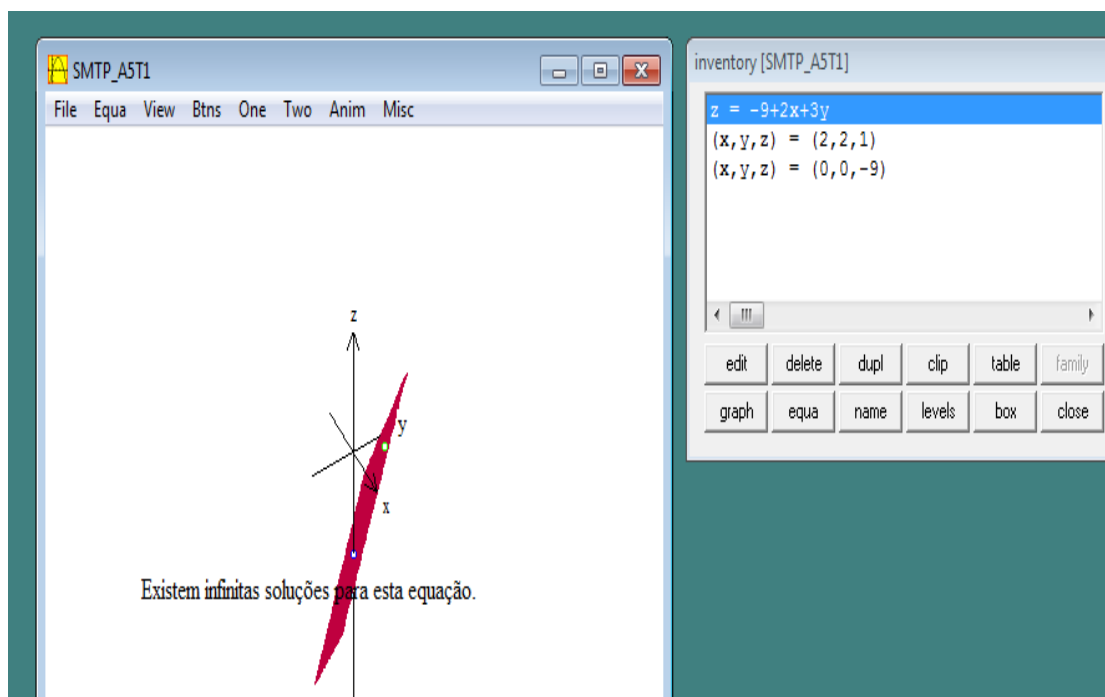


Figura 44 – Atividade 5 tarefa 1 – T3 dupla D11
 Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A tarefa 2 da atividade 2 foi apresentada sendo composta por cinco sistemas lineares:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 4 \end{cases} &
 \text{(b)} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases} &
 \text{(c)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases} \\
 \text{(d)} \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 5x + 2y + z = 2 \\ 9x + 3y + 5z = 5 \end{cases} &
 \text{(e)} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 7y - z = 13 \end{cases} &
 \end{array}$$

Na letra (a) o sistema linear é classificado como sistema possível indeterminado, composto por dois planos coincidentes e um plano cortando estes dois planos, na letra (b) o sistema é impossível, portanto, composto por dois planos paralelos e um plano cortando estes dois planos, na letra (c) o sistema é possível indeterminado constituído por três planos encontrando em uma reta, na letra (d) o sistema é impossível sendo que cada plano encontra com o outro através de uma reta e na letra e o sistema é possível determinado com os planos encontrando de acordo com um único ponto $(-2,3,0)$, o aluno nessa tarefa 2 deveria resolver os sistemas lineares.

O aluno através das duas janelas apresentadas pelo VCN que mostra a representação algébrica com os dados digitados pelos alunos e pelo Winplot que mostra a representação geométrica com a visualização dos planos definidos no

sistema linear, a dupla deveria compreender as três soluções encontradas de forma a diferenciar os três tipos de classificação dos sistemas lineares.

As maiores dificuldades encontradas nesta tarefa foram dúvidas no momento de digitalizar as equações lineares (principalmente no Winplot que requer as equações lineares isolando a variável z) e na relação entre as duas representações algébrica e geométrica visualizadas no VCN e no Winplot.

Cita-se como exemplo na Figura 45 a tarefa da dupla 3 da turma 3, em que foi feita a tarefa somente pela representação geométrica do Winplot e de acordo com a análise esta dupla, no momento de isolar a variável z , estipulou as equações equivocadamente. A equação $2x+2y-2z = 2$, isolando z , seria determinada por: $z = (2x+2y-2)/2 = x+y-1$. Por consequência, a dupla concluiu que o sistema era impossível, sendo que este SL é classificado como sistema possível indeterminado.

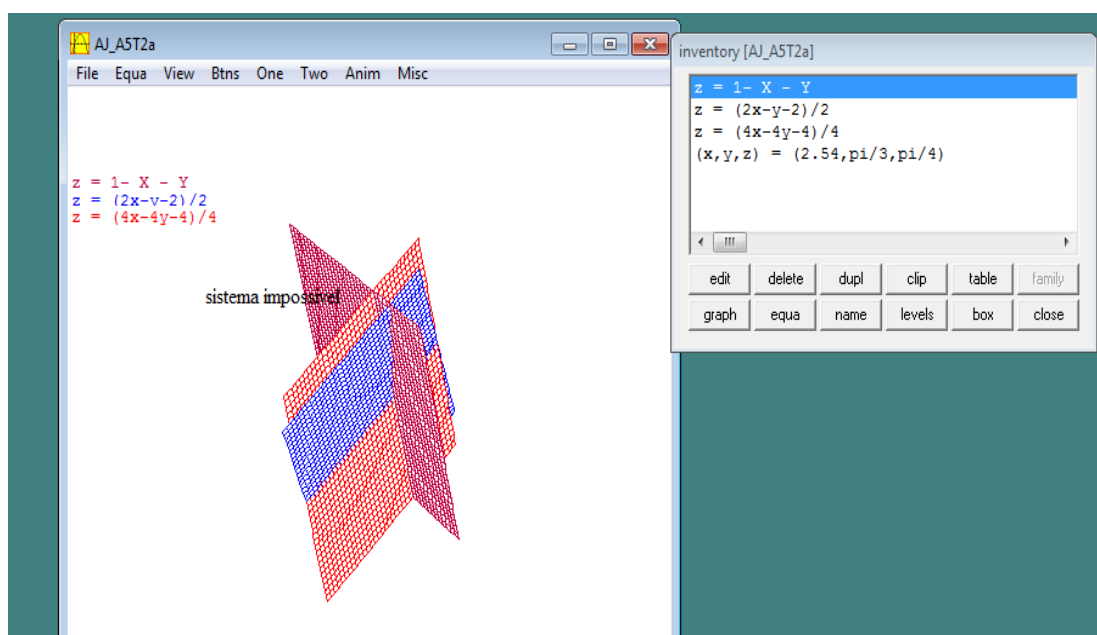


Figura 45 – Atividade 5 tarefa 2a – T3 dupla D3

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A seguir considera-se a resolução do VCN e do Winplot da dupla 22 da turma 3 no Winplot na Figura 46. Apesar de ter conseguido isolar a variável z nas três equações corretamente, a dupla não classificou o sistema linear que, definido por dois planos paralelos e outro plano cortando estes planos através de duas retas, classificou o SL como sistema impossível.

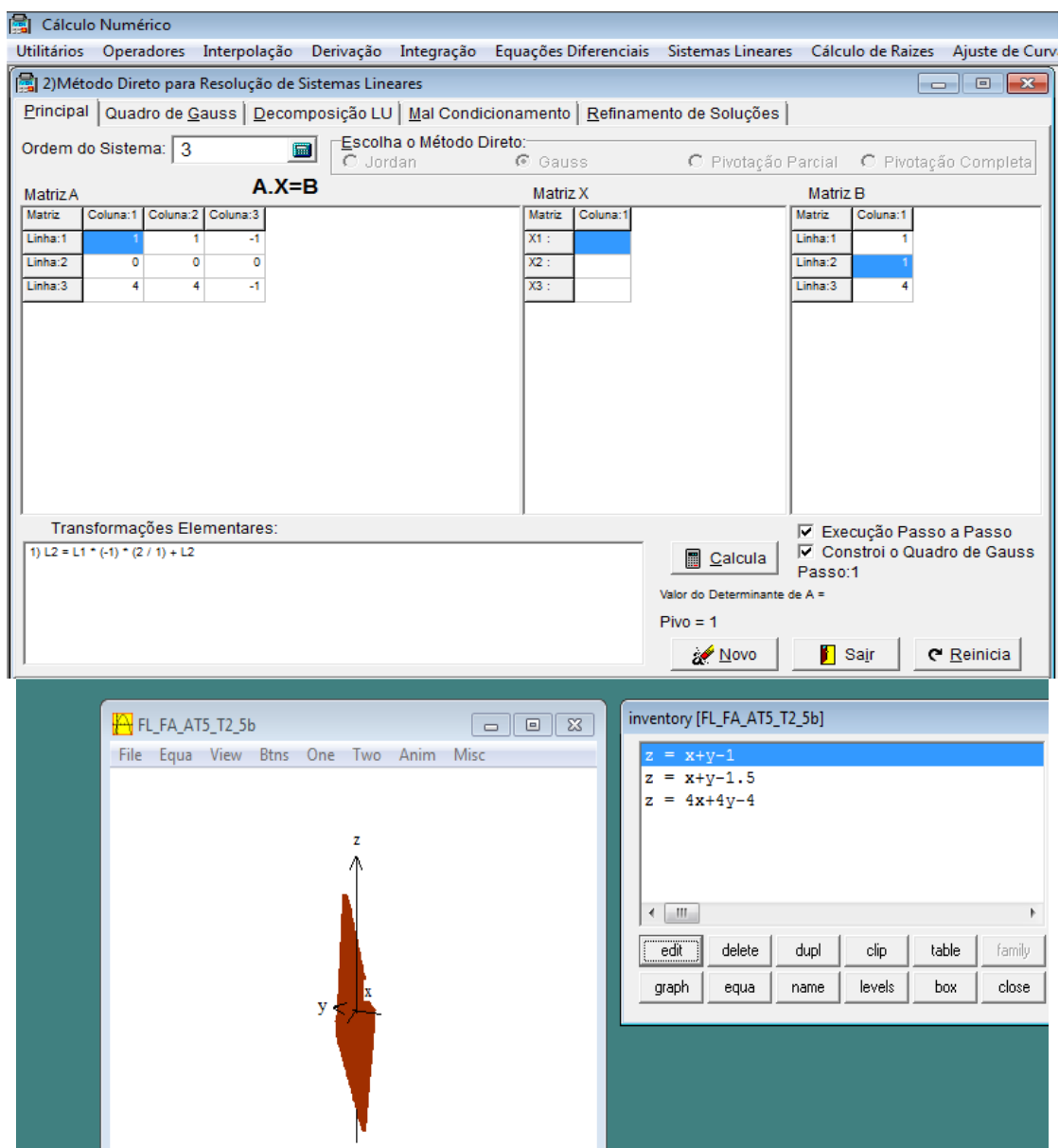


Figura 46 – Atividade 5 tarefa 2b – T3 dupla D22
 Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A tarefa 3 da atividade 5 era dado um plano $2x+y-z = 1$, em que a dupla deveria criar um plano interceptando, segundo uma reta, outro plano paralelo e também um plano coincidente, sempre em relação ao plano dado.

Considerou-se na análise a dupla 4 da turma 3, que criou somente o plano interceptando o plano dado segundo uma reta, não criou os outros planos solicitados na tarefa e também não usou os softwares VCN e Winplot para verificar a solução do SL formado pelos três planos. Criou somente mais uma equação linear em relação à equação linear $2x+y-z = 1$ e na tarefa necessitava de pelo menos três planos para determinar o SL e conseqüentemente determinar o valor das variáveis x, y e z através do VCN representação algébrica. De todas as duplas que fizeram a

tarafa, nenhuma resolveu o SL determinado por três equações lineares encontrando as variáveis através do VCN, item 3.5, apenas resolveu no Winplot sendo a representação geométrica (FIGURA 47).

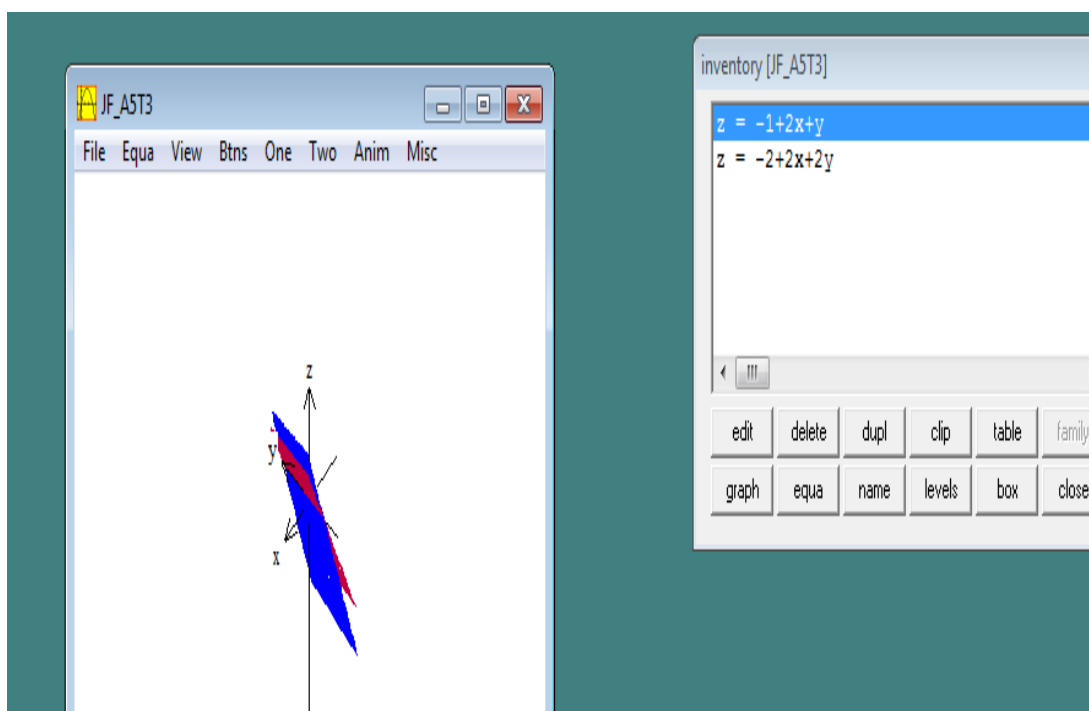


Figura 47 – Atividade 5 tarefa 3 – T3 dupla D4

Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Na tarefa 4 da atividade 5 eram dados três SL, sendo que o primeiro SL já era constituído por uma equação linear e conseqüentemente as duplas deveriam determinar os outros dois planos, sendo estes paralelos em relação o plano dado. O segundo SL era constituído por dois planos coincidentes e a dupla deveria determinar o terceiro plano, sendo este paralelo a estes dois planos dados e, finalmente, o terceiro SL era composto por um plano e a dupla deveria criar os outros dois planos sendo o SL constituído por três planos coincidentes.

Analisando a tarefa da dupla 14 da turma 3, foi verificado que esta dupla definiu o seguinte SL:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 4 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$
 no software Winplot e no momento de

determinar a classificação do SL através do software VCN determinou equivocadamente as equações lineares não relacionando as equações do Winplot com o VCN. Conforme a Figura 48, a linha 2 deveria ser substituída por: $-L1 + L2$ e,

consequentemente, a Linha 2 deveria ser constituída por: Matriz A: 0 0 0 e Matriz B 3 e jamais conforme a figura x Matriz A: 0 0 0 e Matriz B 0 (FIGURA 48).

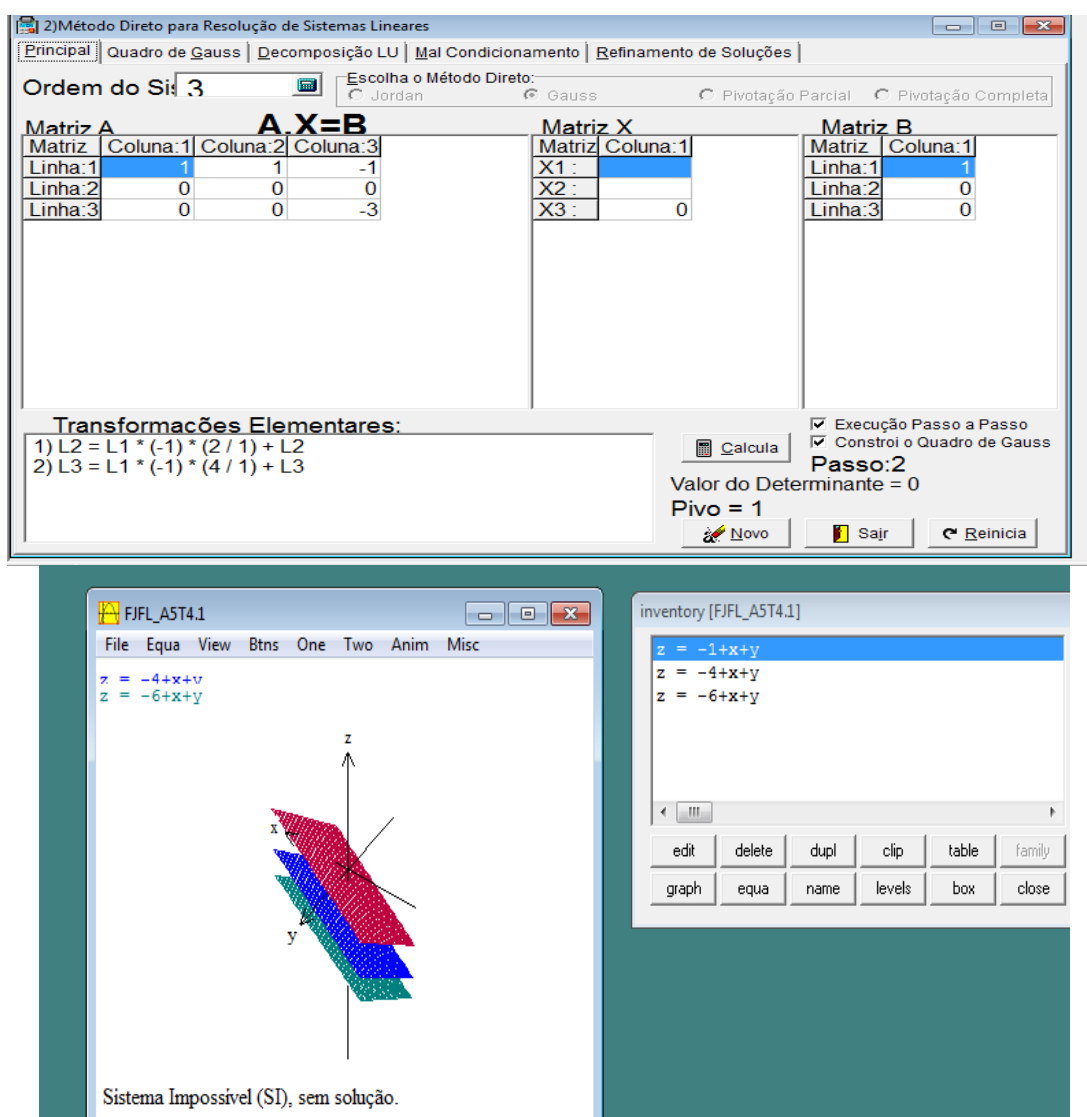


Figura 48 – Atividade 5 tarefa 4 – T3 dupla D14
Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

A maior dificuldade dos alunos foi verificar que a solução encontrada nos dois softwares VCN (cálculos algébricos) e Winplot (visualmente) define a mesma solução, a solução determinada é a mesma, apenas o caminho, ou seja, o tipo de representação algébrica ou geométrica utilizada é diferente.

5.7 Análise da atividade 6

A atividade 6 foi constituída por três tarefas, levando em consideração a abordagem matricial de SL de 3 equações e 3 incógnitas.

Na tarefa 1 da atividade 6 os alunos deveriam determinar a solução do SL pelo software VCN no método do escalonamento, inclusive analisando como o programa determinaria essa solução.

Na análise considerou-se a dupla 25 da turma 3, que fez corretamente a tarefa 1 letra (c), mostrando a solução algébrica encontrada no VCN e também a solução geométrica visualizada no Winplot, sendo, portanto, o SL classificado como sistema impossível (FIGURA 49).

The image shows two windows from the VCN software. The top window is the main interface for solving a system of linear equations $A \cdot X = B$. It displays three matrices: Matrix A, Matrix X, and Matrix B. Matrix A is a 3x3 matrix with values: (1,1)=2, (1,2)=-4, (1,3)=10, (2,1)=0, (2,2)=0, (2,3)=0, (3,1)=0, (3,2)=0, (3,3)=0. Matrix X is a 3x1 column vector with values: X1=6, X2=2, X3=0. Matrix B is a 3x1 column vector with values: B1=6, B2=2, B3=0. The software indicates that the determinant is 0 and the pivot is 2. The elementary transformations performed are: 1) $L2 = L1 \cdot (-1) \cdot (3/2) + L2$. The bottom window, titled 'inventory [PRGV_A6T1c]', shows the algebraic solution for the variables: $z = (6-2x+4y)/10$, $z = (11-3x+6y)/15$, and $z = 0+0+0$. The bottom window also displays a 3D plot of the system of equations in a coordinate system with x, y, and z axes, showing two intersecting planes and a line of intersection.

Figura 49 – Atividade 6 tarefa 1c – T3 dupla D25
Fonte: Dados de pesquisa, 2012.

Dificuldades vivenciadas na atividade 6

Os alunos compreenderam como é o desenvolvimento do método algébrico do escalonamento, bastando a pesquisadora ter complementado alguns entendimentos. Nesse momento da pesquisa, todos estavam bem motivados pelo uso das TICs.

5.8 Análise da atividade 7

A atividade extraclasse solicitou aos alunos (1) comparar os diversos métodos de resolução do sistema linear de forma verificassem em cada sistema linear a melhor forma de resolução, e (2) desenvolver maior quantidade de atividades de sistemas lineares 3x3 em que os alunos deveriam fazer o algebrismo necessário para que o sistema linear apresentasse as três variáveis das equações dadas organizadas na forma $ax + by + cz = d$. Como desafio, foram inseridas as atividades com 4 equações e 4 incógnitas e com 3 equações e 4 incógnitas.

Poucas duplas a cumpriram, talvez devido ao fato de a atividade ser complementar, necessitando de tempo para sua elaboração, além do tempo disponível em sala de aula. As dificuldades verificadas foram as mesmas observadas nas atividades anteriores e, assim, não foram descritas.

5.9 Análise geral do questionário aplicado após as atividades

O questionário foi desenvolvido com o objetivo de verificar se a dupla apresentava dificuldades em acessar os softwares, se os alunos já tinham conhecimentos adquiridos ao uso de softwares matemáticos e de verificar se os alunos haviam antes trabalhado juntamente a representação geométrica e algébrica, definir a opinião dos alunos em relação às vantagens e desvantagens de aprender a usar os softwares no ensino-aprendizagem de sistemas lineares.

O questionário de pesquisa foi aplicado aos alunos após terem desenvolvido a atividade investigativa, com o objetivo de verificar se essa atividade, utilizando os softwares GeoGebra, VCN e Winplot, havia sido bem aceita.

Os resultados do questionário encontram-se no Apêndice 2 (GRÁFICOS 6 a 16), tendo-se concluído que a proposta da pesquisa foi bastante positiva, com percepção de aprendizagem por parte dos alunos.

Entendeu-se que o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear e Geometria Analítica por meio de TICs (GeoGebra, VCN e Winplot) pode ser efetivamente considerado por professores de Matemática como uma grande possibilidade de ampliação de conhecimento lógico matemático por parte do alunos a partir do ensino fundamental.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão investigativa se referiu à busca de uma nova metodologia para o estudo de sistemas lineares no ensino superior, interagindo Álgebra e a Geometria utilizando softwares matemáticos.

Como atendimento ao objetivo geral foram elaboradas as atividades investigativas sempre observando a interligação entre a Álgebra e a Geometria pela utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) que, possivelmente, poderiam contribuir para melhor visualização dos dois registros.

Os softwares matemáticos efetivamente contribuíram para melhor visualização das representações desenvolvidas, de forma que a Álgebra e a Geometria foram trabalhadas ao mesmo tempo, contribuindo para a assimilação do objeto sistema linear.

Quanto ao cumprimento dos objetivos específicos, pode-se afirmar que:

- Sobre as dificuldades vivenciadas pelos alunos quanto a compreensão dos registros de representação na visão de Raymond Duval, depois de inúmeras atividades (7) e considerando diversas abordagens, a pesquisa indicou que os 64 alunos do curso de Sistema de Informação, 7º período, de uma Universidade privada de Belo Horizonte, ‘descobriram’ a compreensão de sistemas lineares pelas TICs utilizadas;
- Pela revisão sistemática de diversos estudos de sistemas lineares (SL) com o uso de registros e de instrumentos da Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC), no que se refere às pesquisas sobre Geometria Analítica, Álgebra Linear e o ensino e aprendizagem de SL e o que constam em textos didáticos, visualizando a motivação de investigação por parte dos alunos, constatou-se um conjunto de resultados similares.
- Foi identificada a forma pela qual as TICs têm sido utilizadas e pesquisadas pela comunidade acadêmica no ensino e aprendizagem de SL, o que denota a preocupação dos futuros mestres matemáticos quanto à aprendizagem dos alunos;
- Percebeu-se que as principais dificuldades dos alunos na compreensão de sistemas lineares foram corrigidas com a integração de diferentes softwares (GeoGebra, VCN e Winplot).

Os alunos participaram intensivamente no desenvolvimento das atividades investigativas. Utilizando as TICs propostas, os alunos puderam, além de conhecer os softwares matemáticos, aprender o objeto matemático SL de uma forma diferenciada. Construíram a representação algébrica através da representação geométrica, visualizando o sistema linear através de duas representações, portanto não confundindo o sistema linear com nenhuma das duas representações.

A professora pesquisadora foi a mediadora do processo, orientando os alunos com um suporte, uma segurança maior em relação às atividades investigativas, principalmente as dúvidas do uso dos softwares. Houve grande interação, com os alunos trocando conhecimentos adquiridos anteriormente sobre sistemas lineares e experiências vivenciadas durante a atividade investigativa.

Ao realizar esta experiência, não foram observadas dificuldades significativas em relação ao uso dos softwares, dúvidas no enunciado e no desenvolvimento das questões. Assim, foi obtido sucesso principalmente quanto ao interesse dos alunos em trabalhar de forma diferenciada com a presença do professor interagindo e os fazendo pensar criticamente.

Foi verificado no Questionário de Pesquisa que a maioria dos alunos não havia anteriormente trabalhado com softwares matemáticos, mas devido às experiências anteriores em relação ao próprio curso de Sistemas de Informação e, também à curiosidade de conhecer bem os softwares matemáticos, as dificuldades não foram significativas. Os softwares matemáticos utilizados possibilitaram a criação e a exploração visual, desenvolvendo nos alunos a capacidade de visualizar as transformações, vendo as correspondências respectivas entre as equações do sistema linear e sua visualização gráfica.

Caminhos diferenciados foram verificados quando as duplas discutiram sobre o modo de operar e quando a resolução do sistema linear era determinada de forma segura e consciente, havendo sempre grande interação entre os componentes das duplas. A maior dificuldade encontrada foi verificada na escrita matemática dos passos executados para resolver o sistema linear. Apesar de alguns equívocos verificados, as duplas sempre entravam em consenso e tentavam definir de forma clara e objetiva os passos executados na solução do sistema linear, interagindo álgebra e geometria na visualização da solução do sistema linear, pois o resultado fica mais visível do que trabalhar em uma única representação.

Houve um avanço significativo no método proposto das atividades. De acordo com Duval (2003, 2009, 2011), a importância de trabalhar com pelo menos duas representações, para que o aluno não confunda o objeto estudado com uma de suas representações, foi facilmente visualizado durante a análise das atividades investigativas.

Conforme a pesquisa verificou-se que as atividades propostas nos textos didáticos enfatizam mais a representação algébrica, não trazendo o estudo de sistemas lineares através da representação geométrica, cabendo ao ensino superior tratar das representações geométricas de forma a interagir as duas representações algébrica e geométrica. Verificou-se, também, a importância de trabalhar a representação escrita devido aos alunos desenvolver com maior facilidade as representações algébrica e geométrica e sentir maior dificuldade em escrever sobre o desenvolvimento executado para encontrar a solução do sistema linear.

Em pesquisas futuras sugere-se a abordagem do conteúdo de sistemas lineares de forma a exercer: (i) a conversão da álgebra para a geometria e da geometria para a álgebra, (ii) álgebra para a linguagem natural e da linguagem natural para a álgebra, (iii) geométrica para a linguagem natural e linguagem natural para a geométrica.

Além disso, ficou constatada a importância de se trabalhar sistemas lineares com número diferenciado de equações e incógnitas, utilizando os softwares matemáticos GeoGebra, VCN e Winplot.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Cinthia Soares. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área.** Trabalho de Conclusão de Curso de Matemática, Universidade Católica de Brasília – UCB, 2006. Disponível em: <http://www.poseconomia.ucb.br/sites/100/103/TCC/12006/CinthiaSoaresdeAlmeida.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2013.
- ALVES, Alessandro Caldeiras. **Uma Introdução ao Pensamento Combinatório no 9º ano do Ensino Fundamental.** 2010.160 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea.**1. Ed. Porto Alegre: Bookman. 2006. 610 p.
- AZEVEDO, Edeilson Matias de. **Livro didático: uma abordagem histórica e reflexões a respeito de seu uso em sala de aula.** 2003. Disponível em: <http://www.fucamp.edu.br/wp-content/uploads/2010/10/7.Ede%C3%ADlson-Matias-de-Azevedo.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2013.
- BATTAGLIOLI, Carla dos Santos Moreno. **Sistemas Lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos.** 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- BERTOLAZI, Kátia Socorro. **Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas lineares.** 2012 213 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná.
- BITTAR, Marilena. **Les Vecteurs dans l'enseignement secondaire.**1997. Artigo (Didatech, páginas 71 a 108, Laboratório Leibniz, EIAH) - Universidade de Juiz de Fora. Seminário nº 181) Grenoble.
- BITTAR, Marilena. **Les Vecteurs dans l'enseignement secondaire.** 1998. Tese (doutorado) - Universidade Joseph Fourier. Grenoble.
- BITTAR, Marilena. **Les Vecteurs dans l'enseignement secondaire: une analyse em termes d'outil et d'objet.** Artigo (equipe EIAH, Leibniz, IMAG, grenoble, DMT) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 1997.
- BITTAR, Marilena. **Visualizando e estudando vetores com o auxílio de um ambiente informático: Cabri-géomètre II.** 2º semestre. 1998. Artigo (GrafTec). nº 4. Brasil.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.**4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. 104 p.

BRAGA, Elisabete Rambo. **A compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática no ensino fundamental com o recurso da planilha**. 2009. 209 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Católica do Rio Grande do SUL, Porto Alegre.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Programa Nacional do Livro Didático. **Guia de Livros Didáticos de 5ª a 8ª série**. Brasília: MEC/SEF, 2008.

CAVALCA, Antônio de Pádua Villela. **Espaço e representação Gráfica: Visualização e Interpretação**. 1997. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

CELESTINO, Marcos Roberto. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras da década de 90**. 2000. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **O ensino de ciências e matemática na América Latina**. Campinas: Papirus, 1976.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A influência da tecnologia no fazer matemático ao longo da história**. 1 a 4 agosto 1999. Disponível em: <<http://vello.sites.uol.com.br/snhct.htm> >. Acesso em: 15 mar. 2011.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar ou conhecer**. 5ª ed. São Paulo: Ática, 1998. 88 p. (Série Fundamentos).

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Descompasso com o mundo**. 2003. Disponível em: <http://www2.ufpa.br/ensinofts/etnomatematica.html>. Acesso em: 15 mar 2011. (entrevista).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática. 2010. 264 p.

DAVIS, Cláudia Leme Ferreira; OLIVEIRA, Zilda Ramos. **Psicologia na educação**. São Paulo: Cortez, 1990.

DELL'ORTI, Marcelo Dugan. **Representações gráficas: conhecimentos mobilizados por alunos do ensino médio na compreensão e análise de informações contidas em gráficos**. 2010. 108 f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DEMO, Pedro. **Educação e novas tecnologias – sonhos e pesadelos**. 5 jan. 2009. Disponível em: <http://pedrodemo.sites.uol.com.br/textos/etec.html>. Acesso em: 05 mar. 2011.

DEMO, Pedro. **TICs e educação**. 2008. Disponível em: <http://pedrodemo>.

DI PINTO, Marco Antônio. **Ensino e aprendizagem da geometria analítica: as pesquisas brasileiras da década de 90**. 2000. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DIAS, Marlene Alves. **Articulation Problems between different systems of symbolic representations in linear algebra**. 1995. In Proceedings of the 19TH ANNUAL MEETINGS OF THE INTERNATIONAL FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, v.2, p. 34-41, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil, 1995.

DIAS, Marlene Alves. **Contribution à analyse d'un enseignement experimental d'algèbre linéaire em DEUG A première année**. Mémoire de DEA. Université de Paris 7, 1993.

DIAS, Marlene Alves. **Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire**. Thèse de Doctorat. Université de Paris, Paris, 1998.

DUVAL, Raymond. Registros de representação, compreensão e aprendizagem. In: DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy, Marisa R. Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009, p.29-39.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: ALCÂNTARA MACHADO, Sílvia Dias (org.) **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, São Paulo: Papyrus, 2003, p.11- 33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da física, 2009. 110 p.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. de Myriam Veja Restrepo. Cali, Colômbia: Merlin I. D., 2004.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**. São Paulo: Proem, 2011. 160 p.

FEIO, Evandro dos Santos Paiva; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **A conversão da língua natural para a linguagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Disponível em: <http://www.ufpa.br/npadc/gelim/trabalhos/Evandro%20Feio.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2013.

FIORENTINI, Dario, LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. São Paulo: Autores Associados. 2006. (coleção formação de professores)

FREITAS, Ivete Mendes. **Resolução de sistemas parametrizados e seu significado para o aluno**. 1999. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

- FREITAS, Marcos Agostinho. **Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio**. 2002. 137 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- GERARD, F. M.; ROEGIERS, X. **Conceber e avaliar manuais escolares**. Porto: Ed. Porto, 1998.
- GREIMAS, A. J.; COURTÉS, J. **Dicionário de Semiótica**. São Paulo: Cultrix, 2008.
- IEZZI, Gelson et al. **Matemática** volume único. 4 ed. São Paulo: Atual, 2010. 688 p.
- IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**. Vol. 4. 6 ed. São Paulo: Atual, 1993. 229 p.
- IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari. **Matemática para todos**. 8ª série e 7ª série. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2006. 96 p.
- JARDINETT, José Roberto Boettger. **A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da geometria analítica a nível de 1º e 2º graus**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 1991.
- JORDÃO, Ana Lúcia Infantozzi. **Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do ensino médio**. 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.
- KARRER, Mônica. **Articulação entre álgebra linear e geometria** – um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. Tese (Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 435 f.) 2006.
- KOLMAN, Bernard. **Álgebra Linear**. 3 ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987. 228 p.
- LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual do usuário. **Em Aberto**, v.16, n.69, Brasília, 1996.
- LIMA, Rosana Nogueira de. **Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 155p.) 1999.
- LUDKE, Menga, ANDRÉ, Marli E. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. Temas básicos de Educação e ensino. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.
- MACHADO, Maria Gisela de Bom. **Dificuldades encontradas pelos alunos de 5ª a 8ª séries do 1º grau no processo de aprendizagem da matemática**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, SC, 1992.

MACHADO, Sílvia D. A.; MUNHOZ, Marcos. Percepção de professores de Matemática sobre o duplo sentido de alguns termos geométricos. Anais **CIBEM**, Uruguai, 1999.

MARANHÃO, Maria C. S. A.; IGLIORI, Sonia B. C. Registros de Representação e Números Racionais. In: MACHADO, Sílvia D. A. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Editora Papirus, 2003, p. 57-70.

MARTINS, Isabel P.; PAIXÃO, Maria de Fátima. Perspectivas atuais Ciência-Tecnologia-Sociedade no ensino e na investigação em educação em ciência. In: SANTOS, Wilson Luiz Pereira dos; AULER, Décio. **CTS e educação científica: desafios, tendências e resultados de pesquisas**. Brasília: Editora UNB, 2011, cap.5, p.135-160.

MEDALHA, Vera Lúcia Lopes. **A visualização no estudo da Geometria Espacial**. Dissertação (mestrado, Universidade de Santa Úrsula. Rio de Janeiro). 1997.

MUNHOZ, Marcos. **A impregnação do Sentido Cotidiano de Termos Geométricos no ensino/aprendizagem da Geometria Analítica**. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1999.

NAGAMACHI, Marcos Toshio. **Equações no ensino médio: uma metanálise qualitativa das dissertações e teses produzidas no Brasil de 1998 a 2006**. Dissertação (Mestrado Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 73p.). 2009.

NAGAMACHI, Marcos Toshio. **Equações no ensino médio: uma síntese das dissertações e teses produzidas no Brasil de 1998 a 2006**. Pesquisa GPEA (Grupo de pesquisa em Educação Algébrica), (programa de estudos pós-graduados em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. 19p.

OLIVEIRA, J. B. A. et al. **A política do livro didático**. São Paulo: Unicamp, 1984.

OLIVEIRA, Sílvia Barbosa de. **As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 102p.), 2006.

ORRANTÍA, J. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Psicopedagogía*, v. 23, n. 71, p. 158-180, 2006.

PANTOJA, Lígia Françoise Lemes. **A conversão de registros de representações semióticas no estudo de equações algébricas lineares**. Dissertação (Mestrado em Educação e Ciências e matemáticas NPADC/UFPA, Universidade Federal do Pará, Belém) 2008, 105p.

PATRÍCIO, Rafael Silva; ALMEIDA, Maysa da Silva Leite. O papel das representações semióticas no ensino de matemática. XX CNEM CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX EREM ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 07-10 jun. 2011, Ijuí, RS. **Anais...**

PEROTTI, Alberto Ramos. **O estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais**: Uma proposta alternativa de ensino. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1999.

PINHO, Domingos Pires Valente Sevivas. **Matrizes e aplicações no ensino secundário**. Dissertação (Mestrado em matemática/Educação, Universidade Portucalense, Porto) 2010, 148f.

PORRO, Sílvia; ARANGO, Claudia. A importância da perspectiva do gênero no ensino das ciências na América Latina. In: SANTOS, Wilson Luiz Pereira dos; AULER, Décio. **CTS e educação científica**: desafios, tendências e resultados de pesquisas. Brasília: Editora UnB, 2011, cap.8, p.241-266.

RIBEIRO, Márcia Valéria de Azevedo Almeida. **Uma abordagem para o ensino da Elipse no curso de Licenciatura em Matemática**. Dissertação (mestrado, Programa em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula) Rio de Janeiro, 1998.

SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTOS, Robinson Nelson dos. **Semiótica e Educação Matemática**: registros de representação aplicados à teoria das matrizes. Dissertação (Mestrado em educação, ensino de ciências e matemática, Faculdade de educação da Universidade de São Paulo) São Paulo, 2011, 125p.

SHIARI, Aparecida Santana. **A utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Mato Grosso do Sul, 2011.

SILVA, Amarildo Melchiatedesda. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear**. Dissertação (Mestrado) USU, Rio de Janeiro, 1997.

SILVA, Carmen Especottida. **A ação mediadora da Geometria Analítica no ensino-aprendizagem da Álgebra Linear**. Dissertação (Tese de mestrado em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula). Rio de Janeiro, 1998.

SILVA, Clarice Zita Sanches de Brito e. **O ensino da álgebra linear**: uma experiência na Universidade do Amazonas. Dissertação (Mestrado, Universidade de Santa Úrsula). Rio de Janeiro, 1995.

SILVA, Lenir Morgado da. **Estratégias de utilização de registros de representação semiótica na resolução de problemas matemáticos**. Dissertação (Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação) São Paulo, 2007. 115f.

SILVA, Rute Henrique da. **Álgebra Linear como curso de serviço para a computação**. Dissertação (Mestrado UNESP). Rio Claro, 1999.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/ aprendizagem da matemática**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005. 176p.

SMITH, Corine, STRICK Lisa. **Dificuldades de aprendizagem de a a z**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**. Ensino médio. vol. 2. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 192 p.

STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra Linear e geometria analítica**. 2 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 1987. 470 p.

STEINHORST, Aroldo César. **O Processo de construção dos Conceitos de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares no Ensino Médio, Utilizando a Planilha como recurso**: um estudo comparativo. Dissertação (Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul) Porto Alegre, 2011, 88p.

TEIXEIRA, L. R. M. Dificuldades e erros na Aprendizagem da Matemática. In: VII EPEM ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, São Paulo. Anais. **Anais...** Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr14-Leny.doc. Acesso em: 25 jul. 2012.

TENREIRO-VIEIRA, Celina; VIEIRA, Rui Marques. Educação em ciências e em matemática numa perspectiva de literacia: desenvolvimento de materiais didáticos com orientação CTS/pensamento crítico (PC). In: SANTOS, Wildson Luiz Pereira dos; AULER, Décio. **CTS e educação científica**: desafios, tendências e resultados de pesquisas (org.). Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2011, p.417-437.

TRALDI JUNIOR, Armando. **Sistema de inequações do primeiro grau**: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações. 2002. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

UNESCO. United Nations Educational Scientific and Cultural Organization. **La enseñanza de las ciencias, la tecnología y las matemáticas en pro del desarrollo humano**. Marco de Acción. Paris: UNESCO, 2001. 22 p.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. 141f.). Londrina, PR: UEL, 2007.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1988.

ZATTI, Fernanda ; AGRANIONI, Neila Tonin ; ENRIGONE, Jacqueline Rachel Bianchi. Aprendizagem matemática: desvendando dificuldades de cálculo dos alunos. **Perspectiva**, Erechim, RS, v.34, n.128, p.115-132, dezembro/2010. Disponível em: http://www.uricer.edu.br/new/site/pdfs/perspectiva/128_142.pdf. Acesso em: 02fev. 2013.

ANEXOS

- **QUADROS**

APÊNDICES

- **ATIVIDADES DO ESTUDO PILOTO**
- **QUESTIONÁRIO DE PESQUISA**

Anexo 1 – Quadro adaptado de Di Pinto (2000)

Quadro 36– Síntese da pesquisa de Di Pinto (2000)

Autor	Ano	Tipo	Objetivo
Cavalca	1997	Dissertação de mestrado	Elaborar e aplicar uma sequência didática com situações que favoreçam o desenvolvimento das capacidades de interpretar e fazer representações gráficas planas de objetos do espaço
Munhoz	1999	Dissertação de mestrado	Investigar se alguns termos geométricos mais utilizados em GA têm seu significado impregnado pelo cotidiano.
Freitas	1999	Dissertação de mestrado	Investigar a interpretação que alunos do 2º grau dão a soluções de um sistema de equações lineares parametrizados.
Brito e Silva	1995	Dissertação de mestrado	Identificar as possíveis causas da dificuldade dos alunos da Universidade do Amazonas em relação à aprendizagem de Álgebra Linear (na realidade de Geometria Analítica).
Medalha	1997	Dissertação de mestrado	Verificar se os alunos constroem conceitos usando a visualização.
Perotti 1999	1999	Dissertação de mestrado	Construir uma sequência didática que possibilite aos estudantes a aprendizagem da equação da reta com ênfase no conceito de coeficiente angular, calculado pela taxa de variação.
Jardinetti	1991	Dissertação de mestrado	Verificar como o procedimento de ensino apoiado em material didático pode ser conduzido de forma a fazer com que o distanciamento abstrato-concreto seja mais bem interpretado pelo educando, ou seja, alcançar um nível de relacionamento entre as abstrações, de modo a possibilitar a elaboração de um sistema orgânico que englobe as abstrações e lhes dê sentido fazendo com que passem a ser compreendidas e vinculadas a qualquer relação já conhecida pelo aluno
Almeida Ribeiro	1998	Dissertação de mestrado	Fazer com que os alunos ampliem sua capacidade de visualização, passando a serem participativos, sendo capazes de refletir e questionar posições sobre suas ações, através das respostas às três questões abaixo: - Como os alunos construiriam os conceitos de elipse utilizando-se de material concreto? - Em que situações do mundo real, surge a forma elíptica? - Como garantir que as ovas, obtidas pelo corte no cone de isopor e pelo método do jardineiro, são elipses?
Silva	1998	Dissertação de mestrado	Estudar a ação da Geometria Analítica como agente mediador do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, tendo em vista que tal mediação pode ajudar a vencer obstáculos decorrentes da dificuldade de abstrair e generalizar. Pretende-se, pois, verificar com a Geometria Analítica pode influenciar o aprendizado de alguns conceitos básicos da Álgebra Linear.
Bittar	1998	Tese de doutorado	Verificar a disponibilidade e/ou eficácia do conceito vetor como ferramenta e verificar, em outro nível, o conceito de vetor como objeto.
Machado e Munhoz	1999	Artigo de congresso	Procurar investigar a maneira como o professor de segundo e terceiro graus, encara o problema, como percebe a dupla interpretação de alguns termos geométricos em relação à linguagem natural e à linguagem matemática. Para isso os autores elaboraram um teste a fim de diagnosticar se o professor tem consciência desse problema, ou se ele próprio é vítima do contágio entre as duas representações.
Bittar	1998	Artigo de periódico	Trabalhar a noção de vetor como objeto num campo informático deve evidenciar aspectos escondidos num ensino centrado no lápis e papel.
Bittar		Artigo de congresso	Responder às seguintes questões: - Sobre o rótulo vetor, que objeto está escondido? - Que tipo de dificuldades pode engendrar esta transposição? E no que concerne a passagem da geometria à álgebra

Fonte: Adaptado de Di Pinto (2000)

Anexo 2 – Quadro adaptado de Celestino (2000)

Quadro 37 – Síntese da pesquisa de Celestino (2000)

Autor	Ano	Tipo	Objetivo
Silva	1997	Dissertação de mestrado	Investigar a produção de significados, pelos alunos, para a noção de base em Álgebra Linear.
Silva	1999	Dissertação de mestrado	Como projetar, executar e avaliar uma disciplina de Álgebra Linear (diferente da forma usual) que atenda às expectativas de um curso de computação.
Dias e Artigue	1993	Dissertação de mestrado	“avaliar por meio de provas escritas dos alunos de 1992/1993, que tratam de assuntos semelhantes àqueles de 1990/1991 e 1991/1992, o desempenho construídos por alunos (do primeiro ano universitário (DEUG A) em relação às noções centrais do ensino, isto é, às noções de independência linear e de posto no R^n , e a ligação entre o implícito e o paramétrico.” A autora quis ainda avaliar “por meio das noções centrais, qual é a utilização do método de Gauss? E também qual a articulação feita entre o método de Gauss como técnica e as noções de Álgebra Linear (em particular as noções de subespaços gerado e de sistemas de equações lineares – possíveis confusões – de dimensão de um subespaço gerado)? (Dias, 1993: p. 10).
Dias	1995	Artigo de congresso	Analisar a flexibilidade entre diferentes pontos de vistas: cartesiano e paramétrico em Álgebra Linear.
Dias	1998	Artigo de congresso	Estudar o fenômeno da articulação de pontos de vista cartesiano e paramétrico no tratamento das representações de subespaços vetoriais.
Dias	1998a	Tese de doutorado	Estudar o fenômeno de articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico na representação de espaços vetoriais.

Fonte: Adaptado de Celestino (2000)

Anexo 3 – Quadro adaptado de Nagamachi (2006, 2009)

Quadro 38 – Síntese da pesquisa de Nagamachi (2006, 2009)

Autor	Ano	Tipo	Objetivo
Perotti	1999	Dissertação e mestrado	Construir uma sequência didática que possibilite aos alunos a aprendizagem da equação da reta com ênfase no conceito de coeficiente angular, calculado pela taxa de variação. (Perotti, 1999, p. 1)
Azevedo	2002	Dissertação de mestrado	Enfocar a sala de aula em relação a importância do ensino das equações algébricas no fim do 3º ano do ensino médio. Verificando esta importância elaborar uma proposta de trabalho considerando a resolução de problemas no ensino de matemática.
Freitas	2002	Dissertação de mestrado	Indicar algumas direções para repensar o ensino da álgebra escolar, especificamente as resoluções das equações do primeiro grau.
Oliveira	2006	Dissertação de mestrado	Verificar a abordagem dada pelo livro didático do ensino médio ao tema “equações Diofantinas lineares”.
Freitas	1999	Dissertação de mestrado	Proceder a um diagnóstico sobre a interpretação que alunos do 2º grau dão às soluções de um sistema de equações lineares parametrizados.
Lima	1999	Dissertação de mestrado	Construir e aplicar uma sequência didática visando o estudo de algumas formas de resolução de equações de terceiro grau, destacando a ideia do método geométrico sistematizado pelo matemático árabe Omar Khayyam.

Fonte: Adaptado de Nagamachi (2006, 2009)

Apêndice 1 - Atividades do Estudo Piloto

Atividade 1: Resgatando ideias sobre sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas

Você já sabe que um sistema linear de duas equações e duas incógnitas é um conjunto de

duas equações lineares da forma: (S1)
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cada uma das equações do sistema é uma equação linear. As incógnitas são x e y e os valores a_1 e b_1 (a_2 e b_2) são números reais e são chamados coeficientes. O número real c_1 (c_2) é o termo independente. Uma dupla ordenada de números reais (α, β) é solução de uma equação linear se satisfaz a equação, ou seja, se substituirmos os valores $x = \alpha$, $y = \beta$ na equação obtemos uma identidade.

Obs: Todas as atividades devem ser salvas.

Salve as atividades como APJL_A1 colocando as iniciais da dupla, no exemplo, AP são as iniciais de Ana Paula e JL as iniciais de Jorge Luis e A1 atividade 1.

1) A dupla ordenada de números reais (2,2) é solução da equação linear $2x+3y=10$.

Para isso abra uma janela no GeoGebra, digite a equação e localize o ponto (2,2).

1.1) O que você observou?

1.2) Dê exemplos de outras soluções da equação. A partir dos seus exemplos qual a conclusão que você chega?

Você pode inserir um texto e escrever suas respostas, explicando como fez para chegar a esse resultado.

Fonte: Elaborado pela autora, 2011.

Atividade 1 – Tarefa 2

Atividade 1: Resgatando ideias sobre sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas

Uma dupla ordenada de números reais (α, β) é solução do sistema linear (S1) se satisfaz as duas equações, ou seja, substituídos $x = \alpha$, $y = \beta$ nas equações obtemos uma identidade.

Vamos agora utilizar o software GeoGebra para investigar a solução de sistemas lineares com 2 equações e 2 incógnitas.

2) As tarefas indicadas a seguir deverão ser realizadas para cada um dos sistemas lineares dados:

$$(a) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

2.1) Abra uma janela no GeoGebra e digite as equações do primeiro sistema.

2.2) Salve o arquivo na forma do exemplo APJL_A2a em que, por exemplo, AP são as iniciais de Ana Paula e JL as iniciais de Jorge Luis e A2a atividade 2 letra a.

2.3) Colorir as retas obtidas de cores diferentes. Para isso selecione a equação (ou a reta) e com o botão direito do mouse selecione propriedades e defina uma cor. Movimente o mouse e verifique a diferença de cor nas retas.

2.4) Coloque as equações na forma $y = hx + d$. Para isso selecione a equação e com o botão direito do mouse selecione a forma desejada.

- 2.5) Observe o que apareceu nas janelas de geometria e algébrica. Registre suas observações inserindo uma janela de texto.
- 2.6) De acordo com suas observações o sistema (a) apresenta quantas soluções? Justifique.
- 2.7) Como é classificado um sistema de duas equações e duas incógnitas que apresenta esse número de soluções?

Fonte: Elaborado pela autora, 2011.

Estudo Piloto - Atividade 1 - Tarefas 3, 4 e 5 Resgatando idéias sobre sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas	
3) Seja a reta de equação $y = 2x + 4$:	a) Construa uma 2ª reta que intercepte a reta dada em um só ponto. b) Construa uma 3ª reta que seja paralela à reta dada. O que você observa sobre os coeficientes angulares destas duas retas? c) É possível construir uma reta que seja coincidente com a reta dada? d) Monte sistemas lineares combinando duas equações da reta dada e das retas obtidas em (a), (b), e (c). e) Use o GeoGebra para investigar esses sistemas quanto ao número de soluções. IMPORTANTE! Não se esqueça de salvar as atividades.
4) Um sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas pode ser escrito na forma matricial $AX = B$, onde $A_{2 \times 2}$ é a matriz dos coeficientes, X é a matriz coluna, no caso a matriz incógnita, e C a matriz dos termos independentes. Use o GeoGebra para resolver as tarefas:	a) $\begin{bmatrix} 3 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de a para que a solução do sistema seja representada por duas retas paralelas. b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix}$, determine o valor de b para que a solução do sistema seja representada por duas retas coincidentes. c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, determine o valor de c para que a solução do sistema seja representada por duas retas concorrentes, que se interceptam em apenas um único ponto.
5) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.	a) Usando o software GeoGebra resolva o sistema linear $Au = 3u$ onde $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. b) De que forma podem ser expressos todos os vetores $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que satisfazem o sistema da letra (a)? c) Digite $a = 1$ criando um seletor. Represente na forma de ponto, o vetor genérico encontrado na letra (b), usando a no lugar da variável x ou y . d) Faça variar a movendo o seletor. A resposta que você obteve na letra b está correta? Justifique.

Fonte: Elaborado pela autora, 2011.

Estudo Piloto – Atividades Complementares (a serem resolvidas em casa)	
1) a) Para cada sistema indique os métodos de resolução que você conhece. b) Resolva cada um dos sistemas por um método, sem usar o GeoGebra. c) Verifique as soluções obtidas usando o GeoGebra.	d) $\begin{cases} 5(x - 2y + 1) = x - 8y + 7 \\ \frac{2x - y}{3} = \frac{1}{5} \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y = x + 4 \\ 2x + y = x + 2y + 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0,5x - 2,5y + 3 = 2 \\ x - 5y = -2 \end{cases}$ Desafio: Como você resolveria este sistema? g) $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$
2) Leia com atenção cada problema. Cada um deles pode ser modelado por um sistema de equações lineares. Estabeleça o sistema modelo e resolva.	a) Um caminhão-baú pode levar, no máximo, 58 caixas do tipo A ou B, de mesmo tamanho. Elas têm, respectivamente, 56 kg e 72 kg. A carga máxima para esse caminhão é de 3.840 kg em cada viagem. Quantas caixas de cada tipo são transportadas por esse caminhão, estando ele com a capacidade máxima ocupada? b) No estacionamento de um shopping há 80 veículos, entre carros e motos. Sabe-se também que o número de rodas é igual a 260. Determine o número de carros e motos.

Fonte: Elaborado pela autora, 2011.

Apêndice 2 - Questionário de pesquisa e Resultados

O questionário de pesquisa foi aplicado aos alunos após terem desenvolvido a atividade investigativa, com o objetivo de verificar se essa atividade investigativa, utilizando os softwares GeoGebra, VCN e Winplot, havia sido bem aceita.

O questionário foi desenvolvido com o objetivo de verificar se a dupla apresentava dificuldades em acessar os softwares, se os alunos já tinham conhecimentos adquiridos ao uso de softwares matemáticos e de verificar se os alunos haviam antes trabalhado juntamente a representação geométrica e algébrica, definir a opinião dos alunos em relação às vantagens e desvantagens de aprender a usar os softwares no ensino-aprendizagem de sistemas lineares.

Buscamos mostrar como a pesquisa foi encadeada de forma a definir a escola, os alunos, a análise da atividade piloto, os objetivos da atividade principal e do questionário de pesquisa, com o objetivo de desenvolver a aprendizagem significativa em relação ao conteúdo SL.

A questão 1 teve como objetivo verificar se os alunos durante a atividade principal apresentaram dificuldades em acessar os softwares, informando em cada software a dificuldade encontrada.

Este questionário é destinado a 89 alunos da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear do 7º período do curso de Sistema de Informação que já desenvolveram o conteúdo de sistemas lineares através de atividades utilizando softwares matemáticos no caso o GeoGebra, VCN e Winplot.

1 - A dupla apresentou dificuldades em acessar os softwares utilizados na atividade investigativa? Se apresentaram dificuldades, favor definir quais as dificuldades encontradas.

- () Sim Software GeoGebra Dificuldades: _____
 () Sim Software VCN Dificuldades: _____
 () Sim Software Winplot Dificuldades: _____
 () Não.

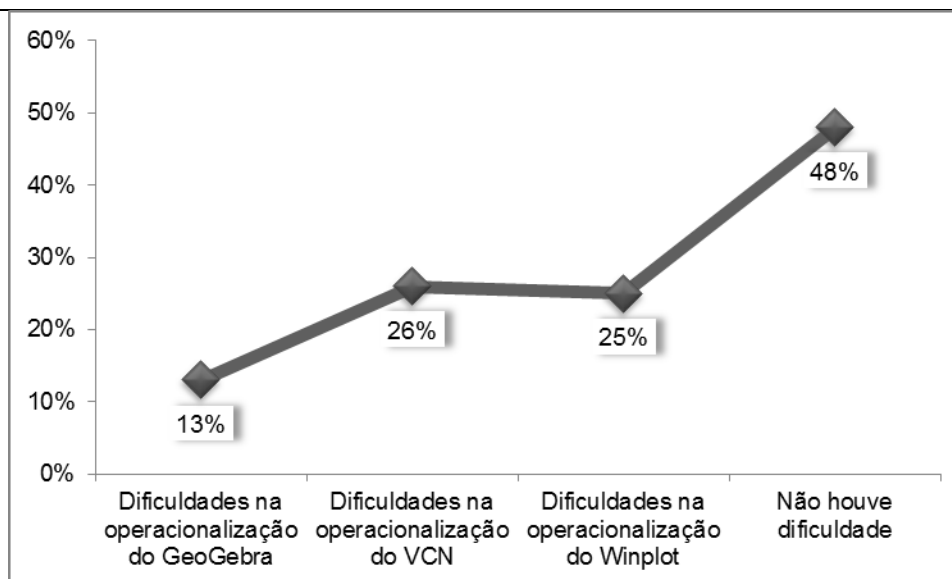


Gráfico 6 – Percentual de dificuldades na operacionalização de TICs

Cinco duplas comentaram ter tido dificuldade em salvar o arquivo do VCN (GRÁFICO 6).

A questão 2 teve por finalidade verificar se os alunos anteriormente já haviam trabalhado com atividades relacionando as representações algébricas e geométricas.

2 - Vocês já haviam tido a oportunidade anterior de relacionar a solução algébrica com a geométrica de algum conteúdo matemático?

() Não () Sim, conteúdo: _____

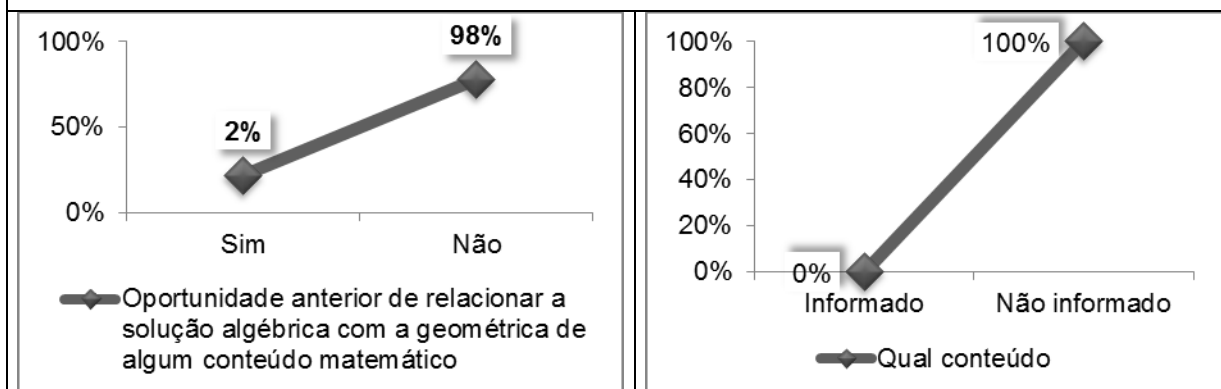


Gráfico 7 – Oportunidade anterior de associação de solução algébrica com a geométrica

Na questão 3 o interesse foi verificar se antes da atividade principal os alunos haviam sido iniciados em sistemas lineares por meio de algum software matemático.

3 – Já utilizaram antes da atividade desenvolvida algum software matemático para aprender sistemas lineares? Se sim definir quais softwares.

() Não () Sim, softwares: _____

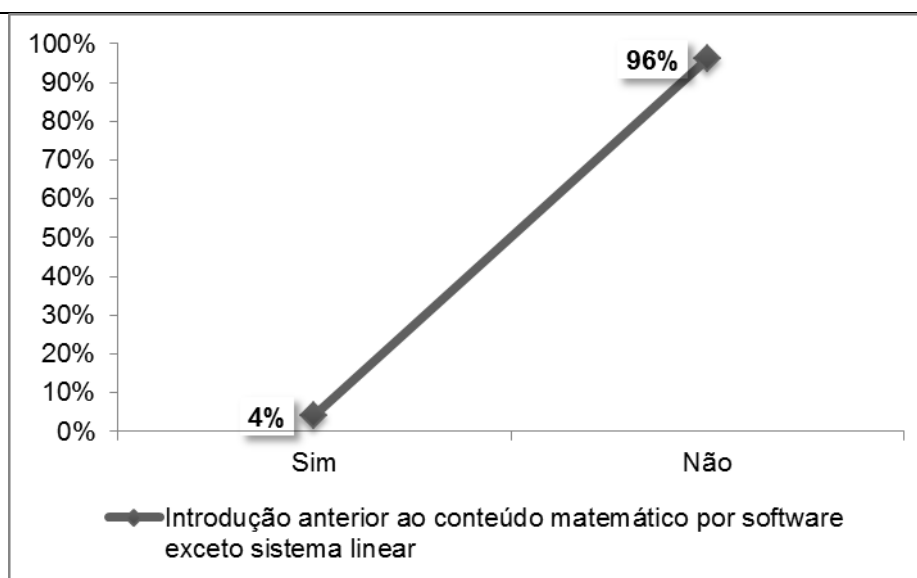


Gráfico 8 – Software para aprender sistemas lineares

A questão 4 desejou verificar se antes da atividade principal os alunos haviam aprendido algum conteúdo matemático por software matemático.

4 – E de outro conteúdo matemático sem ser sistema linear? Definir o conteúdo e o software utilizado.
 Não Sim, conteúdo e software: _____

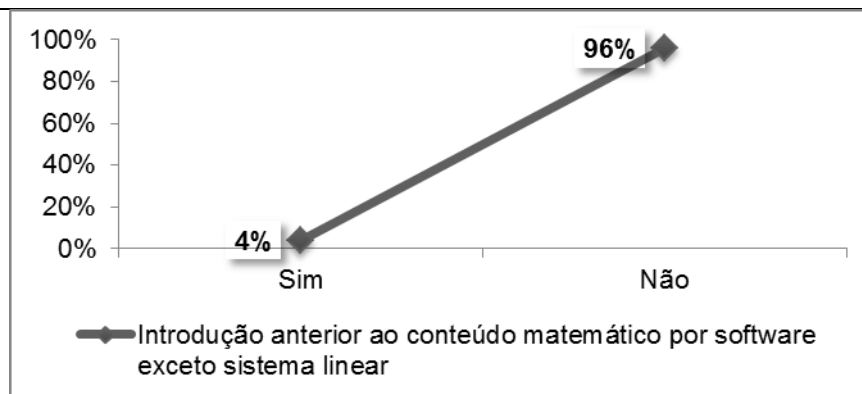


Gráfico 9 – Alguma introdução por TIC em sistema linear

Dos poucos alunos que tiveram introdução, 3% informaram ter sido não com conteúdo matemático, mas de informática, e 1% pelo conteúdo de Contabilidade e pelo software Minitab (programa matemático) (GRÁFICO 9).

O principal objetivo da questão 5 foi verificar as vantagens e desvantagens da aprendizagem de sistemas lineares através das TICs relacionando as representações algébricas e geométricas verificadas pelos alunos.

5 – Definir as vantagens e desvantagens de ter aprendido sistemas lineares através da relação entre a álgebra e a geométrica.
 Vantagens: _____
 Desvantagens: _____

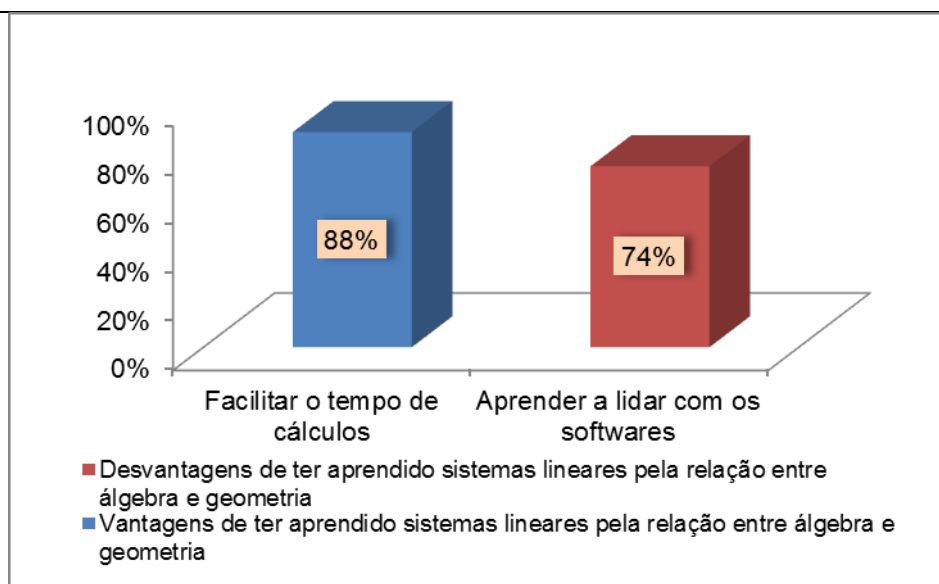


Gráfico 10 – Vantagens e desvantagens de introdução prévia de sistemas lineares

Com a utilização dos softwares, a atividade 6 apresentou como objetivo verificar se os alunos conseguiam desenvolver as atividades sem o uso de cálculo mental.

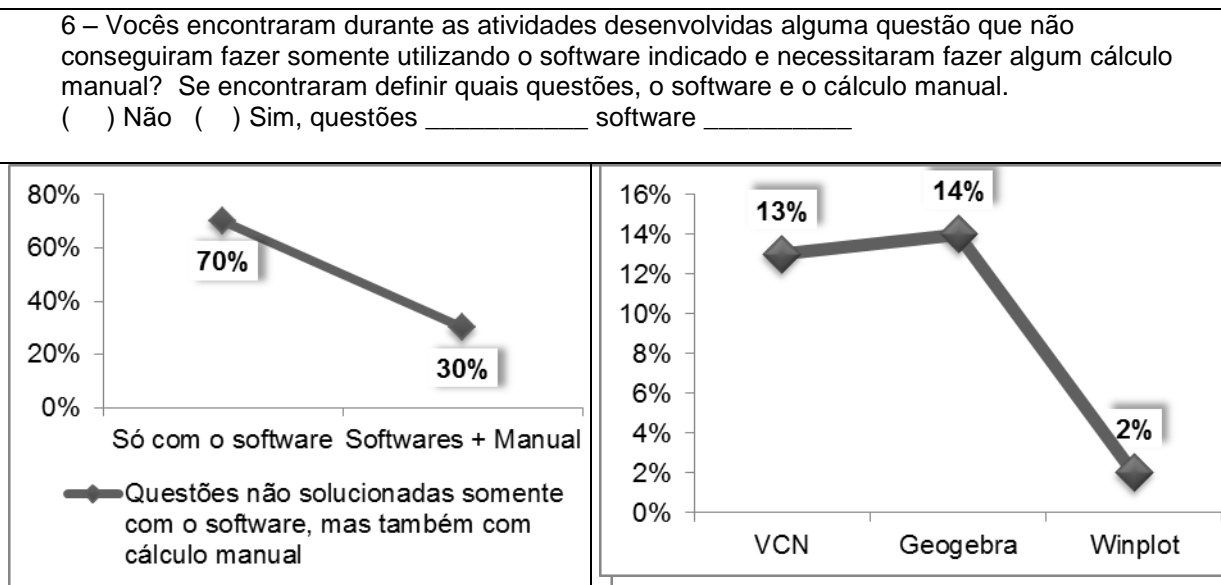


Gráfico 11 – Questões, uso apenas de software, necessidade de cálculo manual

Os alunos não informaram quais questões foram respondidas pelos softwares utilizados (GRÁFICO 11).

O objetivo da questão 7 foi identificar quais atividades os alunos apresentaram dificuldades ou não conseguiram desenvolver, definindo o software e a dificuldade.

7 – Definir as questões e dificuldades que não conseguiram fazer com os seguintes softwares:
 GeoGebra: _____
 VCN: _____
 Winplot: _____

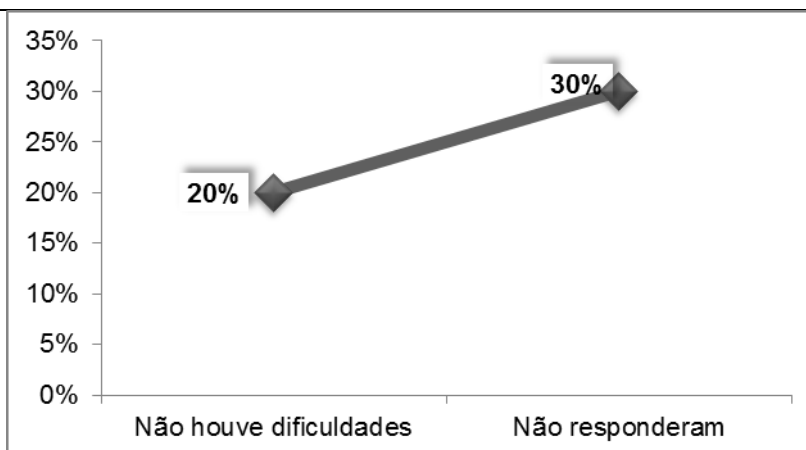


Gráfico 12 – Questões e dificuldades com os softwares

No GeoGebra 13% consideraram a dificuldade em manusear o sistema. No VCN 15% consideraram a dificuldade em salvar o arquivo e no Winplot 18% encontraram a dificuldade de trabalhar 3 dimensões (GRÁFICO 12).

O objetivo da questão 8 foi verificar se os alunos entendiam a representação geométrica como um método de resolução de sistema linear após a atividade principal e definir qual o motivo que consideravam ou não a representação geométrica como um método de aprendizagem.

8 – Vocês consideram a representação geométrica um método para resolver sistemas lineares?
Por que?
() Não () Sim
Justificativa: _____

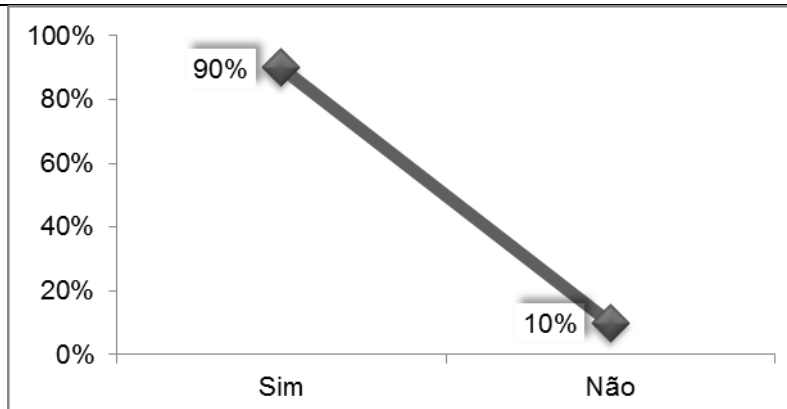


Gráfico 13 - Representação geométrica como método para resolver sistemas lineares

Os alunos colocaram como justificativa a comparação entre as duas representações, encontrando a solução do problema (como se a algébrica já não satisfizesse como a geométrica). Além disso, que em gráficos o entendimento da solução algébrica fica mais fácil e visível (GRÁFICO 14).

O questionamento de número 9 pediu que o aluno determinasse quais os métodos algébricos que aprendera no desenvolver da atividade principal.

9 – E quais os métodos algébricos vocês conhecem agora, logo após terem desenvolvido as atividades sobre sistemas lineares?
Métodos:

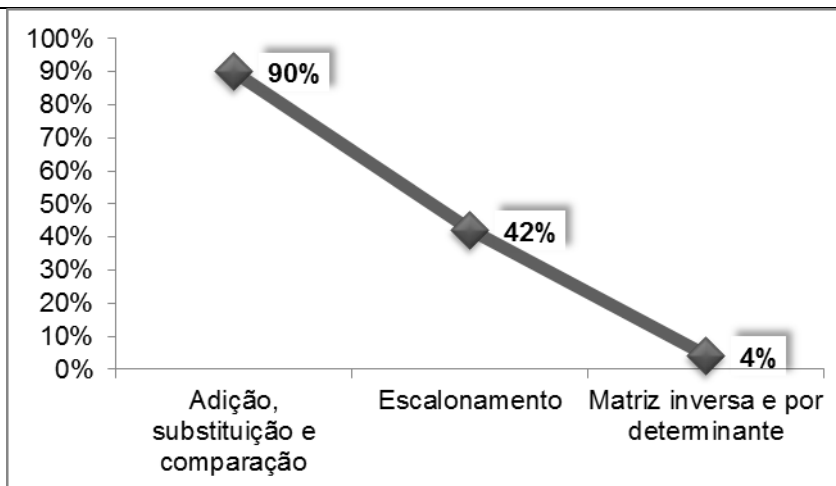


Gráfico 14 – Métodos algébricos conhecidos

A questão 10 solicitou que o aluno escrevesse sobre o que aprendeu depois de desenvolver as atividades relacionando as representações algébricas e geométricas com o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs).

10 – Após as atividades escreva o que vocês aprenderam com as atividades desenvolvidas.

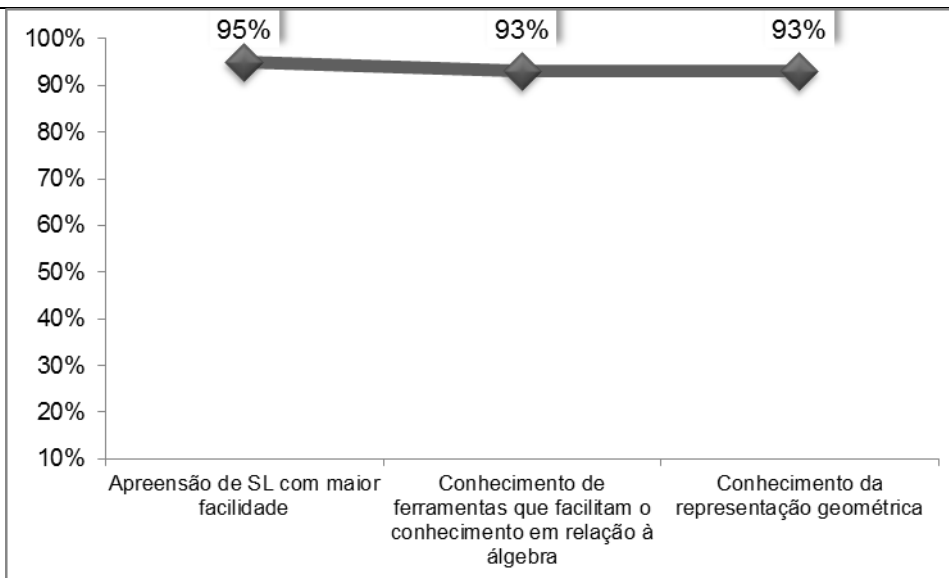


Gráfico 15 – Percepção de conhecimento adquirido com as atividades de TICs

A questão 11 solicitou que o aluno apresentasse pelo menos duas propostas para melhorar as atividades desenvolvidas sobre sistemas lineares.

11 – Apresente pelo menos duas propostas para enriquecer as atividades sobre sistemas lineares.

Proposta 1: _____
Proposta 2: _____

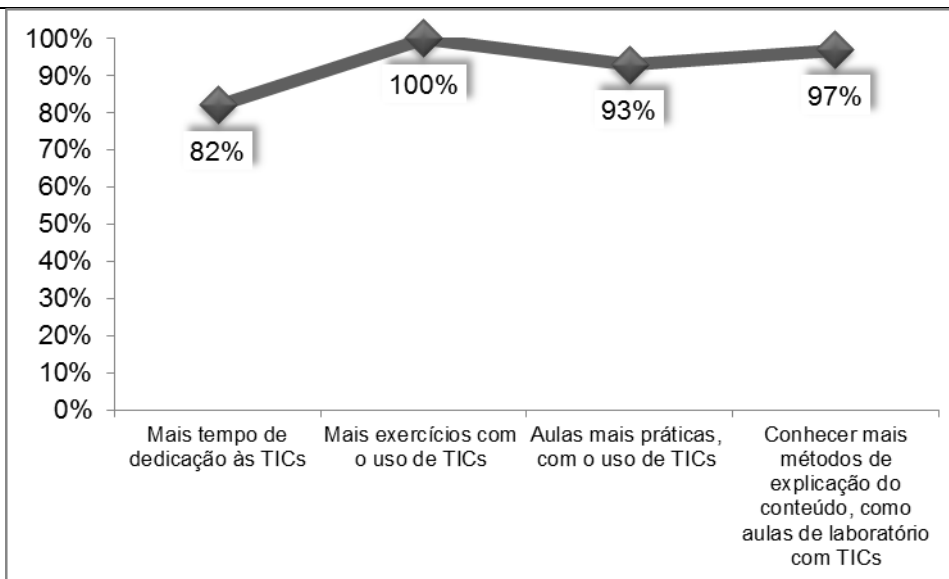


Gráfico 16 – Propostas para a aprendizagem de sistemas lineares